Logica Computazionale 2009 - Sequenti e Deduzione Naturale

Gianluigi Bellin

November 24, 2009

Complementi per la soluzione dell'esercizio 3, Compito 4.

1 Nozioni Preliminari

Consideriamo il calcolo dei sequenti $\mathbf{LJ}^{\to}$ per la logica proposizionale intuizionaitica nella forma data in Table 1.
Le regole di inferenza del calcolo di Deduzione Naturale $\mathbf{NJ}^{\to}$ per la logica proposizionale intuizionistica sono riportate in Table 2.
Definizione. Sia un albero $\mathcal{D}$ una derivazione in deduzione naturale $\mathbf{NJ}^{\to}$ con radice A e tale che tutte le assunzioni non scaricate in $\mathcal{D}$ compaiano in Γ. Allora diciamo che A è una derivazione di A da Γ in (in simboli $\Gamma \vdash_{\mathbf{NJ}^{\to}} A$).

1.0.1 Esempi

Si noti che la definizione non richiede che *tutte* le formule in Γ compaiano in qualche foglia di $\mathcal{D}$: per esempio, il seguente albero è una derivazione $C_1, \ldots, C_p \vdash (A \to (B \to A)$

$$(1)\ \dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{[A]}}{B \to A}\ \to\text{-I}}{A \to (B \to A)}\ \to\text{-I}$$

Qui le formule $C_1, \ldots, C_p$ non compaiono nella deduzione e non sono scaricate; la formula B non compare come etichetta di un arco nella deduzione $\mathcal{D}$ ma è scaricata nella prima inferenza $\to$-I; la classe di assunzioni scaricate nella seconda inferenza contiene una unicafoglia etichettata A.

assioma logico:

$$A \Rightarrow A$$

Cut:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad A, \Delta \Rightarrow C}{\Gamma, \Delta \Rightarrow C}$$

regole strutturali

$$\dfrac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow C}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow C}\text{Exc-L} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C}\text{Weak L} \qquad \dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C}\text{Ctr L}$$

regole logiche

$\bot$-*axiom:*

$$\bot, \Gamma \Rightarrow C$$

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}\to\text{-R} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad B\Pi \Rightarrow C}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow C}\to\text{-L}$$

Table 1: Calcolo dei Sequenti $\mathbf{LJ}^{\to}$

$$\to\text{-I}\,\dfrac{\to\text{-E}\,\dfrac{\to\text{-E}\,\dfrac{\overset{(2)}{A \to (B \to C)} \qquad \overset{(1)}{[A]}}{B \to C} \qquad \to\text{-E}\,\dfrac{\dfrac{(3)}{A \to B} \qquad \overset{(1)}{[A]}}{B}}{C}}{A \to C}\,(1)$$

Questo albero di deduzione giustifica l'asserzione che $A \to C$ derivi da $A \to (B \to C)$ e $A \to B$ e da ogni altro insieme di assunzioni *vacue*, in simboli

$$\Gamma, A \to (B \to C), A \to B \vdash_{\mathbf{NJ}^{\to}} A \to C$$

Qui vi sono *due foglie* nella classe di assunzioni (1), che viene scaricata nell'ultima inferenza di $\mathcal{D}$, che è appunto una $\to$-I.

1.1 Redex e riduzioni

Definizione. Un *redex* è una sottoderivazione che termina con una $\to$-E la cui *premessa maggiore* sia conclusione di una $\to$-I, cioè una figura di prova come segue:

assunzione:

$$A$$

introduzione

$$\cfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B}\ \to\text{-I}$$

Nell'infereza $\to$-I l'espressione $[A]$ denota una *classe di assunzioni* (cioè un insieme di foglie etichettate A, una, molte o nessuna) che vengono *scaricate* precisamente nell'inferenza in questione.

eliminazione

$$\cfrac{A \to B \qquad A}{B}\ \to\text{-E}$$

Nell'inferenza $\to$-E la premessa $A \to B$ è detta *premessa maggiore* e la premessa B è detta la *premessa minore*; qui termina un *ramo di Prawitz* di altezza *minore* di quella del ramo in cui c'è B.

