Argomenti diagonali

Gianluigi Bellin

November 30, 2010

La cardinalità degli insiemi.

Consideriamo la relazione di equivalenza "$\equiv$" tra insiemi ottenuta ponendo $A \equiv B$ se e solo se esiste una biiezione $f : A \to B$.

Dato un insieme A, la classe di equivalenza $[A] = \{B | A \equiv B\}$ è il *numero cardinale* di A.

Questa definizione si applica tanto agli insiemi finiti che a quelli infiniti.

Ma quali proprietà hanno i numeri cardinali dei seguenti insiemi infiniti

- l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali,
- l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi (positivi e negativi),
- l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali (classi di equivalenza di frazioni)
- l'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali?

Abbiamo $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Definiamo una funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ come segue:

- $0 \quad \mapsto \quad 0$;

- $+n \quad \mapsto \quad (2 \cdot n) - 1$;

- $-n \quad \mapsto \quad 2 \cdot n$.

La funzione f è iniettiva e suriettiva.

Cioè abbiamo una enumerazione senza ripetizioni $0, +1, -1, +2, -2, \ldots$ di tutti i numeri interi.

Abbiamo $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$!

Questo è più lungo da dimostrare, ma l'idea fondamentale è la seguente.

I numeri razionali sono classi di equivalenza di frazioni (nota che 1/2 e 2/4 sono lo stesso numero razionale) e ogni frazioni è positiva rappresentata da una coppia di numeri naturali.

La *funzione zig-zag di Cantor* mostra una bi-iezione tra coppie di naturali positivi ed i naturali positivi. Scriviamo $(i, j) \mapsto n$ come $(i, j)_n$:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1)_1 & (2,1)_3 & (3,1)_6 & (4,1)_{10} & \dots \\
(1,2)_2 & (2,2)_5 & (3,2)_9 & (4,2)_{14} & \dots \\
(1,3)_4 & (2,3)_8 & (3,3)_{13} & \dots & \\
(1,4)_7 & (2,4)_{12} & \dots & & \\
(1,5)_{11} & \dots & & &
\end{array}$$

La formula è:

$$(i, j) \quad \mapsto \quad ((i + j - 1)(i + j - 2)/2) + i.$$

Tuttavia $|\mathbf{N}| \neq |\mathbf{R}|$.

Consideriamo i numeri reali nell'intervallo $[0, 1]$. Scriviamo un numero $r \in [0, 1]$ in forma decimale: $0, i_1 i_2 i_3 \ldots$. (Come si rappresenta 1?)

Supponiamo di avere una enumerazione di tutti i numeri reali in $[0, 1]$:

$$
\begin{array}{lclllllll}
a_1 & = & 0, & \mathbf{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & & \\
a_2 & = & 0, & a_{2,1} & \mathbf{a_{2,2}} & a_{2,3} & \ldots & & \\
a_3 & = & 0, & a_{3,1} & a_{3,2} & \mathbf{a_{3,3}} & \ldots & & \\
\ldots & & \ldots & & & & & & \\
a_i & = & 0, & a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \ldots & \mathbf{a_{i,i}} & \ldots \\
\ldots & & \ldots & & & & & &
\end{array}
$$

Definiamo un numero $b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$ cosí:

- $b_i = 3$ se $a_{i,i} \neq 3$;
- $b_i = 2$ se $a_{i,i} = 3$.

Il numero b non è nell'enumerazione perchè differisce da ciascun numero a_i per l'i-esima cifra decimale: $b_i \neq a_{i,i}$ per definizione.

In generale possiamo dimostrare il Teorema di Cantor:

Teorema. *Sia A un insieme e $\wp(A)$ l'insieme dei sotoinsiemi di A. Non esiste una funzione bi-iettiva $f : A \rightarrow \wp(A)$.*

Esercizio.

Struttura matematica degli argomenti diagonali.

Un elemento $x \in A$ è un punto fisso di una funzione $f : A \to A$ se $f(x) = x$. Buona parte delle funzioni non ha punti fissi, come la funzione successore $s(n) = n+1$ o la funzione $g : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ tale che $g(x) = 1?x$. Ma la funzione $f(x) = x^x$ ha 1 come punto fisso: $f(1) = 1^1 = 1$.

Nel lambda calcolo invece troviamo sempre dei punti fissi. La ragione è che il lambda calcolo rappresenta *metodi meccanici di computare le funzioni* (detti **algoritmi**) piuttosto che funzioni nel senso della teoria degli insiemi.

Ricorda che ogni computazione nel lambda calcolo consiste nella riscrittura di termini nel modo seguente:

$$(\lambda x.t)u \mapsto t[u/x].$$

Esempio: $(\lambda x.x+1)3 = (x+1)[3/x] = 3+1$.

Una caratteristica inevitabile di tutti i metodi meccanici di computazione è che una computazione secondo tali metodi può non terminare.

Esempio: Possiamo scrivere $A = \lambda x.x(x)$. Nota bene: quando scriviamo $x(x)$ il termine x è considerato una volta come funzione ed una volta come argomento. Ma cosa può significare una cosa del genere?

Un programma di computer è un insieme di istruzioni, che può essere codificato in una sequenza di numeri, ed in ultima analisi una sequenza di numeri può essere codificata in un unico numero; allora ha senso pensare di applicare un programma, codificato in una sequenza di numeri, al numero che codifica quel programma. È possibile definire fenomeni simili a proposito delle "computazioni biologiche" (DNA computing)?

Ora consideriamo

$$A(A) = (\lambda x.x(x))(\lambda x.x(x)).$$

Come si computa $A(A)$?

$$\begin{array}{rcl} A(A) & = & (\lambda x.x(x))(A) \\ & = & x(x)[A/x] \\ & = & A(A) \end{array}$$

Dopo un passo, la computazione mi ha restituito lo stesso termine; dunque posso continuare all'infinito!

Supponiamo che $\lambda x.t$ computi la funzione $f(x)$ ed u rappresenti largomento n. Se la computazione di $(\lambda x.t)u$ termina in un lambda termine r, allora diciamo che il valore $f(n)$ è rappresentato da r; altrimenti diciamo che f è una *funzione parziale*, che non è definita per largomento n.

Sia M un lambda termine qualsiasi. Definiamo $\Omega := \lambda x.M(x(x))$. Dimostra (in un passo di riduzione) che $\Omega(\Omega)$ è un punto fisso di M. (Esercizio.)

Dunque tutti i lambda termini hanno un punto fisso!

Mentre nel caso del paradosso di Russell un argomento diagonale è usato per dimostrare una impossibilità di definire la collezione di tutti gli insiemi come un insieme, nella teoria degli algoritmi gli "argomenti diagonali" ed i punti fissi sono un metodo fondamentale della computazione.