Fondamenti della matematica

Gianluigi Bellin

November 17, 2010

Insiemi.

La nozione di *insieme* è così generale che non si può definire senza usare una nozione simile, come quella di una *collezione*, di una *molteplicità*.

Quando definiamo un *insieme*

1. raccogliamo nel pensiero una molteplicità di oggetti (gli *elementi* dell'insieme) in unità e

2. consideriamo questa collezione come un oggetto che può essere elemento di altri insiemi.

Esempi: (i) L'insieme G dei giorni della settimana: $G = \{$ lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domentica $\}$;

(ii) L'insieme $\mathbf{N}$ dei *numeri naturali*

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\};$$

(iii) L'insieme P dei numeri naturali che sono *primi*:

Definizione: un numero naturale n è primo se e solo se n *è maggiore di 1 ed è divisibile solo da se stesso e da 1*.

(iv) L'insieme dei presidenti delle camere (Senato e Camera dei Deputati)

$\{$ Renato Schifani, Giorgio Fini $\}$.

(v) L'insieme dei numeri naturali che sono maggiori di 2.

(vi) L'insieme dei numeri reali maggiori di 2.

Definizione degli insiemi.

In (i) e (iv) abbiamo elencato gli elementi.
in (iii) diamo una *proprietà definitoria*.
In simboli, scriviamo

$Pr(n) \equiv n > 1 \wedge (\forall x.x$ divide $n \to x = 1 \vee x = n)$.

Poi definiamo

$$P = \{x \in \mathbf{N} | Pr(x)\}$$

Similmente in (v) e (vi):

$$S_1 = \{x \in \mathbf{N} | x > 2\} \qquad S_2 = \{x \in \mathbf{R} | x > 2\}$$

Nota: Quando definiamo un insieme attraverso una proprietà $\{x|x > 2\}$ è importante specificare *l'universo del discorso*.
Se $x = 2,5$ o se $x = \pi$ (= 3,1415. . .) allora $x \in S_2$ ma non $x \in S_1$.

Nota: Se $P = \{x \in \mathbf{N} | Pr(x)\}$, allora vale

$$x \in P \text{ se e solo se } (x \in \mathbf{N} \wedge Pr(x)).$$

Problema: Come possiamo definire l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali?

Proprietà degli insiemi.

• *Due insiemi A e B sono uguali se hanno esattamente gli stessi elementi* (*assioma di estensionalità*).

$$\{d, c, a, b, a\} = \{a, b, c, d\}$$

• *esiste l'insieme vuoto* $\emptyset$:

$$\{x \in \mathcal{U} | x \neq x\}$$

Qui possiamo prendere qualsiasi universo di discorso $\mathcal{U}$: per l'assioma di estensionalità abbiamo $\emptyset = \{ \qquad \}$.

B è un sottoinsieme di A sse per ogni x, $x \in B$ implica $x \in A$ ("sse" sta per "se solo se").

• *Se A è un insieme allora esiste l'insieme $\wp(A)$ di tutti i sottoinsiemi di A* (*assioma dell'insieme potenza*).

Esempio. Se $A = \{1, 2, 3\}$, allora $\wp(A)$ è

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

In generale, se un insieme A ha n elementi, allora $\wp(A)$ ha 2^n elementi.

• *Se B è un insieme, allora esiste l'insieme unione degli elementi di B*; cioè esiste un insieme

$$A = \{x | \text{ esiste un } b \in B \text{ tale che } x \in b\}$$

cioè tale che ogni elemento di B è un sottoinsieme di A.

Scriviamo $A = \bigcup B$ (*assioma dell'unione*).

Esempio. Se $B = \wp(A)$ allora $A = \bigcup \wp(A)$.

• *Se* a *e* b *sono insiemi, allora esiste l'insieme coppia ordinata* (a, b).

Se A e B sono insiemi, allora esiste l'insieme $A \times B$ delle coppie ordinate di elementi di A e di B:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Dati due insiemi A e B, una *relazione* R tra A e B è un qualsiasi sottoinsieme di $A \times B$, $R \subseteq A \times B$.

Sia R una relazione su A, $R \subseteq A \times A$.

- R è *riflessiva* sse aRa per ogni $a \in A$.

- R è *simmetrica* sse aRb implica bRa, per ogni $a, b \in A$.

- R è *transitiva* sse aRb e bRc implica aRc, per ogni $a, b, c \in A$.