Table 2: Deduzione Naturale $\mathbf{NJ}^{\to}$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ d_1\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A \to B}\,{\to}\text{-I} \qquad \begin{matrix}d_0\\ \vdots\\ A\end{matrix}}{B}\,{\to}\text{-E}$$

Un *redex* si riduce

- sostituendo ogni foglia nella *classe di assunzioni* $[A]$ con una copia della derivazione d_0, cioè identificando una tale foglia A con la conclusione di una copia di d_0;
- cancellando (l'arco etichettato con) la *formula massimale* $A \to B$;
- identificando la premessa della inferenza →-I con la conclusione dell'inferenza →-E, che è la radice del redex:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ d_0\\ [A]\end{matrix}}{\begin{matrix}\vdots\\ d_1\\ B\end{matrix}}$$

Definizione. Una derivazione $\mathcal{D}$ in $\mathbf{NJ}^{\to}$ è in *forma normale* se nessun sottoalbero di $\mathcal{D}$ ùn redex.

2 Struttura delle deduzioni normali in $\mathbf{NJ}^{\to}$

Ogni derivazione in deduzione naturale $\mathbf{NJ}^{\to}$ è un albero costituito di "rami di Prawitz" definiti come segue.
Definizione. Un *ramo di Prawitz* ρ in una deduzione $\mathcal{D}$ è un ramo

$$\rho = X_1, X_2, \ldots^{(parte\ d'elim.)} \ldots X_m \ldots^{(parte\ d'introd.)} \ldots X_{n-1}, X_n$$

dove

- X_1 è una assunzione; inoltre per X_n abbiamo due possibilità:
  (i) X_n ̀la conclusione di $\mathcal{D}$; in questo caso ρ ha altezza zero;

(ii) X_n è *premessa minore* di una $\rightarrow$-E la cui premessa maggiore e la cui conclusione si trovano in un ramo ρ' di altezza k; allora il ramo ρ ha atezza $k+1$;

- per tutti gli i con $1 \leq i < m$ X_i è *premessa maggiore* di una regola d'eliminazione con conclusione X_{i+1} (*parte d'eliminazione*);

- per tutti i j con $m \leq j < n$ X_i è *premessa* di una regola d'introduzione con conclusione X_{i+1} (*parte d'introduzione*).

Scriviamo $h(\rho)$ per l'altezza di un ramo di Prawitz ρ in $\mathcal{D}$

- $h(\rho) = 0$, se l'ultimo arco di ρ è la conclusione di $\mathcal{D}$;

- $h(\rho) = k+1$, se l'ultimo arco di ρ è premessa minore di una inferenza $\rightarrow$-E la cui premessa maggiore e conclusione si trovano in un ramo di Prawitz ρ' con $h(\rho') = k$.

Da questa descizione della stuttura dei rami di Prawitz si ricava facilmente la *proprietà della sottoformula*:

Teorema. *Sia $\mathcal{D}$ una derivazione di $\Gamma \vdash A$ in $\mathbf{NJ}^{\rightarrow}$. Allora ogni formula X che compare in $\mathcal{D}$ è una sottoformula di A oppura di una formula in Γ.*

Dimostrazione. Per induzione sulla altezza di X.
Caso base $h(X) = 0$, cioè X appartiene al ramo finale ρ con $h(\rho) = 0$.

1. Supponiamo X appartenga alla *parte d'introduzione*, $X = X_j$ con $m \leq j \leq n$. Allora procediamo per induzione su per induzione su $n - j$. Se $n - j = 0$, cioè $n = j$, allora $X = X_n = A$, ed in questo caso non vi è nulla da dimostrare. Se $j < n$, allora X_j è premessa e X_{j+1} conclusione di una $\rightarrow$-I e dunque X_j è sottoformula di X_{j+1}, per ipotesi induttiva X_{j+1} è sottoformula di A e così anche X_j è sottoformula di A.

