Induzione - Complemento

Gianluigi Bellin

November 14, 2011

Esempio 3.

3. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{0<i\leq n} i^3 \quad = \quad \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$$

caso base:

$$\sum_{0<i\leq 1} i^3 \quad = \quad 1 \quad = \quad \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$$

passo induttivo: Supponiamo $\sum_{0<i\leq n} i^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$ (*ipotesi induttiva*); allora

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{0<i\leq(n+1)} i^3 & = & \left(\sum_{0<i\leq n} i^3\right) + (n+1)^3 \\
(\textit{per ip.ind.}) & = & \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
 & = & \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} + \left((n+1)\cdot(n+1)^2\right) \\
 & = & \frac{n^2\cdot(n+1)^2+4(n+1)\cdot(n+1)^2}{4} \\
(\textit{propr.distr.}) & = & \frac{(n^2+4n+4)\cdot(n+1)^2}{4} = \frac{(n+2)^2\cdot(n+1)^2}{4} \\
 & = & \left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right)^2
\end{array}$$

Quindi l'equazione vale per tutti gli $n \in \mathbf{N}$.