Logica Computazionale 2009-2010

Gianluigi Bellin

24 febbraio 2010

1 Domanda 1

Si consideri il sequente S

$$(p \to q) \to p \Rightarrow (p \to q) \to q$$

(i) Si applichi la procedura semantic tableaux per verificare se S sia valido o falsificabile nella logica classica.

punti 1

Una possibile soluzione:

$$\dfrac{\dfrac{p \to q \Rightarrow q, p \to q}{\Rightarrow (p \to q) \to q, p \to q}\ \to\text{-R} \qquad \dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p \qquad q \Rightarrow q}{p, \mathbf{p} \to \mathbf{q} \Rightarrow q}\ \to\text{-L}}{p \Rightarrow (p \to q) \to q}\ \to\text{-R}}{(\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to \mathbf{p} \Rightarrow (p \to q) \to q}\ \to\text{-L}$$

(ii) Si trovi una deduzione normale d di $(p \to q) \to q$ dall'assunzione $(p \to q) \to p$ nel sistema di deduzione naturale intuizionistico $\mathbf{NJ}^{\to}$.

punti 1

$$(1)\ \dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{\mathbf{p} \to \mathbf{q}} \qquad \dfrac{(\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to \mathbf{p} \qquad \overset{(1)}{p \to q}}{p}\ \to\text{-E}^{\ (I)}}{q}\ \to\text{-E}^{\ (II)}}{(p \to q) \to q}\ \to\text{-I}$$

Nota: Sono segnati in grassetto le premesse maggiori delle due inferenze $\to$-E $^{(I)}$ ed $\to$-E $^{(II)}$, corrisponenti alle inferenze $\to$-L $^{(I)}$ e $\to$-L $^{(II)}$ nelle derivazioni qui sotto.

(iii) Si costruisca una derivazione senza taglio del sequente S nel calcolo dei sequenti intuizionistico $\mathbf{LJ}^{\to}$.

punti 1

Due derivazioni in $\mathbf{LJ}^{\rightarrow}$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q
    \qquad
    \dfrac{p \Rightarrow p \qquad q \Rightarrow q}{p, \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \Rightarrow q}\ \rightarrow\text{-L}\ ^{(II)}
  }{(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p}, p \rightarrow q, p \rightarrow q \Rightarrow q}\ \rightarrow\text{-L}\ ^{(I)}
}{
  \dfrac{(p \rightarrow q) \rightarrow p, p \rightarrow q \Rightarrow q}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q}\ \rightarrow\text{-R}
}\ contr
$$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q \qquad p \Rightarrow p}{(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p}, p \rightarrow q \Rightarrow p}\ \rightarrow\text{-L}\ ^{(I)}
    \qquad q \Rightarrow q
  }{(p \rightarrow q) \rightarrow p, \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}, p \rightarrow q \Rightarrow q}\ \rightarrow\text{-L}\ ^{(II)}
}{
  \dfrac{(p \rightarrow q) \rightarrow p, p \rightarrow q \Rightarrow q}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q}\ \rightarrow\text{-R}
}\ contr
$$

(iv) Quante derivazioni $\mathcal{D}$ senza taglio del sequente S in $\mathbf{LJ}^{\rightarrow}$ vi sono tali che $\mathcal{D} \mapsto d$ (secondo la mappa standard suriettiva tra deduzioni $\mathbf{LJ}^{\rightarrow} \rightarrow \mathbf{NJ}^{\rightarrow}$)?

punti 1

Risposta: Solo le due scritte qui sopra. Si faccia attenzione al fatto che la derivazione scritta in risposta alla parte (i) **non è** intuizionistica, perché contiene sequenti con più di una formula nel succedente (a destra di $\Rightarrow$).