2. Supponiamo X appartenga alla *parte d'eliminazione* di ρ, $X = X_i$ con $1 \leq j \leq m$. Procediamo per induzione su j: se $j = 1$, allora $X = X_1$ può essere una assunzione *non scaricata* ed in questo caso X appartiene a Γ, oppure è *scaricata* in qualche punto della prova $\mathcal{D}$, ma *sotto* X. Ma X può essere scaricata solo da una inferenza $\rightarrow$-I, ed in questo caso X è antecedente della conclusione di questa inferenza che ha la forma $X \rightarrow Y$, per qualche Y. Ma allora $X \rightarrow Y$ appartiene alla *parte d'introduzione* e quindi per la parte 1. della prova $\rightarrow Y$ è sottoformula di A; dunque anche X è sottoformula di A, come dovevasi dimostrare.

Infine se $1 < j \leq m$, allora $X = X_j$ è conclusione di una $\rightarrow$-E la cui premessa maggiore è $X_{j-1} = (Y \rightarrow X)$, per qualche Y. Per ipotesi induttiva, $Y \rightarrow X$ è una sottoformula di X_1 e questa è sottoformula o di A o di una formula in Γ, come abbiamo appena dimostrato.

Passo induttivo. D'altra parte se X compare in un ramo ρ con $h(\rho) = k + 1$, per ipotesi induttiva il teorema vale per ogni arco in un ramo ρ' con $h(\rho') \leq k$. Allora l'argomento del caso base può essere ripetuto con le seguenti modificazioni.

1'. Supponiamo X appartenga alla *parte d'introduzione* di ρ: se $X = X_n$ è l'ultimo arco in ρ, allora X è *premessa minore* di una inferenza con premessa maggiore $X \rightarrow Y$ per qualche Y, e questa deve comparire in un ramo ρ' di altezza minore o uguale a k. Per ipotesi induttiva $X \rightarrow Y$ è sottoformula di A o di una formula in Γ e lo stesso vale per X. Nel caso in cui $X = X_j$ con $m \leq j < n$, l'argomento è lo stesso che nel caso 1.

2' Supponiamo che X appartenga alla *parte d'eliminazione* di ρ: se $X = X_1$ allora è sottoformula di una formula in Γ se è premessa non scaricata; se invece è scaricata, può esserlo solo nella parte d'introduzione di ρ o di un ramo ρ' di altezza minore di $h(\rho)$. Ma allora per ipotesi induttiva X è sottoformula o di A o di una formula in Γ. Infine se $X = X_i$ con $1 < i \leq m$, allora l'argomento del caso base si applica parola per parola.

3 Esempio di traduzione

La corrispondenza tra lambda termini tipati e deduzione naturale intuizionistica fa parte di un altro corso e la sua trattazione esula dal nostro ambito. Qui usiamo i lambda termini solo come annotazioni informali concettualmente suggestive per la trattazione del calcolo dei sequenti.

Consideriamo i lambda termini tipati

- $\mathbf{times} = \lambda n.\lambda m.\lambda f.(m)(n)f : \mathbf{N} \rightarrow (\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N})$ e
- $\mathbf{2} = \lambda f.\lambda x.(f)fx : \mathbf{N}$.

Otteniamo le due derivazioni seguenti:

$$\rightarrow\text{-I}\ \dfrac{\rightarrow\text{-I}\ \dfrac{\rightarrow\text{-I}\ \dfrac{\rightarrow\text{-E}\ \dfrac{\overset{(1)}{m:\mathbf{N}} \qquad \rightarrow\text{-E}\ \dfrac{\overset{(2)}{n:\mathbf{N}} \qquad \overset{(3)}{f:A\rightarrow A}}{nf:A\rightarrow A}}{(m)nf:A\rightarrow A}}{\lambda f.(m)nf:\mathbf{N}}}{\lambda n.\lambda f.(m)nf:\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}}}{\lambda m.\lambda n.\lambda f.(m)nf:\mathbf{N}\rightarrow(\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N})}$$

$$\rightarrow\text{-I}\ \dfrac{\rightarrow\text{-I}\ \dfrac{\rightarrow\text{-E}\ \dfrac{\overset{(1)}{f:A\rightarrow A} \qquad \rightarrow\text{-E}\ \dfrac{\overset{(1)}{f:A\rightarrow A} \qquad \overset{(2)}{x:A}}{(f)x:A}}{(f)(f)x:A\rightarrow A}\ (2)}{\lambda x.(f)fx:\mathbf{N}}\ (1)}{\lambda f.\lambda x.(f)(f)x:\mathbf{N}}$$

