Due tipi di logica

Gianluigi Bellin

15 Novembre 2012

Calcolo dei sequenti LK, logica classica.

axiom

$$\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$$

$$\neg\ \mathsf{R}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} \qquad \neg\ \mathsf{L}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\wedge\ \mathsf{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \qquad \wedge\ \mathsf{L}\,\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\rightarrow\ \mathsf{R}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} \qquad \rightarrow\ \mathsf{L}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta}$$

$$\vee\ \mathsf{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \qquad \vee\ \mathsf{L}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\forall\ \mathsf{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(a)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x.A(x)}$$

se a non compare in Γ, Δ

$$\forall\ \mathsf{L}\,\frac{A[t/x], \forall x.A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\exists\ \mathsf{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x.A(x), A[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x.A(x)}$$

$$\exists\ \mathsf{L}\,\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

se a non compare in Γ, Δ

Teorema. *Un sequente S della logica dei predicati classica è valido se e solo se è derivabile nel calcolo dei sequenti* **LK**. Questo segue dalle proprietà dalla procedura "semantic tableaux".

Teorema. *La procedura "semantic tableaux" per la logica dei predicati classica dato un sequente S che contiene solo i predicati $A_1, \ldots, A_n$,*

1. termina con tutti i rami chiusi;

2. termina con un ramo aperto;

3. non termina, ed esiste un ramo infinito aperto.

Nel caso (1) *dall'albero chiuso posso ottenere una derivazione nel calcolo dei sequenti* **LK**; *Nei casi* $(2), (3)$, *da un ramo aperto* β *posso ottenere un modello* $\mathcal{M} = (D, A_{1,\mathcal{M}}, \ldots, A_{n,\mathcal{M}})$ *che falsifica* S.

Nei casi (2) e (3) procedo come segue, supponendo ci sia un solo predicato $A(x, y)$:
• poniamo $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (tutti i parametri introdotti);
• se $A(a_i, a_j)$ compare *a sinistra* in qualche sequente di β, e dunque in tutti i sequenti che seguono in β, pongo $\langle a_1, a_j \rangle \in A_{\mathcal{M}}$;
• se $A(a_i, a_j)$ compare *a destra* in qualche sequente di β, e dunque in tutti i sequenti che seguono in β, pongo $\langle a_i, a_j \rangle \notin A_{\mathcal{M}}$.
Questo è possibile perché β è aperto. Si può dimostrare che il modello così ottenuto falsifica tutti i sequenti di β e dunque anche il sequente finale S.

Domanda: esiste una soluzione al problema seguente?
(**"Problema di Herbrand":**) *Dato un sequente S del calcolo dei predicati, trovare un numero* n *di parametri tale che se S è valido la procedura termina con tutti i rami chiusi dopo aver introdotto $a_1, \ldots, a_n$.*

La risposta è **no**. Infatti nel calcolo dei predicati possiamo rappresentare le *Macchine di Turing*, i loro input e le loro computazioni con sequenti che sono validi se e solo se la computazione termina. Dunque se potessimo risolvere il "problema di Herbrand", potremmo anche risolvere il *problema della fermata delle Macchine di Turing, e questo è impossibile!*

Calcolo LJ, logica intuizionistica.

$$\textit{axiom}\ \ A \Rightarrow A \qquad \bot\,\frac{\Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow C}$$

$$\textit{indebolimento}\,\frac{\Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \textit{contrazione}\,\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\cap\ \mathsf{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \cap B} \qquad \cap_i\ \mathsf{L}\,\frac{A_i, \Gamma \Rightarrow C}{A_0 \cap A_1, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\supset\ \mathsf{R}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \supset B} \qquad \supset\ \mathsf{L}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, A \supset B, \Delta \Rightarrow C}$$

$$\cup_i\ \mathsf{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \cup A_1} \qquad \cup\ \mathsf{L}\,\frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \cup B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$i = 0, 1$

$$\forall\ \mathsf{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A(a)}{\Gamma \Rightarrow \forall x.A(x)} \qquad \forall\ \mathsf{L}\,\frac{A[t/x], \Gamma \Rightarrow C}{\forall x.A(x), \Gamma \Rightarrow C}$$

se a non compare in Γ

$$\exists\ \mathsf{R}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \exists x.A(x)} \qquad \exists\ \mathsf{L}\,\frac{A(a), \Gamma \Rightarrow C}{\exists x.A(x), \Gamma \Rightarrow C}$$

se a non compare in Γ, C

In questo calcolo si dimostrano solo i sequenti validi nella *logica intuizionistica.*

Vi sono formule valide della logica classica che non sono vaide nella logica intuizionistica. Per es., $A \vee \neg A$ è valida classicamente, ma non intuizionisticamente. Ma qual è la *semantica* della logica intuizionistica?