Una relazione R su A è una *relazione di equivalenza* se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

il processo di astrazione nella matematica moderna

Una *partizione* di A è una collezione di insiemi $\{A_1, \ldots, A_n\}$ tale che

- ogni A_i è non vuoto;
- per $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$.

Lemma. *Ogni relazione di equivalenza R su A determina una partizione di A come segue: dato $a \in A$, definisci la* classe di equivalenza *$[a]$ di a ponendo*

$$[a] = \{x \in A | aRx\}$$

Allora l'insieme $\{[a] | a \in A\}$ è una partizione di A.

Lemma. *Ogni partizione $\{A_1, \ldots, A_n\}$ of A determina una relazione di equivalenza, data da*

$$aRb \text{ sse per qualche } i,\ a \in A_i \text{ e } b \in A_i.$$

È facile provare che R è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempi. (i) Considera l'insieme T degli istanti di tempo in cui il pianeta terra sta compiendo un movimento di rotazione attorno a se stesso e di rivoluzione attorno al sole. Un *giorno solare vero* è l'intervallo di tempo determinato da due culminazioni consecutive del sole sul meridiano 180 (rispetto a Greenwich). La suddivisione di T in giorni solari veri è una partizione, l'insieme G dei giorni.

(ii) Diciamo che un giorno (solare vero) g è *7 equivalente* ad un giorno g' se il numero di giorni trascorsi tra g e g' è un multiplo di 7. La relazione "7 equivalente" è una relazione di equivalenza.

(iii) Consideriamo i giorni g_1, ..., g_7 dove g_i è l'i-esimo giono del novembre 2010, per $1 \leq i \leq 7$. Sia

$$[g_i] = \{g \in G | g \text{ è 7 equivalente a } g_i\}$$

la classe di equivalenza del giorno g_i.

Allora le classi di equivalenza $[g_1]$, ... $[g_n]$ sono i giorni della settimana da lunedí a domenica (il 1 novembre 2010 era un lunedì).

Esercizio. Cosa sono le ore del giorno?

Funzioni. Una funzione $f : A \to B$ da A a B è una relazione $f \subset A \times B$ tale che per ogni $a \in A$ esiste *uno ed un solo* $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$.

Scriviamo $f(a) = b$ quando f è una funzione e $(a, b) \in f$.

Funzioni suriettive. Una funzione $f : A \to B$ si dice *suriettiva* se per ogni $b \in B$ c'è un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Funzioni iniettive. Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$, per ogni $a_1, a_2 \in A$.

Biiezioni. Una funzione si dice *biiettiva* se è iniettiva e suriettiva.

Definizione dei numeri naturali.

Definiamo una relazione "$\equiv$" tra insiemi ponendo $A \equiv B$ se e solo se esiste una biiezione $f : A \to B$.

Se $A \equiv B$ diciamo che A e B sono *equinumerosi*.

Lemma. *La relazione "$\equiv$" è una relazione di equivalenza.*

Esempio. Data una tavola (bene apparecchiata) esiste una biiezione tra le posate di ogni coppia di commensali.

Dato un insieme A, la classe di equivalenza $[A] = \{B | A \equiv B\}$ è il *numero cardinale* dell'insieme A.

Così $0 = [\emptyset]$, $1 = [\{\emptyset\}]$, $2 = [\{0, 1\}]$, $\ldots$.

Abbiamo definito i numeri naturali usando solo proprietà degli insiemi!

Ma qual è l'universo di discorso $\mathcal{U}$ di $[A] = \{B \in \mathcal{U} | A \equiv B\}$?

Possiamo prendere $\mathcal{U}$ = l'insieme di tutti gli insiemi?

Il problema del barbiere di Borgo Roma. Il sindaco di Verona ha deciso che tutti gli uomini di Borgo Roma debbono radersi la barba ed ha conferito ad una persona **b** il titolo di *barbiere di Borgo Roma* con l'incarico

> *il barbiere di Borgo Roma raderà tutti e soli gli uomini di Borgo Roma che non si radono da soli.*

Ora supponiamo che **b** sia un uomo residente in Borgo Roma.

Chi rade il barbiere **b***?*

- Se **b** decide di radersi da sè, deve fermarsi, perché la sua funzione è di radere *solo i residenti maschi di Borgo Roma che non si radono da sè*; ma **b** è un residente maschio di Borgo Roma.

- Se **b** decide di non radersi, allora è un residente maschio di Borgo Roma che non si rade da sè. Ma il barbiere di Borgo Roma deve radere tutte le persone di questo tipo.