2 Domanda 2

Si consideri il sequente

$$S_1 : \qquad \Rightarrow \exists x.(\exists y.A(y) \rightarrow A(x)).$$

Si applichi la procedura semantic tableaux per verificare se S_1 sia valido nel calcolo dei predicati del primo ordine per la logica classica.

punti 1

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}; \exists y.A(y), \overline{A(\mathbf{a_1}) \Rightarrow A(\mathbf{a_1})}, F, A(\mathbf{a_0})}{\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}; A(\mathbf{a_1}) \Rightarrow (\exists y.A(y)) \rightarrow A(\mathbf{a_1}), F, A(\mathbf{a_0})}\ \rightarrow\text{-R}
      }{\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}; A(\mathbf{a_1}) \Rightarrow \exists x.(\exists y.A(y)) \rightarrow A(x), A(\mathbf{a_0})}\ \exists\text{-R}
    }{\mathbf{a_0}; \exists y.A(y) \Rightarrow F, A(\mathbf{a_0})}\ \exists\text{-L}
  }{\mathbf{a_0}; \Rightarrow (\exists y.A(y)) \rightarrow A(\mathbf{a_0}), F}\ \rightarrow\text{-R}
}{\mathbf{a_0}; \Rightarrow \exists x.(\exists y.A(y)) \rightarrow A(x)}\ \exists\text{-R}
$$

dove scriviamo F per $\exists x.(\exists y.A(y)) \rightarrow A(x)$

3 Domanda 3

(i) Si consideri il sequente S_2 per la logica modale:

$$S_2 : \quad \Rightarrow \Diamond p, \Diamond\neg p$$

Si applichi la procedura semantic tableaux per la logica **K** per decidere se S_2 sia valido o falsificabile in **K**.

punti 1

(ii) Se S_2 è falsificabile in **K**, si costruisca un Modello di Kripke $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ che lo falsifica.

punti 1

(iii) Si applichi la procedura semantic tableaux per la logica **KD** per decidere se S_2 sia valido o falsificabile in **KD**.

punti 1

Nota: Sulla logica **KD** si leggano le dispense pagine 19-22.

4 Domanda 4

4.1 Un frammento della logica temporale

Si consideri il linguaggio della logica temporale **LTL** ristretto alla grammatica

$$A \quad := \quad p \mid \neg p \mid \bot \mid \top \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \circ A \mid \Box A \mid \Diamond A$$

Si considerino le seguenti regole di **LTL**.

$$\begin{array}{cc}
\textbf{assioma} & \textbf{assioma} \\
\Rightarrow p, \neg p, \Delta & \Rightarrow \top, \Delta \\[1em]
\dfrac{\Rightarrow \Gamma, \phi \qquad \Rightarrow \Gamma, \psi}{\Rightarrow \Gamma, \phi \wedge \psi}\ \wedge & \dfrac{\Rightarrow \Gamma, \phi, \psi}{\Rightarrow \Gamma, \phi \vee \psi}\ \vee \\[1em]
\dfrac{\Rightarrow \phi_1, \ldots, \phi_n}{\Rightarrow \pm p_1, \ldots \pm p_m, \circ\phi_1, \ldots, \circ\phi_n}\ \mathit{next} & \\[1em]
\dfrac{\Rightarrow \Gamma, \phi \vee \circ\Diamond\phi}{\Rightarrow \Gamma, \Diamond\phi}\ \Diamond\text{-exp} & \dfrac{\Rightarrow \Gamma, \phi \wedge \circ\Box\phi}{\Rightarrow \Gamma, \Box\phi}\ \Box\text{-exp}
\end{array}$$

Le regole indicate sono corrette rispetto alla semantica della logica **LTL** del tempo futuro lineare e si applicano in una procedura semantic tableaux nel modo familiare, anche se tale procedura non è completa (occorrono altre regole per $\Box$).

4.2 Domande

Si considerino i sequenti S_3 ed S_4 come espressioni della logica temporale **LTL**:

$$S_3 : \quad \Rightarrow \Box p, \Box\neg p \qquad S_4 : \quad \Rightarrow \Diamond p, \Diamond\neg p$$

Si applichi la procedure sopra descritta per verificare se S_3 ed S_4 sono validi o falsificabili. Se un sequente è falsificabile, si contruisca un modello lineare $\mathcal{M} : (\mathbf{N}, \mathcal{V})$ con $\mathcal{V} : \mathbf{N} \to 2^{\mathbf{Prop}}$ che lo falsifica.

