Logica computazionale
(Laurea Specialistica)
Assegnamento 3

Giovanni Lovato
VR077231

12 novembre 2009

Esercizio 1

Regole modali per sequenti nella forma (†)

$$p_1, \ldots, p_k, \Diamond C_1, \ldots, \Diamond C_m, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box D_n, \Diamond\Delta, q_1, \ldots, q_l$$

Per definizione, $\Diamond A = \neg\Box\neg A$.

(a) Logica **K**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}\,\neg\text{-R}}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow \neg A}\,\neg\text{-L}}{\Box\neg\Delta, \Box\Gamma \Rightarrow \Box\neg A}\,\mathbf{KR}}{\Box\Gamma \Rightarrow \neg\Box\neg\Delta, \Box\neg A}\,\neg\text{-R}}{\neg\Box\neg A, \Box\Gamma \Rightarrow \neg\Box\neg\Delta}\,\neg\text{-L}}{\Diamond A, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\textit{per def.}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow A}\,\neg\text{-L}}{\Box\neg\Delta, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\,\mathbf{KR}}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \neg\Box\neg\Delta}\,\neg\text{-R}}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Diamond\Delta}\,\textit{per def.}$$

Regola derivata:

$$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Diamond A, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\mathbf{KR'} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Diamond\Delta}\,\mathbf{KR'}$$

Applicata al sequente (†):

$$\dfrac{\dfrac{C_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Diamond C_1, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\mathbf{KR'} \quad \ldots \quad \dfrac{C_m, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Diamond C_m, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\mathbf{KR'} \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow D_1, \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \Diamond\Delta}\,\mathbf{KR'} \quad \ldots \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow D_n, \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_n, \Diamond\Delta}\,\mathbf{KR'}}{p_1, \ldots, p_k, \Diamond C_1, \ldots, \Diamond C_m, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box D_n, \Diamond\Delta, q_1, \ldots, q_l}$$

(b) Logica **KD**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\Delta, \Gamma \Rightarrow}\,\neg\text{-L}}{\Box\neg\Delta, \Box\Gamma \Rightarrow}\,\mathbf{KDR}}{\Box\Gamma \Rightarrow \neg\Box\neg\Delta}\,\neg\text{-R}}{\Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\textit{per def.}$$

Regola derivata:

$$\mathbf{KDR'} = \mathbf{KR'} + \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}$$

Applicata al sequente (†):

$$\dfrac{\dfrac{C_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Diamond C_1, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\mathbf{KDR'} \quad \dots \quad \dfrac{C_m, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Diamond C_m, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\mathbf{KDR'} \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\mathbf{KDR'} \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow D_1, \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \Diamond\Delta}\,\mathbf{KDR'} \quad \dots \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow D_n, \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_n, \Diamond\Delta}\,\mathbf{KDR'}}{p_1, \dots, p_k, \Diamond C_1, \dots, \Diamond C_m, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \dots, \Box D_n, \Diamond\Delta, q_1, \dots, q_l}$$

(c) Logica **K4**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow \Delta, \Diamond\Delta}{A, \Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\Box\neg\Delta}\,\textit{per def.}}{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta, \neg\Box\neg\Delta}\,\neg\text{-R}}{\neg\Box\neg\Delta, \Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}\,\neg\text{-L}}{\neg\Delta, \Box\neg\Delta, \Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow \neg A}\,\neg\text{-L}}{\Box\neg\Delta, \Box\Gamma \Rightarrow \Box\neg A}\,\mathbf{K4R}}{\Box\Gamma \Rightarrow \neg\Box\neg\Delta, \Box\neg A}\,\neg\text{-R}}{\neg\Box\neg A, \Box\Gamma \Rightarrow \neg\Box\neg\Delta}\,\neg\text{-L}}{\Diamond A, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\textit{per def.}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Box\Gamma, \Rightarrow A, \Delta, \Diamond\Delta}{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A, \Delta, \neg\Box\neg\Delta}\,\textit{per def.}}{\Box\neg\Delta, \Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A, \Delta}\,\neg\text{-L}}{\neg\Delta, \Box\neg\Delta, \Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A}\,\neg\text{-L}}{\Box\neg\Delta, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\,\mathbf{K4R}}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \neg\Box\neg\Delta}\,\neg\text{-R}}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Diamond\Delta}\,\textit{per def.}$$

Regola derivata:

$$\dfrac{A, \Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow \Delta, \Diamond\Delta}{\Diamond A, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\mathbf{K4R'} \qquad \dfrac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A, \Delta, \Diamond\Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Diamond\Delta}\,\mathbf{K4R'}$$

Applicata al sequente (†):

$$\dfrac{\dfrac{C_1, \Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow \Delta, \Diamond\Delta}{\Diamond C_1, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\mathbf{K4R'} \quad \dots \quad \dfrac{C_m, \Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow \Delta, \Diamond\Delta}{\Diamond C_m, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\mathbf{K4R'} \quad \dfrac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow D_1, \Delta, \Diamond\Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \Diamond\Delta}\,\mathbf{K4R'} \quad \dots \quad \dfrac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow D_n, \Delta, \Diamond\Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_n, \Diamond\Delta}\,\mathbf{K4R'}}{p_1, \dots, p_k, \Diamond C_1, \dots, \Diamond C_m, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \dots, \Box D_n, \Diamond\Delta, q_1, \dots, q_l}$$

