Correzioni Compito

Filosofia della Scienza - CdL Biotecnologie, UniVerona

December 8, 2011

Assegnato il 22 novembre 2011 - consegnato 1 dicembre.

Valido per il 20 per cento del voto finale.

Calcolo dei predicati. *Esercizi di traduzione. (Si scriva la chiave di lettura.)*

1. *Nessuno rise o applaudì.*

Chiave: universo di discorso $D =$ un insieme di persone.
$R(x) = x$ rise. $A(x) = x$ applaudí.

$$\neg\exists x.(R(x) \vee A(x)). \quad \text{Anche possibile:} \quad \forall x.(\neg R(x) \wedge \neg A(x)).$$

2. *Se Gianni aiuta Paolo quando Paolo ha bisogno di aiuto, allora Paolo aiuta Gianni quando Gianni ha bisogno di aiuto.*

Chiave: universo di discorso $D =$ un insieme di persone.
$B(x) = x$ ha bisogno di aiuto; $A(x,y) = x$ aiuta y; $g =$ Gianni; $p =$ Paolo.

$$(B(p) \to A(g,p)) \to (B(g) \to A(p,g).$$

3. *Tutti quelli che non aiutano qualcuno che ha bisogno di aiuto non sono aiutati da nessuno quando loro hanno bisogno di aiuto.*

Chiave: universo di discorso $D =$ un insieme di persone.
$B(x) = x$ ha bisogno di aiuto. $A(x,y) = x$ aiuta y.

$$\forall x.\Big(\big(\exists y.B(y) \to \neg A(x,y)\big) \to \big(B(x) \to \neg\exists z.A(z,x)\big)\Big)).$$

oppure

$$\forall x.\Big(\big(\exists y.B(y) \to \neg A(x,y)\big) \to \forall z.\big(B(x) \to \neg A(z,x)\big)\Big)).$$

4. *Carlo viene alla festa se Elisa viene e viceversa.*

Chiave: universo di discorso $D =$ un insieme di persone.
$F(x) = x$ viene alla festa. $c =$ Carlo, $e =$ Elsa.

$$(F(e) \to F(c)) \wedge (F(c) \to F(e))$$

5. *Le balene sono mammiferi. Teodoro è una balena. Teodoro è un mammifero.*

Chiave: universo di discorso $D =$ un insieme di animali.
$B(x) = x$ è una balena, $M(x) = x$ è un mammifero. $t =$ Teodoro.

$$\begin{array}{l}\forall x.B(x) \to M(x).\\ B(t).\\ M(t).\end{array}$$

6. *Se allo stadio qualcuno è troppo rumoroso, tutti si scocciano e viceversa.*

Chiave: universo di discorso D = un insieme di persone.
$R(x) = x$ è rumoroso nello stadio. $S(x) = x$ si infastidisce.

$$(\exists x.R(x)) \to (\forall y.S(x))$$

7. *Se qualcuno è troppo rumoroso, tutti si adirano con lui.*

Chiave: universo di discorso D = un insieme di persone.
$R(x) = x$ è troppo rumoroso. $A(y,z) = y$ si adira con z.

$$\forall x.\big(R(x) \to (\forall y.A(y,x))\big)$$

Nota bene. *Non si può usare un quantificatore esistenziale,* perché la (7) non asserisce che uno scocciatore esiste:

$$\exists x.\big(R(x) \to (\forall y.A(y,x))\big)$$

7 punti

Calcolo dei sequenti. *Si verifichi se i sequenti che seguono sono validi nel calcolo proposizionale. Se non lo è si costrusca una valutazione che li rende falsi.*

8. $(\neg p \lor \neg q) \Rightarrow \neg(p \lor q)$ è falsificabile:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{V}_1}{p \Rightarrow p \qquad q \Rightarrow p}}{p \lor q \Rightarrow p}\,\lor\text{ L}}{\neg p, p \lor q \Rightarrow}\,\neg\text{ L} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{V}_2}{p \Rightarrow q \qquad q \Rightarrow q}}{p \lor q \Rightarrow q}\,\lor\text{ L}}{\neg q, p \lor q \Rightarrow}\,\neg\text{ L}}{\neg p \lor \neg q, p \lor q \Rightarrow}\,\lor\text{ L}}{(\neg p \lor \neg q) \Rightarrow \neg(p \lor q)}\,\neg\text{ R}$$

La valutazione $\mathcal{V}_1$ assegna i valori di verità $\mathcal{V}_1(p) = F$ e $\mathcal{V}_1(q) = V$. Dunque

- $\mathcal{V}_1(\neg p \lor \neg q) = (\neg F \lor \neg V) = V \lor F = V$;
- $\mathcal{V}_1(\neg(p \lor q)) = \neg(F \lor V) = \neg V = F$.