Le derivazioni in **NJ** sopra indicate corrispondono ai termini **times** e **2** del lambda calcolo. Il termine $\mathbf{t} = ((\mathbf{times})\mathbf{2})\mathbf{2} : \mathbf{N}$ rappresenta l'applicazione di **times** alla coppia di termini $< \mathbf{2}, \mathbf{2} >$. Come spiegato nel corso di Semantica, la *computazione* di questo termine risulta dal processo di normalizzazione (eliminazione di ogni redex). Qui siamo interessati alla traduzione in in **LJ** delle derivazioni in **NJ** e del processo corrispondente nel calcolo dei sequenti alla normalizzazione, che come vedremo ha caratteristiche non identificabili immediatamente con essa.

3.0.1 Traduzione di $\lambda n.\lambda m.\mathbf{times} : \mathbf{N} \rightarrow (\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N})$

Per induzione sulla lunghezza della deduzione. Le ultime tre inferenze sono introduzioni dell'implicazione →-I, che corrispondono a →-R. Il ramo di Prawitz più basso inizia con l'assunzione $m : (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$, che diventa la formula principale dell'inferenza →-L con premessa sinistra $n : \mathbf{N}, f : A \rightarrow A \Rightarrow nf : A \rightarrow A$ e premessa destra l'assioma $y : A \rightarrow A \Rightarrow y : A \rightarrow A$. Infine la premessa sinistra è derivata per →-L dagli assiomi $f : A \Rightarrow f : A$ e $z : A \Rightarrow z : A$. Dunque la derivazione desiderata $\Rightarrow [\lambda n.\lambda m.\mathbf{times}]^s : \mathbf{N} \rightarrow (\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N})$ è come segue:

$$\rightarrow\text{-R}\ \dfrac{\rightarrow\text{-R}\ \dfrac{\rightarrow\text{-R}\ \dfrac{\rightarrow\text{-L}\ \dfrac{\rightarrow\text{-L}\ \dfrac{f : A \rightarrow A \Rightarrow f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \qquad z : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \Rightarrow z : A \rightarrow A}{n : (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}), f : A \rightarrow A \Rightarrow (n)f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}} \qquad y : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \Rightarrow y : A \rightarrow A}{m : (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}), n : \mathbf{N}, f : A \rightarrow A \Rightarrow (m)(n)f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}}}{m : \mathbf{N}, n : \mathbf{N} \Rightarrow \lambda f.(m)(n)f : \mathbf{N}}}{m : \mathbf{N} \Rightarrow \lambda n \lambda f.(m)(n)f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}}}{\Rightarrow \lambda m.\lambda n.\lambda f.(m)(n)f : \mathbf{N} \rightarrow (\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N})}$$

3.0.2 Traduzione di $\mathbf{2} : \mathbf{N}$

In modo simile otteniamo la traduzione $\mathbf{2}^s$ di $\mathbf{2} : (A \to A) \to (A \to A)$:

$$
\to\text{-R}\,\dfrac{\to\text{-R}\,\dfrac{\textbf{Contrazione}\,\dfrac{\to\text{-L}\,\dfrac{\to\text{-L}\,\dfrac{z : A \Rightarrow z : \mathbf{A} \qquad x : \mathbf{A} \Rightarrow x : A}{f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}, x : A \Rightarrow (f)x : \mathbf{A}} \qquad y : \mathbf{A} \Rightarrow y : A}{g : A \to A, f : A \to A, x : A \Rightarrow (g)(f)x : A}}{f : A \to A, x : A \Rightarrow (f)(f)x : A}}{f : A \to A \Rightarrow \lambda x.(f)(f)x : A \to A}}{\Rightarrow \lambda f.\lambda x.(f)(f)x : \mathbf{N}}
$$

