Semantica e prammatica

Gianluigi Bellin

November 16, 2010

Promesse.

Consideriamo il problema di formalizzare il seguente enunciato

> *Se tu non aiuti me quando io ho bisogno di te, io non aiuto te quando tu hai bisogno di me.*

Per capire bene il problema, consideriamo il *contesto prammatico* in cui un questo enunciato può essere pronunciato.

Ci sono due persone che stanno considerando di fare un patto. Uno dice:

> *Prometto che se tu hai bisogno di me allora io ti aiuto, a condizione che tu prometta lo stesso.*

Formalizzando:

$$\mathcal{P}(B_{tm} \to A_{it}) \leftrightarrow \mathcal{P}(B_{it} \to A_{tm})$$

Cosa comporta fare una promessa condizionale?

Se prometto A, assumo come obbligo di mantenere la promessa, la realizzazione di A per quanto sta nelle mie capacità.

Se la promessa non è mantenuta, è una promessa vana. Diciamo che promettere è un *atto illocutorio*, ed una promessa vana è un atto fallito, *ma non un atto inesistente:* questo atto fallito può avere conseguenze molto gravi.

Nel caso di una promessa condizionale, se la condizione viene meno allora l'obbligo di mantenere la promessa decade.

> *Se tu non aiuti me quando io ho bisogno di me, allora io non sarò obbligato ad aiutare te quando tu hai bisogno di me.*

Si noti che potrei aiutarti nonostante tutto, forse per farti vedere che sono migliore di te.

Per la formalizzazione si noti che

$\neg(B_{tm} \rightarrow A_{it})$ è equivalente a $(B_{tm} \wedge \neg A_{it})$.

Giustificazione delle asserzioni

Una prova di A può essere vista come una *giustificazione dell'asserzione* A.

Una prova di $A \Rightarrow C$ può essere vista come un *metodo per produrre una giustificazione* dell'asserzione di C a partire da una giustificazione dell'asserzione di A.

Ho un metodo tale che, se tu mi dai una prova di A, applicandolo a questa otteniamo una prova di C. Questo metodo è la mia giustificazione per *asserire* che $A \to C$. In simboli:

$$f : A \to C,\ x : A \ \Rightarrow\ f(x) : C$$

In realtà questa è *un'altra implicazione*. Meglio usare un simbolo diverso:

$$f : A \supset C,\ x : A \ \Rightarrow\ f(x) : C$$

Interpretazione intuizionista dell'implicazione*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t : A \qquad x : B, \Gamma \Rightarrow u : C}{f : A \to B, \Gamma \Rightarrow u[{}^{f(t)}/_{x}] : C} \to L$$

$$\frac{\Gamma, y : A \Rightarrow t : B}{\Gamma \Rightarrow \lambda y.t : A \to B} \to R$$

$\lambda x.t$: il metodo che da una prova x di A mi dà una prova $t[x]$ di B.

Questo è possibile solo se a destra di $\Rightarrow$ *c'è* **al più una** *formula!*

*materiale aggiuntivo

Interpretazione intuizionista della congiunzione[†]

$$\frac{\Gamma \Rightarrow t_0 : A_0 \qquad \Gamma \Rightarrow t_1 : A_1}{\Gamma \Rightarrow \langle t_0, t_1 \rangle : A_0 \wedge A_1} \wedge R$$

$$\frac{x : A_0 \Gamma \Rightarrow t : C}{y : A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow t[\,{}^{\pi_0(y)}/_{x}] : C} \wedge L$$

$\pi_0(y)$: l'operazione di scegliere il primo elemento di una coppia.

Se y è una prova di $A \wedge B$, allora $\pi_0(y)$ è una prova di A.

Similmente $\pi_1(y)$: l'operazione di scegliere il secondo elemento di una coppia.