2 punti

Nota: Consideriamo il caso di S_3. Intuitivamente, asserisce che o vale sempre p o sempre $\neg p$, e questo è certamente refutabile: basta un modello lineare in cui il valore assegnato a p cambi ad un certo punto, diciamo $\mathcal{V}(i,p) = V$ e $\mathcal{V}(n,p) = F$, per ogni $i < n$ (o viceversa).

Applichiamo ora la procedura *semantic tableaux* fermandoci nella ricerca su un ramo qualora si incontri un sequente *chiuso*, o un sequente *aperto* ma non analizzabile ulteriormente o si verifichi un *loop* rispetto ad un sequente sottostante.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{chiuso}}{\Rightarrow p, \neg p} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{aperto}}{\Rightarrow \neg p} \qquad \dfrac{\overset{\text{loop}}{\Rightarrow \Box\neg p}}{\Rightarrow \circ\Box\neg \mathbf{p}}\,\textbf{next}}{\Rightarrow \neg p \wedge \circ\Box\neg p}}{\Rightarrow \Box\neg p}\,exp}{\Rightarrow p, \circ\Box\neg\mathbf{p}}\,\textbf{next}}{\Rightarrow p, \neg p \wedge \circ\Box\neg p}}{\Rightarrow p, \Box\neg p}\,exp \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{aperto}}{\Rightarrow p} \qquad \dfrac{\overset{\text{loop}}{\Rightarrow \Box p}}{\Rightarrow \circ\Box\mathbf{p}}\,\textbf{next}}{\Rightarrow p\wedge\circ\Box p}\,\wedge\text{-R}}{\Rightarrow \Box p}\,exp}{\Rightarrow \circ\Box\mathbf{p}, \neg p}\,\textbf{next} \qquad \dfrac{\overset{\text{loop}}{\Rightarrow \Box p, \Box\neg p}}{\Rightarrow \circ\Box\mathbf{p}, \circ\Box\neg\mathbf{p}}\,\textbf{next}}{\Rightarrow \circ\Box p, \neg p \wedge \circ\Box\neg p}\,\wedge\text{-R}}{\Rightarrow \circ\Box p, \Box\neg p}\,exp}{\Rightarrow p\wedge\circ\Box p, \Box\neg p}\,\wedge\text{-R}}{\Box p, \Box\neg p}\,exp$$

Si noti che a parte le espansioni delle formule $\Box p$ e $\Box\neg p$, che possiamo considerare come applicazioni di assiomi speciali, la procedura *semantic tableaux* procede nella logica proposizionale *eccetto* per la regola **next**, che assomiglia alla regola **KR** ma applica l'operatore $\circ$ a parecchie formule nel succedente (a destra di $\Rightarrow$).

Pertanto ogni ramo che termina in un sequente aperto può essere visto associato ad un contro-modello. Per esempio, si consideri il primo sequente aperto nella figura, cioè $\Rightarrow \neg p$. Se questo sequente è visto come termine di un ramo che procede direttamente dal sequente finale, allora vediamo che esso attraversa *solo una* regola **next**, al di sotto della quale si trova un sequente $\Rightarrow p, \Box\neg p$. Associamo dunque a questo ramo un contromodello $(\mathbf{N}, \mathcal{V})$ con $\mathcal{V} : 2^{\mathbf{Prop}}$ tale che $\mathcal{V}(1, p) = F$ e $\mathcal{V}(2, p) = V$.

Se invece consideriamo il sequente $\Rightarrow \neg p$ come termine di un ramo che parte dal sequente finale e passa cinque volte attraverso il loop determinato da $\Rightarrow \Box\neg p$, allora *sei* regole **next** sono attraversate ed il contromodello associato con questo ramo avrà $\mathcal{V}(1, p) = F$ e $\mathcal{V}(7, p) = V$.