In ogni caso otteniamo una contraddizione. *Quindi il barbiere di Borgo Roma deve essere o una donna o un uomo che non risiede in Borgo Roma*.

Ma cosa succede se si nominasse il "supervisore universale all'igiene" che lava la faccia a tutti gli esser umani che non se la lavano da sè? Dovrebbe essere un angelo!

Il paradosso di Russell.

La definizione ingenua di un insieme S da una proprietà arbitraria $A(x)$

$$(*) \qquad S = \{x | A(x)\}$$

porta ad una contraddizione, come Bertrand Russell fece notare in una famosa lettera al grande filosofo tedesco Gottlob Frege.

Supponiamo che $S = \{x | x \notin x\}$ sia un insieme. Questa definizione porta ad una contraddizione: $S \in S$ sse $S \notin S$.

Qual è l'universo del discorso $\mathcal{U}$ in (*)? È illimitato:

$$(1) \qquad S = \{x \in \mathcal{U} | x \notin x\}$$

Se S è un insieme allora

$$(2) \qquad S \in \mathcal{U}$$

Per la definizione (1)

$$(3) \qquad S \in S \text{ sse } S \in \mathcal{U} \text{ e } S \notin S$$

Per (2) e (3)

$$S \in S \text{ sse } S \notin S.$$

Il problema sta nel fatto che consideriamo un *universo del discorso illimitato*. In un certo senso, il paradosso di Russell mette in evidenza un limite della nostra capacità di definire entità astratte in modo significativo.

In un altro senso, il paradosso di Russell è solo un esempio di "argomento diagonale" che rappresenta processi che non terminano.

Una **via d'uscita dal Paradosso di Russell** sta nel distinguere tra "piccole" collezioni (gli **insiemi**) e "grandi" collezioni (le **classi**).

Allora la collezione di tutti gli insiemi $\mathcal{U}$ è una *classe*, non un *insieme*; e così la collezione $\{x \in \mathcal{U} | x \notin x\}$ è una classe non un insieme.

Costruiamo insiemi usando *assiomi di comprensione ristretti*

$$S = \{x \in z | x \notin x\}$$

dove z *deve essere un* **insieme**.

Teoria assiomatica degli insiemi.

Costruiamo l'universo degli insiemi a partire dall'insieme vuoto, secondo assiomi "sicuri" che ci consentono di definire nuovi insiemi a partire da quelli dati.

La teoria dell matematico Zermelo comprende

(1) *assiomi di comprensione ristretti*;

(2) l'assioma di *estensionalità*;

(3) l'assioma di *fondazione* che dice che nessun insieme può contenere una catena infinita discendente di insiemi

$$\ldots A_n \in A_{n-1} \in \ldots A_1 \in A$$

Quindi in particolare non è possibile $A \in A$.

(4) l'assioma delle *coppie*: dati due insiemi x e y, esiste l'insieme $\{x, y\}$;

(5) l'assioma dell' *unione*;

(6) l' axioma dell'*infinito* che ci consente di prendere l'insieme di tutti i numeri naturali;

(7) l'insieme *potenza*.

Matematici “classici” e matematici “costruttivisti”

Per un matematico classico, possiamo estendere la teoria degli insiemi con nuovi assiomi, ma non è possibile essere completamente sicuri che l’aggiunta di nuovi assiomi non produca contraddizioni (questo risulta da un risultato del famoso logico Gödel).

Per un matematico *costruttivista*, possiamo considerare la definizione dei numeri naturali come un processo di costruzione a partire da un oggetto iniziale, lo zero, ed una funzione iniettiva, il successore, tale che lo zero non sia il successore di nessun numero.

- $0 \in \mathbf{N}$;
- se $n \in \mathbf{N}$ allora $s(n) \in \mathbf{N}$

Inoltre l'*assioma di induzione* corrisponde alla condizione di chiusura di questa definizione: nient'altro può essere un numero naturale che non sia ottenuto iterando un numero finito di volte l'applicazione della funzione successore.

per ogni $A \subseteq \mathbf{N}$

- Se $0 \in A$ e
- se $x \in A$ allora $s(x) \in A$,
- allora $\mathbf{N} \subset A$.

Tuttavia, non tutti i matematici costruttivisti accettano l'assioma della potenza applicato all'insieme infinito dei naturali, perché considerano accettabili in matematica solo i sottoinsiemi di $\mathbf{N}$ che siano dati secondo qualche metodo di costruzione.