[†]Materiale aggiuntivo

Sequenti provabili intuizionisticamente.[‡]

Ecco un esempio di derivazione intuizionistica decorata con λ-termini. [§]

$$\dfrac{x : A \Rightarrow x : A \qquad \dfrac{x : A \Rightarrow x : A \qquad \dfrac{y : B \Rightarrow y : B \qquad z : C \Rightarrow z : C}{h : B \to C, y : B \Rightarrow h(y) : C}}{f : A \to (B \to C), x : A, y : B \Rightarrow (f(x))(y) : C}}{\dfrac{g : A \to B, f : A \to (B \to C), x : A \Rightarrow (f(x)(g(x)) : C}{g : A \to B, f : A \to (B \to C) \Rightarrow \lambda x.(f(x)(g(x)) : A \to C}}$$

[‡]materiale aggiuntivo

[§]Nell'inferenza $\to$-L in alto a destra, se $h : B \to C$ è un metodo che trasforma una prova di B in una prova di C, ed inoltre se y è una prova di B, allora $h(y)$ è una prova di C e posso sostituire $h(y)$ per z come testimone della provabilità di C. Similmente, se $f : A \to (B \to C)$ è un metodo che trasforma una prova di A in una prova di $B \to C$, e se inoltre x è una prova di A, allora $f(x)$ è una prova di $B \to C$. Posso così usare $f(x)$ al posto di h nel termine $h(y) : C$. E cosí via. Si noti che nell'ultima inferenza abbiamo usato λ *astrazione* dalla variabile $x : A$ che sparisce dal contesto sinistro.

Calcolo dei sequenti intuizionistico

Abbiamo visto che l'interpretazione funzionale (prammatica) non vale se una prova contiene sequenti con molte formule a destra di $\Rightarrow$. Ci sono sequenti che sono derivabili nel *calcolo dei sequenti classico*, ma non in quello *intuizionistico*. Esempio:

$$\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A}}{\Rightarrow A \vee \neg A}$$

Si intuisce che questo sequente non può avere una giustificazione prammatica intuizionistica: infatti questo vorrebbe dire che esiste sempre o una prova di A o una prova di $\neg A$. Ma ci sono casi in cui non disponiamo di una prova di A o di una prova di $\neg A$, quindi dobbiamo astenerci dall'asserire uno dei due (*interpretazione intuizionistica*). Tuttavia vale sempre che o A o $\neg A$ è vera, anche se non sappiamo quale (*interpretazione classica*).

Regole specifiche del calcolo dei sequenti intuizionistico

Vi sono regole classiche che devono essere modificate e nuove regole che devono essere introdotte per ottenere derivazioni intuizionistiche (con al massimo una formula a destra di $\Rightarrow$).

$$\vee R_1 \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} \qquad\qquad \vee R_2 \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \to B, \Gamma \Rightarrow C} \to L$$

$$\perp R \frac{\Gamma \Rightarrow \perp}{\Gamma \Rightarrow A} \qquad\qquad \textit{contrazione} \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C}$$

Si noti che la seguente derivazione di $\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$, non è intuizionistica solo perché nel ramo destro la regole $\neg L$ compare sotto la $\neg R$. Possiamo ottenere una derivazione intuizionistica permutando le due inferenze, come si fa nel ramo sinistro,

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{axiom}
\UnaryInfC{$A, B \Rightarrow A$}
\UnaryInfC{$A \wedge B \Rightarrow A$}
\LeftLabel{$\neg$L}
\UnaryInfC{$\neg A, A \wedge B \Rightarrow$}
\LeftLabel{$\neg$R}
\UnaryInfC{$\neg A \Rightarrow \neg(A \wedge B)$}
\AxiomC{axiom}
\UnaryInfC{$A, B \Rightarrow B$}
\UnaryInfC{$A \wedge B \Rightarrow B$}
\RightLabel{$\neg R$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \neg(A \wedge B), B$}
\RightLabel{$\neg L$}
\UnaryInfC{$\neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$}
\BinaryInfC{$\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg(A \wedge B)$}
\end{prooftree}
$$