Logica del giudizio. Una *espressione elementare* della logica intuizionistica esprime un *giudizio assertivo*:

la proposizione p è asseribile.

In simboli, scriviamo $\vdash p$ (oppure Ap).

NOTA. Un giudizio non è **vero** o **falso**, ma è un atto **giustificato** o **ingiustificato**.

*La logica intuizionista dà una interpretazione convincente dell'***implicazione** $A \supset B$:

$A \supset B$ è asseribile se ho un metodo, una regola che mi consente di derivare B da A.

Ma cos'è un *metodo*? Una derivazione $A \Rightarrow B$ nel calcolo intuizionista **LJ** mi dà un metodo. Ma non posso limitarmi ad un calcolo logico specifico: devo considerare una *prova informale* di B a partire dall'assunzione A, tenendo in considerazione *metodi di prova che non sono ancora stati scoperti*.

“Semantica” /prammatica della giustificabilità:

(0) Una asserzione $\vdash p$ è giustificata da una *evidenza conclusiva* (una prova) che p è vera;
(1) $\perp$ è una *asserzione assurda* (per es., che $0 = 1$) e non è mai giustificata;
(2) l'implicazione $A \supset B$ è giustificata *da un metodo che trasforma la giustificazione di* A *in una giustificazione di* B;
(3) la congiunzione $A \cap B$ è giustificata se e solo se A è giustificata e B è giustificata;
(4) la disgiunzione $A \cup B$ è giustificata se A è giustificata o se B è giustificata;
(5) $\forall x.A$ è giustificata *da un metodo che associa ad ogni individuo* d *del dominio del discorso una giustificazione di* $A(d)$;
(6) $\exists x.A$ è giustificata *da un individuo* d *e da una giustificazione di* $A(d)$.
Definiamo la negazione $\sim A$ come $A \supset \perp$.

Esempi di derivazioni intuizionistiche.

$$
\supset \mathsf{R}\,\dfrac{\supset \mathsf{R}\,\dfrac{\supset \mathsf{L}\,\dfrac{\cap \mathsf{R}\,\dfrac{A, B \Rightarrow A \quad A, B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow A \cap B} \qquad C \Rightarrow C}{(A \cap B) \supset C, A, B \Rightarrow C}}{(A \cap B) \supset C, A \Rightarrow B \supset C}}{(A \cap B) \supset C \Rightarrow A \supset (B \supset C)}
$$

$$
\supset \mathsf{R}\,\dfrac{\forall \mathsf{R}\,\dfrac{\forall \mathsf{L}\,\dfrac{\supset \mathsf{L}\,\dfrac{B \Rightarrow B \quad A(a) \Rightarrow A(a)}{B \supset A(a), B \Rightarrow A}}{\forall x.(B \supset A(x)), B \Rightarrow A(a)}}{\forall x.(B \supset A(x)), B \Rightarrow \forall y.A(y)}}{\forall x.(B \supset A(x)) \Rightarrow B \supset \forall y.A(y)}
$$

se x non compare in B.

Deduzione Naturale

C'è un calcolo formale che rappresenta in modo più chiaro la deduzione intuizionistica. Facciamo solo alcuni esempi di *deduzione naturale*.

$$\dfrac{(A \cap B) \supset C \qquad \dfrac{\overset{(1)}{A} \qquad \overset{(2)}{B}}{A \cap B} \cap \text{ intro}}{\dfrac{(2)\ \dfrac{C}{B \supset C} \supset \text{ intro}}{(1)\ \dfrac{}{A \supset (B \supset C)} \supset \text{ intro}}} \supset \text{ elim}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(0)}{\forall x.B \supset A(x)}}{B \supset A(a)} \supset \text{ elim} \qquad \overset{(1)}{B}}{A(a)} \supset \text{ elim}$$

$$a \notin (0), (1) \quad \dfrac{A(a)}{\forall y.B(y)} \forall \text{ intro}$$

$$(1)\ \dfrac{\forall y.B(y)}{B \supset \forall y.A(y)} \supset \text{ intro}$$

Esercizio. Derivare nel calcolo intuizionistico **LJ** i sequenti che seguono:

1. $\sim A \cup \sim B \Rightarrow \sim (A \cap B)$;
2. $A \cup B \Rightarrow (A \supset B) \supset B$;
3. $\sim A \cup \sim B \Rightarrow \sim (A \cap B)$;
4. $\forall x.A(x) \Rightarrow \sim \exists y. \sim B(y)$;
5. $\forall x.(A(x) \cap B(x)) \Rightarrow (\forall y.A(y)) \cap (\forall z.B(z))$;
6. $(\exists x.A(x)) \supset B \Rightarrow \forall y.(A(y) \supset B)$ se y non compare in B.