3.0.3 Traduzione di $\mathbf{t} : \mathbf{N}$

Un problema molto diverso sorge nella traduzione di $((\mathbf{times})\mathbf{2})\mathbf{2} : \mathbf{N}$. Chiaramente $\mathbf{t}$ *non è un termine in forma normale*: $\mathbf{times} = \lambda m.\lambda n.\lambda f.(m)(n)f$ è applicato al termine $\mathbf{2}$, quindi $(\mathbf{times})\mathbf{2}$ è un redex; in effetti è l'unico redex presente, perchè $\mathbf{t}$ stesso non è un redex. Consideriamo allora la derivazione $\mathcal{D}$ *in forma normale*

$$
\to\text{-L}\,\dfrac{\to\text{-L}\,\dfrac{g : \mathbf{N} \to (\mathbf{N} \to \mathbf{N}) \qquad \mathbf{2} : \mathbf{N}}{(g)\mathbf{2} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}} \qquad \mathbf{2} : \mathbf{N}}{((g)\mathbf{2})\mathbf{2} : \mathbf{N}}
$$

Possiamo tradurre $\mathcal{D}$ nel calcolo dei sequenti secondo l'algoritmo per le derivazioni in forma normale di $\mathbf{NJ}^{\to}$. Il ramo più basso di $\mathcal{D}$ consiste della sola parte di eliminazione, e la sua foglia è $g : \mathbf{N} \to (\mathbf{N} \to \mathbf{N})$: dunque l'*ultima* inferenza di $\mathcal{D}^s$ sarà una $\to$-L con formula principale $\mathbf{N} \to (\mathbf{N} \to \mathbf{N})$. La sua premessa sinistra è $\Rightarrow \mathbf{2}^s : \mathbf{N}$, la traduzione in $\mathbf{LJ}^{\to}$ della derivazione normale $\mathbf{2} : \mathbf{N}$; la premessa destra è un assioma $y : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.

Per ipotesi induttiva la traduzione della sottoderivazione

$$
\to\text{-L}\,\dfrac{(g)\mathbf{2} : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \qquad \mathbf{2} : \mathbf{N}}{((g)\in)\in : \mathcal{N}}
$$

è

$$
\to\text{-L}\,\dfrac{\Rightarrow \mathbf{2}^s : \mathbf{N} \qquad z : \mathbf{N} \Rightarrow z : \mathbf{N}}{f : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \Rightarrow [(f)\mathbf{2}]^s : \mathbf{N}}
$$

e dunque $\mathcal{D}^s$ è come segue

$$
\dfrac{\Rightarrow \mathbf{2}^s : \mathbf{N} \qquad \dfrac{\Rightarrow \mathbf{2}^s : \mathbf{N} \qquad z : \mathbf{N} \Rightarrow z : \mathbf{N}}{f : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \Rightarrow [(f)\mathbf{2}]^s : \mathbf{N}}}{g : \mathbf{N} \to (\mathbf{N} \to \mathbf{N}) \Rightarrow [((g)\mathbf{2})\mathbf{2}]^s : \mathbf{N}}
$$

Ma qual è il meccanismo che consente di creare una *interazione* tra la funzione **times**, rappresentata dalla derivazione $\Rightarrow [\lambda n.\lambda m.\mathbf{times}]^s : \mathbf{N} \to (\mathbf{N} \to \mathbf{N})$ ed i suoi argomenti? Nel calcolo dei sequenti, l'interazione è regolata dalla regola *cut*:

$$\mathbf{cut}\ \frac{\Rightarrow [\lambda n.\lambda m.\mathbf{times}]^s : \mathbf{N} \to (\mathbf{N} \to \mathbf{N}) \qquad g : \mathbf{N} \to (\mathbf{N} \to \mathbf{N}) \Rightarrow [((g)\mathbf{2})\mathbf{2}]^s : \mathbf{N}}{\Rightarrow [((\lambda n.\lambda m.\mathbf{times})\mathbf{2})\mathbf{2}]^s : \mathbf{N}}$$

