Logica dei predicati del primo ordine

Gianluigi Bellin

October 31, 2012

1 Predicati e costanti.

Nella logica dei predicati analizziamo le proposizioni, distinguendo i *predicati* (cioè le *proprietà* o *relazioni*) e gli *individui* per cui i predicati valgono.

Possiamo parlare di singoli individui attraverso i *nomi* (*costanti individuali*).

Consideriamo la proposizione

(1) *Socrate è un uomo.*

In (1) possiamo distinguere il predicato *"... è un uomo"* ed il nome *"Socrate"*. Scrivendo $U(\ )$ per *"... è un uomo"* e s per *"Socrate"*, possiamo rappresentare la (1) come $U(s)$.

Similmente rappresentiamo

Socrate è mortale	come	$M(s)$
Socrate è più anziano di Platone	come	$A(s,p)$
Verona sta tra Brescia e Padova	come	$T(v,b,p)$

dove $U(\ )$ ed $M(\ )$ sono predicati *unari*, $A(\ ,\ )$ è un predicato *binario* e $T(\ ,\ ,\ )$ un predicato *ternario*; inoltre s e p sono nomi (di persone) e v, b, p nomi (di città).

È conveniente usare *simboli di variabile* x, y, z, v invece di lasciare "buchi" nei predicati. Allora abbiamo la seguente *chiave di lettura:*

- $U(x)$ = x è un uomo*;*
- $A(x,y)$ = x è più anziano di y*;*
- $T(x,y,z)$ = x sta tra y e z*;*
- s = Socrate*,* v = Verona *ecc.*

Un'espressione come $U(x)$ che contiene *variabili libere* non è una proposizione ma un predicato.

Possiamo applicare i connettivi proposizionali ai predicati, costruendo predicati complessi:

$U(x) \wedge A(x,p) =$ *"x è un uomo più anziano di Platone".*

$O(x,y) \wedge O(y,x) =$ *"x e y si odiano reciprocamente".*

Esercizio: Traduci gli enunciati seguenti nella logica dei predicati. Fornisci la chiave di lettura.

b. Silvio è ricco ma Antonio no.

d. Kant è interessante, ma difficile.

i. Gianni e Pietro sono amici stretti.

j. Silvio si ammira.

k. Se Gianni continua a comprare gratta-e-vince, farà del male a se stesso.

l. Per quanto Gianni e Maria si amino profondamente, si rendono reciprocamente infelici.

2 Quantificatori

Nella proposizione *"tutti mi hanno annoiato"* il termine *"tutti"* non è un nome cui viene applicato il predicato *"x annoia me"*; piuttosto la proposizione esprime il fatto che la proprietà di essere qualcuno che mi annoia è si applica a tutti gli individui di un *universo del discorso*, per esempio tutte le persone che erano presenti alla festa sabato scorso. Nello stesso modo, la proposizione *"qualcuno mi annoia"* dice che questa proprietà si applica a qualche individuo di quell'universo.

Similmente nella proposizione *"tutti gli animali sono mortali"* il termine *"tutti"* non è un nome cui vengono applicati i predicati *"x è un animale"* e *"x è mortale"*. Piuttosto, questa proposizione considera le proprietà di essere un animale $A(x)$ e di essere mortale $M(x)$ e sostiene che ad ogni individuo cui si applichi la proprietà $A(x)$ si applica anche la proprietà $M(x)$; in altri termini, $A(x) \to M(x)$ si applica a tutti gli individui dell'universo del discorso, per esempio, l'insieme degli esseri viventi sulla terra oggi.

Scriviamo $\forall x.N(x)$ per *"tutti mi annoiano"* e $\exists x.N(x)$ per *qualcuno mi annoia*. Scriviamo $\forall x.A(x) \to M(x)$ per *"tutti gli animali sono mortali"*.

2.1 Sintassi

Un linguaggio del *calcolo dei predicati del primo ordine* comprende una lista illimitata di variabili v_0, v_1, v_2, ... (o anche x, y, z) ed inoltre

- Una lista P_0, P_1, P_2, ... P_n di *predicati*, ognuno dei quali ha un numero definito di "buchi" (*variabili libere*);
- una lista di *costanti* c_0, c_1, c_2, ..., c_k;
- i connettivi proposizionali *negazione* $\neg$, *implicazione* $\to$, *congiunzione* $\wedge$, *disgiunzione* $\vee$;
- i quantificatori $\forall$ ed $\exists$;

La **grammatica** è definita dalla regole seguente:

$$\boxed{A, B \quad := \; P^n(t_1, \dots, t_n) \mid \neg A \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall x.A \mid \exists x.A}$$

Qui P^n è un predicato che ha n *"buchi"* e $t_1, \dots, t_n$ sono o una variabile v_i oppure una costante c_j. La grammatica va letta così:

1. Un'espressione $P(t_1, \ldots, t_n)$ è una formula (*atomica*) del calcolo dei predicati;
2. Se A e B sono formule del calcolo dei predicati, allora $\neg A$, $A \to B$, $A \wedge B$, $A \vee B$ sono formule del calcolo dei predicati;
3. Se A è una formula del calcolo dei predicati, allora $\forall x.A$ e $\exists x.A$ sono formule del calcolo dei predicati.
4. Solo espressioni costruite applicando le regole 1, 2, 3 sono formule del calcolo dei predicati.

Esercizio. Traduci gli enunciati seguenti nella logica dei predicati. Fornisci la chiave di lettura.
(i) Tutti amano qualcuno.
(ii) Qualcuno è amato da tutti.
(iii) Tutti conoscono qualcuno che ammira tutti quelli che conoscono Silvio.
(iv) In qualche momento è possibile che tutti vengano ingannati e qualcuno può essere ingannato sempre, ma non è possibile che tutti siano ingannati sempre.

2.1.1 Soluzioni di alcuni esercizi.

Enuncato (iii) *Tutti conoscono qualcuno che ammira tutti quelli che conoscono Silvio.*
Chiave di interpretazione:

- *Universo di discorso:* un insieme dato D di esseri umani.
- *Predicati:* $C(x, y) :=$ *x conosce y*, $\quad A(x, y) :=$ *x ammira y.*
- *Costanti:* $s :=$ *Silvio.*
- ○ $C(y, s) \to A(z, y) =$ *z ama y, se y conosce Silvio;*
- ○ $\forall y.C(y, s) \to A(z, y) =$ *z ama tutti quelli che conoscono Silvio;*
- ○ $\exists z. (C(x, z) \wedge (\forall y.C(y, s) \to A(z, y))) =$ *x conosce qualcuno che ama tutti quelli che conoscono Silvio;*

Soluzione: $\forall x.\exists z. (C(x, z) \wedge (\forall y.C(y, s) \to A(z, y)))$

3 Esercizio

Si formalizzino le espressioni seguenti:

1. *"Il padre di Giulietta è Capuleti"*
2. *"Capuleti non ama i Montecchi"*
3. *"Capuleti ama Giulietta e tutti quelli che sono amati da Giulietta"*
4. *"Giulietta ama Romeo"*
5. *"Romeo è un Montecchi.*

Si ricavi una contraddizione da (2), (3), (4) e (5).
Nota. In (1), (2) e (3) *"Capuleti"* è usato come nome proprio (come fa Shakespeare), mentre in (2) e (5) *"essere un Montecchi"* è un predicato.