Da E.Nagel - Cap. 2

Gianluigi Bellin

November 10, 2011

Induzione aritmetica.

1. *Perché*

$$\sum_{0<i\leq n} 2i-1 \quad = \quad n^2?$$

Dobbiamo spiegare una *verità necessaria*: non solo è vera, ma anche non può essere diversamente. Il fatto è conseguenza necessaria del significato dei termini aritmetici dato dalle definizioni (numero naturale, somma e potenza di numeri naturali).

Caso particolare:

$$1+3+5+7=4^2=16$$

Gli assiomi di Peano.

L'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N}$

(i) $0 \in \mathbf{N}$ (*zero*)

(ii) *Se* $n \in \mathbf{N}$ *allora* $n + 1 \in \mathbf{N}$ *(*successore*)*

(iii) $0 \neq n + 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$*;*

(iv) se $m + 1 = n + 1$ allora $n = m$, per ogni $n, m \in \mathbf{N}$*;*

(v) definizione di somma: per ogni $n, m \in \mathbf{N}$

$$m + 0 = n \qquad m + (n + 1) = (m + n) + 1$$

(vi) definizione di prodotto: per ogni $n, m \in \mathbf{N}$

$$m \cdot 0 = 0 \qquad m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m$$

(vii) definizione di potenza: per ogni $n, m \in \mathbf{N}$

$$m^0 = 1 \qquad m^{(n+1)} = (m^n) \cdot m$$

Principio di induzione: per ogni proprietà P

- Se $P(0)$
- e se $P(n)$ implica $P(n+1)$, per qualsiasi $n \in \mathcal{N}$
- allora $P(n)$, per ogni $n \in \mathcal{N}$.

Esempio 1.

*1. Dimostrare l'*associatività della somma*: per ogni* $k, m, n \in \mathbf{N}$

$$(k+m)+n = k+(m+n)$$

Per induzione sulla variabile n*.*

Caso base: *(*$n = 0$*)*

$$\begin{array}{rcl} (k+m)+0 & = & k+m \\ & = & k+(m+0) \end{array}$$

per la definizione di somma.

Passo induttivo: *supponiamo*
$(k+m)+n = k+(m+n)$ *(*ipotesi induttiva*);*
dimostriamo $(k+m)+(n+1) = k+(m+(n+1))$*:*

$$\begin{array}{rcll} (k+m)+(n+1) & = & ((k+m)+n)+1 & \textit{def.somma} \\ & = & (k+(m+n))+1 & \textit{ipot. ind.} \\ & = & (k+((m+n)+1) & \textit{def somma} \\ & = & k+(m+(n+1)). & \textit{def somma.} \end{array}$$

Avendo completato il caso base *ed il* passo induttivo, *concludiamo che l'associatività della somma vale* **per tutti gli** n*.*

Esempio 2.

2. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{0<ii\leq n} i \quad = \quad \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

caso base:

$$\sum_{0<ii\leq 1} i \quad = \quad 1 \quad = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

passo induttivo:

Supponiamo $\displaystyle \sum_{0<ii\leq n} i \quad = \quad = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

allora $\sum_{0<ii\leq (n+1)} i \;=\; (\sum_{0<ii\leq n} i) + (n+1)$

$$= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n\cdot(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Quindi posso concludere che l'equazione vale **per ogni** $n \in \mathbf{N}$

Esercizio. *Dimostrare per induzione su* n

$$\sum_{0<i\leq n}(2i-1) \quad = \quad n^2$$

Suggerimento.

Caso base: *dimostriamo*

$$\sum_{0<i\leq 1}(2\cdot 1-1) \quad = \quad 1^2$$

Passo induttivo:

Assumiamo l' ipotesi induttiva

$$\sum_{0<i\leq n}(2i-1) \quad = \quad n^2$$

e dimostriamo

$$\sum_{0<i\leq (n+1)}(2i-1) \quad = \quad (n+1)^2.$$