La valutazione $\mathcal{V}_2$ assegna i valori di verità $\mathcal{V}_1(p) = V$ e $\mathcal{V}_1(q) = F$. Dunque

- $\mathcal{V}_2(\neg p \lor \neg q) = (\neg V \lor \neg F) = F \lor V = V$;
- $\mathcal{V}_2(\neg(p \lor q)) = \neg(V \lor F) = \neg V = F$.

9. $(A \lor B) \Rightarrow ((A \to B) \to B)$ è valida.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B, A \qquad B \Rightarrow B, A}{A \lor B \Rightarrow B, A}\,\lor\text{ L} \qquad B, A \lor B \Rightarrow B}{A \lor B, (A \to B) \Rightarrow B}\,\to\text{ L}}{(A \lor B) \Rightarrow ((A \to B) \to B)}\,\to\text{ R}$$

10. $((A \to B) \to B) \Rightarrow (A \vee B)$: è valida.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A, B, B}{\Rightarrow A, B, (A \to B)}\,\to \mathrm{R} \qquad B \Rightarrow A, B}{(A \to B) \to B \Rightarrow A, B}\,\to \mathrm{L}}{((A \to B) \to B) \Rightarrow A \vee B}\,\vee \mathrm{R}$$

3 punti

Si dimostrino questi sequenti nel calcolo dei predicati.

Nota bene. (i) La procedura semantic tableaux cerca di stabilire se un sequente $S : \quad \Gamma \Rightarrow \Delta$ è *valido* oppure *falsificabile*. Applichiamo la procedura a sequenti S del calcolo dei predicati le cui formule *non contengono variabili libere*, dunque tutte le formule nel sequente finale S contengono solo costanti o variabili quantificate (cioè nel raggio d'azione di un quantificatore unversale $\forall$ o esistenziale $\exists$).
(ii) Nei nostri esempi per semplicità abbiamo considerato linguaggi *senza costanti né simboli di funzione*. Nella procedura però si introducono nuovi termini $\mathbf{a}_i$, detti *parametri*: li usiamo in corrispondenza delle regole per i quantificatori. Se la procedura produce un albero chiuso, allora i parametri sono considerate variabili libere: sono in effetti le *uniche* variabili libere che compaiono nella deduzione; per costruzione, nessun parametro compare nel sequente finale.
Se invece la procedura genera un ramo aperto, tutti i sequenti in quel ramo sono falsificabili da un modello; per definirne un modello usiamo *i parametri stessi* come dominio. In ogni modello *il dominio non può essere vuoto*; se all'inizio della procedura il sequente S non contiene costanti, allora nella lista di parametri si introduce subito a_0, anche se questo non compare in S.

11. $(\exists x.A) \to C \Rightarrow \forall x.(A \to C)$, assumendo che x non compaia in C.

$$(\S)\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\ ;\ A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow C, A(\mathbf{a}_0), A(\mathbf{a}_1), \exists x.A}{\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\ ;\ A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow C, (\exists x.A)}\,\exists \mathrm{R} \qquad C \Rightarrow C}{\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\ ;\ (\exists x.A) \to C, A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow C}\,\to \text{-L}}{\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\ ;\ (\exists x.A) \to C \Rightarrow (A(\mathbf{a}_1) \to C)}\,\to \text{-R}}{\mathbf{a}_0\ ;\ (\exists x.A) \to C \Rightarrow \forall x.(A \to C)}\,\forall \text{-R}$$

Nota(§): Nella procedura (cioè procedendo dal basso) scegliamo $\mathbf{a}_1$, un termine "nuovo", che non compare nel sequente conclusione, poi sostituiamo $\mathbf{a}_1$ per x in $A \to C$ (in simboli, $(A \to C)[\mathbf{a}_1/x]$) e questo è $A[\mathbf{a}_1/x] \to C[\mathbf{a}_1/x]$ (per la definizione di sostituzione). Poiché x non compare in C, quest'ultima formula è equivalente ad $A[\mathbf{a}_1/x] \to C$ che noi scriviamo in modo più semplice come $A(\mathbf{a}_1) \to C$.