Invece non è possibile ottenere una derivazione intuizionistica dalla seguente derivazione classica.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{axiom}
\UnaryInfC{$A, B, \Rightarrow A$}
\AxiomC{axiom}
\UnaryInfC{$A, B, \Rightarrow B$}
\BinaryInfC{$A, B, \Rightarrow A \wedge B$}
\UnaryInfC{$A, B, \neg(A \wedge B) \Rightarrow$}
\UnaryInfC{$B, \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A$}
\UnaryInfC{$\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A, \neg B$}
\UnaryInfC{$\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$}
\end{prooftree}
$$

Calcolo dei sequenti LJ

Usiamo simboli diversi per i connettivi e le formule intuizionistiche!

$$A, B \quad := \quad P \mid A \cap B \mid A \supset B \mid A \cup B$$

La negazione intuizionistica può essere definita: $\sim A =_{df} A \supset \bot$.

Ecco tutte le regole del calcolo dei sequenti intuizionistico.

assioma

$$A \Rightarrow A$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma\Delta \Rightarrow C}\,\textit{cut}$$

contrazione L

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C}$$

ex falso

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow A}$$

indebolimento L

$$\frac{\Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\cap\mathsf{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \cap B}$$

$$\cap_i\mathsf{L}\,\frac{A_i\Gamma \Rightarrow C}{A_0 \cap A_1, \Gamma \Rightarrow C} \qquad i = 0, 1$$

$$\supset\mathsf{R}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \supset B}$$

$$\supset\mathsf{L}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Delta \Rightarrow C}{A \supset B, \Gamma, \Delta \Rightarrow C}$$

$$\cap_i\mathsf{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \cup A_1} \qquad i = 0, 1$$

$$\cup\mathsf{L}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \cup B, \Gamma \Rightarrow C}$$

Computare con i λ termini.¶

Possiamo computare con i λ termini:

$$\begin{array}{c}(\lambda x.t)u \text{ si riduce a } t[u/x] \\ \pi_0\langle t_0, t_1\rangle \text{ si riduce a } t_0 \\ \pi_1\langle t_0, t_1\rangle \text{ si riduce a } t_1\end{array}$$

Questo singnifica che possiamo computare con le **prove**!

$$\dfrac{\dfrac{x : A, \Gamma \Rightarrow t : B}{\Gamma \lambda x.t : A \supset B} \quad \dfrac{\Delta \Rightarrow u : A \quad y : B \Rightarrow y : B}{f : A \supset B, \Delta \Rightarrow f(u) : B}}{\Gamma, \Delta \Rightarrow (\lambda x.t)u : B}$$

si riduce a

$$\dfrac{\Delta \Rightarrow u : A \quad x : A, \Gamma \Rightarrow t : B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow (\lambda x.t)u : B}$$

¶Materiale complementare

Filosofia della logica

Abbiamo due logiche? Quale logica è quella giusta?

Slogan (Quine):

Change of logic, change of subject!

- La logica classica è logica della verità,
  - gli atomi denotano proposizioni;
  - i connettivi sono interpretati da funzioni di valori di verità;
  - vale il principio del *terzo escluso* $A \vee \neg A$
  - i connettivi sono definibili tra loro usando la negazione: $A \to B \equiv \neg A \vee B$;
  - $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$, $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$, ecc.

Proposta di soluzione (Dummett, Dalla Pozza):

- la logica intuizionistica è logica delle asserzioni;
  - gli atomi denotano asserzioni;
  - i connettivi sono interpretati come operazioni tra prove;
  - non vale il principio del terzo escluso;
  - vale la proprietà della disgiunzione: *da una prova di $A \cup B$ posso ottenere o una prova di A o una prova di B*;
  - i connettivi **non** sono interdefinibili tra loro usando la negazione.