4 Interazione in logica classica

Le proprietà dell'interazione nel calcolo dei sequenti per la logica classica presentano interessanti fenomeni, come la *non confluenza*, che non compaiono nella logica intuizionistica. L'esempio forse più semplice, publicato da Danos ed altri, è il seguente.

$$\mathbf{cut}\ \dfrac{\mathbf{Contr}\text{-R}\ \dfrac{\vee\text{-L}\ \dfrac{A \Rightarrow A \qquad A \Rightarrow A}{A \vee A \Rightarrow A, A}}{A \vee A \Rightarrow A} \qquad \mathbf{Contr}\text{-L}\ \dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A \wedge A}\ \wedge\text{-R}}{A \Rightarrow A \wedge A}}{A \vee A \Rightarrow A \wedge A}$$

Come si è visto in classe, possiamo interpretare la eliminazione del *cut* come un processo di sostituzione per la derivazione d_1 di $A \vee A \Rightarrow A$ per la formula A nella derivazione d_2 di $A \Rightarrow A \wedge A$; in effetti formula A ha la stessa funzione di una assunzione, e possiamo pensare che il processo di computazione proceda appunto con una sostituzione della derivazione d_1 per A in d_2. Sia d_3 il risultato del processo di eliminazione del *cut*; si verifichi che in questo caso d_3 ha la forma seguente:

$$\mathbf{Contr}\text{-L}\ \dfrac{\wedge\text{-R}\ \dfrac{\mathbf{Contr}\text{-R}\ \dfrac{\vee\text{-L}\ \dfrac{A \Rightarrow A \qquad A \Rightarrow A}{A \vee A \Rightarrow A, A}}{A \vee A \Rightarrow A} \qquad \mathbf{Contr}\text{-R}\ \dfrac{\vee\text{-L}\ \dfrac{A \Rightarrow A \qquad A \Rightarrow A}{A \vee A \Rightarrow A, A}}{A \vee A \Rightarrow A}}{A \vee A, A \vee A \Rightarrow A \wedge A}}{A \vee A \Rightarrow A \wedge A}$$

Ma possiamo anche pensare la eliminazione del *cut* come un processo di sostituzione della derivazione d_2 di $A \Rightarrow A \wedge A$ per la formula A nella derivazione d_1 di $A \vee A \Rightarrow A$; ma ora la formula A ha la stessa funzione di una *conclusione* in deduzione naturale, e possiamo pensare che il processo di computazione proceda appunto con una sostituzione della derivazione d_2 per A in d_1. Si verifichi che in questo caso il risultato d_4 del processo di eliminazione del *cut* è il seguente:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\LeftLabel{$\wedge$-R}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow A \wedge A$}
\LeftLabel{$\mathbf{Contr}$-L}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A \wedge A$}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\LeftLabel{$\wedge$-R}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow A \wedge A$}
\RightLabel{$\mathbf{Contr}$-L}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A \wedge A$}
\LeftLabel{$\vee$-L}
\BinaryInfC{$A \vee A \Rightarrow A \wedge A, A \wedge A$}
\LeftLabel{$\mathbf{Contr}$-R}
\UnaryInfC{$A \vee A \Rightarrow A \wedge A$}
\end{prooftree}
$$

È chiaramente impossibile trasformare d_3 in d_4 o viceversa usando la cut-eliminazione: infatti d_3 e d_4 sono in forma normale. Dunque il processo di eliminazione del cut in logica classica non ha pa proprietà della *confluenza*:

> (Confluenza): *Se d si riduce a d_1 ed a d_2 per eliminazione del cut, allora esistono d_3 tale chi d_1 e d_2 si riducono a d_3 per eliminazione del cut.*