Nella deduzione (cioè procedendo dall'alto in basso), è importante sapere che $\mathbf{a}_1$ è un termine che nel sequente compare solo in $(A(\mathbf{a}_1) \to C)$. Inoltre noi supponiamo che la variabile x non compaia libera in $A(\mathbf{a}_1)$ ed in C (altrimenti il significato della formula cambierebbe); ma questo è implicito nella notazione che usiamo, perché come spiegato nella nota precedente *le uniche variabili libere in un albero sono i parametri* $\mathbf{a}_i$.

12. $\exists x.(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x.A(x) \vee (\exists x.B(x))$ è valido:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \;;\; A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_1) \Rightarrow A(\mathbf{a}_0), A(\mathbf{a}_1), \exists x.A(x), \exists x.B(x)}{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \;;\; A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_1) \Rightarrow \exists x.A(x), \exists x.B(x)}\ \exists\,\mathrm{L}}{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \;;\; A(\mathbf{a}_1) \wedge B(\mathbf{a}_1) \Rightarrow \exists x.A(x), \exists x.B(x)}\ \wedge\,\mathrm{L}}{\mathbf{a}_0 \;;\; \exists x.(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x.A(x), \exists x.B(x)}\ \exists\,\mathrm{L}}{\mathbf{a}_0 \;;\; \exists x.(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x.A(x)) \vee (\exists x.B(x))}\ \vee\,\mathrm{R}
$$

13. *Vale la conversa* $(\exists x.A(x) \vee (\exists x.B(x)) \Rightarrow \exists x.(A(x) \wedge B(x))$?
Se no, si costruisca un modello che la falsifica.

• Questo sequente è falsificabile. Consideriamo i predicati $A(x) = x$ *è sano* e $B(x) = x$ *è malato*. Dato un insieme D di due persone, una sanissima, l'altra malata, in questo insieme vale che *c'è un sano oppure c'è un malato* ma non vale che *c'è una persona che è sana ed anche malata*.

• Formalmente sia $\mathcal{M} = (D, A_{\mathcal{M}}, B_{\mathcal{M}})$ con

- ○ $D = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}; \quad A_{\mathcal{M}} = \{\mathbf{a}_1\}, \quad B_{\mathcal{M}} = \{\mathbf{a}_2\}$
- ○ Poiché $\mathbf{a}_1 \in A_{\mathcal{M}}$ e $\mathbf{a}_2 \in B_{\mathcal{M}}$ abbiamo sia $\mathcal{M} \models A(\mathbf{a}_1)$ sia $\mathcal{M} \models B(\mathbf{a}_2)$;
- ○ dunque vale sia $\mathcal{M} \models \exists x.A(x)$ sia $\mathcal{M} \models \exists y.B(y)$; quindi $\mathcal{M} \models (\exists x.A(x)) \vee (\exists y.B(y))$.
- ○ Tuttavia $\mathcal{M} \not\models A(\mathbf{a}_1) \wedge (B(\mathbf{a}_1)$, perché $\mathcal{M} \not\models B(\mathbf{a}_1)$ (dato che $\mathbf{a}_1 \notin B_{\mathcal{M}}$) ed anche $\mathcal{M} \not\models A(\mathbf{a}_2)) \wedge (B(\mathbf{a}_2))$, perché $\mathcal{M} \not\models A(\mathbf{a}_2)$ (dato che $\mathbf{a}_2 \notin A_{\mathcal{M}}$). Quindi $\mathcal{M} \not\models \exists x.A(x) \wedge B(x)$

