Formula di Bernoulli

Gianluigi Bellin

December 15, 2010

Formula di Bernoulli.

Supponiamo un evento abbia probabilità p.

La probabilità $P_n(k)$ che su n prove ci siano k accadimenti dell'evento è data dalla formula

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \, p^k \cdot (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

Vogliamo sapere il valore k per cui la probalilità $P_n(k)$ è massima (*valore più probabile*).

Studiamo l'andamento della funzione $P_n(k)$ alla crescita di k e consideriamo $\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)} =$

$$= \quad \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} \cdot \frac{p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{p^k(1-p)^{n-k}}$$

$$= \quad \frac{n-k}{k+1} \, \frac{p}{1-p} \qquad \text{da cui segue}$$

$$\begin{aligned} P_n(k+1) \geq P_n(k) \ \text{ sse } & \quad \frac{n-k}{k+1} \, \frac{p}{1-p} > 1 \\ \text{sse } & \quad (n-k) \cdot p \geq (k+1) \cdot (1-p) \\ \text{sse } & \quad np + p - 1 \geq k. \end{aligned}$$

e similmente

$$P_n(k+1) \leq P_n(k) \quad \text{sse} \quad np+p-1 \leq k. \quad (2)$$

Dunque finché k cresce, ma non raggiunge $np+p-1$, abbiamo $P_n(k+1) > P_n(k)$; poi per $k > np+p-1$ abbiamo $P_n(k+1) < P_n(k)$.

Sia k_0 il "valore più probabile di k"; allora

$$\begin{array}{lll} P_n(k_0-1) \leq P_n(k_0) & \text{da cui} & k_0 \leq np+p; \\ P_n(k_0+1) \leq P_n(k_0) & \text{da cui} & k_0 \geq np+p-1; \end{array}$$

Da ciò segue

$$p + \frac{p-1}{n} \leq \frac{k_0}{n} \leq p + \frac{p}{n}$$

Dunque per n molto grande k_0 è grande, ma $p-1/n$ e p/n sono arbitrariamente piccoli.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{n} = p \qquad (3)$$

Teorema di Bernoulli

Per ogni ϵ positivo arbitrariamente piccolo

$$\lim_{n \to \infty} P(|k - np| > \epsilon n) = 0$$