Otteniamo un modello che falsifica il sequente anche dalla procedura semantic tableaux. Consideriamo il seguente ramo:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots \quad \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \;;\; A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow A(\mathbf{a}_0), B(\mathbf{a}_1), \exists x.(A(x) \wedge B(x))}{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \;;\; A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow A(\mathbf{a}_0), A(\mathbf{a}_1) \wedge B(\mathbf{a}_1), \exists x.(A(x) \wedge B(x))}\ \wedge\,\mathrm{R} \quad \vdots}{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \;;\; A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow A(\mathbf{a}_0) \wedge B(\mathbf{a}_0), A(\mathbf{a}_1) \wedge B(\mathbf{a}_1), \exists x.(A(x) \wedge B(x))}\ \wedge\,\mathrm{R}}{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \;;\; A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow \exists x.(A(x) \wedge B(x))}\ \exists\,\mathrm{R}}{\mathbf{a}_0 \;;\; \exists x.A(x) \Rightarrow \exists x.(A(x) \wedge B(x))}\ \exists\,\mathrm{L} \quad \vdots}{\mathbf{a}_0 \;;\; (\exists x.A(x) \vee (\exists x.B(x)) \Rightarrow \exists x.(A(x) \wedge B(x))}\ \vee\,\mathrm{L}
$$

Questo ramo non può più essere continuato, perché non ci sono altri parametri da sostituire per x in $\exists x.(A(x) \wedge B(x))$. Considerando che solo la formula atomica $A(\mathbf{a}_0)$ compare nell'antecedente dei sequenti nel ramo, poniamo $\mathcal{N} = (D, A_{\mathcal{N}}, B_{\mathcal{N}})$ con

$$D = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1\} \ A_{\mathcal{N}} = \{\mathbf{a}_0\} \ B_{\mathcal{N}} = \emptyset.$$

Allora $\mathcal{N} \models (\exists x.A(x) \vee (\exists x.B(x))$ perché $\mathcal{N} \models A(\mathbf{a}_1)$ e dunque $\mathcal{N} \models \exists x.A(x)$; tuttavia $\mathcal{N} \not\models (\exists x.A(x) \wedge B(x))$ perché $\mathcal{N} \not\models B(\mathbf{a}_0)$ e $\mathcal{N} \not\models B(\mathbf{a}_1)$.

6 punti

• *Si dimostri per induzione che la somma dei primi n numeri dispari è uguale ad n^2.*

Caso base: $\sum_{0<i\leq 1}(2i-1) \;=\; (2\cdot 1-1) \;=\; 1 \;=\; 1^2$.

Passo induttivo: Assumiamo l' *ipotesi induttiva*:

$$\sum_{0<i\leq n}(2i-1) \quad = \quad n^2$$

Dobbiamo dimostrare

$$\sum_{0<i\leq (n+1)}(2i-1) \quad = \quad (n+1)^2.$$

Infatti

$$\begin{array}{rcll} \sum_{0<i\leq(n+1)}(2i-1) & = & \sum_{0<i\leq n}(2i-1)+\big(2(n+1)-1\big) & \\ & = & n^2+(2n+2-1) & \text{per ipotesi induttiva e riscrittura;} \\ & = & n^2+2n+1 & \\ & = & (n+1)^2. & \end{array}$$

Il *principio di prova per induzione* ci consente di concludere che per tutti gli n, $\sum_{0<i\leq n}(2i-1) \quad = \quad n^2$ come desiderato.

2 punti

• *Si dimostri che l'insieme dei numeri interi* $\mathbf{Z}$ *non è un modello degli assiomi di Peano.*

Il primo ed il terzo assioma di Peano dicono che

(i) $0 \in \mathbf{N}$ (*zero*)

(iii) $0 \neq n+1$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$;

Se cerchiamo di costruire un modello degli assiomi di Peano con gli *interi* come universo del discorso $\mathcal{M} = (\mathbf{Z}, 0_{\mathcal{M}}, s_{\mathcal{M}}, +_{\mathcal{M}}, \cdot_{\mathcal{M}})$ dobbiamo scegliere un intero z per la costante $0_{\mathcal{M}}$. Ma per qualsiasi intero z esiste un intero $z-1$ tale che $(z-1)+1 = z$ e quindi l'assioma (*iii*) non può essere soddisfatto.

2 punti