(d) Logica **S4**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}{A, \Box\Gamma \Rightarrow \neg\Box\neg\Delta}\,\textit{per def.}}{\Box\Gamma \Rightarrow \neg\Box\neg\Delta, \neg A}\,\neg\text{-R}}{\Box\Gamma \Rightarrow \neg\Box\neg\Delta, \Box\neg A}\,\Box\text{-R}}{\neg\Box\neg A, \Box\Gamma \Rightarrow \neg\Box\neg\Delta}\,\neg\text{-L}}{\Diamond A, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\textit{per def.}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta, \Diamond\Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta, \neg\Box\neg\Delta}\,\textit{per def.}}{\Box\neg\Delta, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta}\,\neg\text{-L}}{\neg\Delta, \Box\neg\Delta, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\,\neg\text{-L}}{\Box\neg\Delta, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\,\Box\text{-L}}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \neg\Box\neg\Delta}\,\neg\text{-R}}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Diamond\Delta}\,\textit{per def.}$$

Regola derivata:

$$\dfrac{A, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}{\Diamond A, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\Diamond\text{-L} \qquad \dfrac{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta, \Diamond\Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Diamond\Delta}\,\Diamond\text{-R}$$

Applicata al sequente (†):

$$\dfrac{\dfrac{C_1, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}{\Diamond C_1, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\Diamond\text{-L} \quad \dots \quad \dfrac{C_m, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}{\Diamond C_m, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Delta}\,\Diamond\text{-L} \quad \dfrac{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \Delta, \Diamond\Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \Diamond\Delta}\,\Diamond\text{-R} \quad \dots \quad \dfrac{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_n, \Delta, \Diamond\Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_n, \Diamond\Delta}\,\Diamond\text{-R}}{p_1, \dots, p_k, \Diamond C_1, \dots, \Diamond C_m, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \dots, \Box D_n, \Diamond\Delta, q_1, \dots, q_l}$$

Esercizio 2

(a) $(\Diamond A \to \Box B) \Rightarrow \Box(A \to B)$

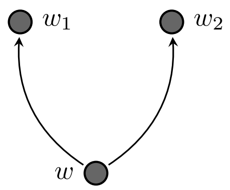
$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B, A}{A, \neg A \Rightarrow B}\ \neg\text{-L}}{\neg A \Rightarrow A \to B}\ \to\text{-R}}{\Box\neg A \Rightarrow \Box(A \to B)}\ \textbf{KR}}{\Rightarrow \neg\Box\neg A, \Box(A \to B)}\ \neg\text{-R}
\qquad
\dfrac{\dfrac{A, B \Rightarrow B}{B \Rightarrow A \to B}\ \to\text{-R}}{\Box B \Rightarrow \Box(A \to \Box B)}\ \textbf{KR}
}{
\dfrac{(\neg\Box\neg A \to \Box B) \Rightarrow \Box(A \to B)}{(\Diamond A \to \Box B) \Rightarrow \Box(A \to B)}
}\ \to\text{-L}
$$

(b) $\Box(A \to B) \Rightarrow (\Diamond A \to \Box B)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad A, B \Rightarrow}{A, A \to B \Rightarrow}\ \to\text{-L}}{A \to B \Rightarrow \neg A}\ \neg\text{-R}
\qquad
\dfrac{\Rightarrow B, A \qquad B \Rightarrow B}{A \to B \Rightarrow B}\ \to\text{-L}
}{\Box(A \to B) \Rightarrow \Box B, \Box\neg A}\ \textbf{KR}}{\neg\Box\neg A, \Box(A \to B) \Rightarrow \Box B)}\ \neg\text{-L}}{
\dfrac{\Box(A \to B) \Rightarrow (\neg\Box\neg A \to \Box B)}{\Box(A \to B) \Rightarrow (\Diamond A \to \Box B)}
}\ \to\text{-R}
$$

Il sequente è falsificato dal modello

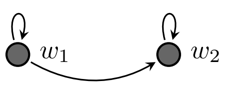
$$\mathcal{M} = (\{w, w_1, w_2\}, \{w_1 \sqsubseteq w, w_2 \sqsubseteq w\}, \{w_1 \Vdash A, w_1 \Vdash B, w_2 \nVdash A, w_2 \nVdash B\})$$



L'antecedente $\Box(A \to B)$ è vero in w perché $A \to B$ è vero sia in w_1 sia in w_2. Il succedente $\Diamond A \to \Box B$ è invece falso in w perché $\Diamond A$ è vero ($w_1 \Vdash A$) e $\Box B$ è falso ($w_2 \nVdash B$).

(c) Nella semantica di **S4**, il sequente $\Box(\Box(\Box A \to \Box B) \to \Box A) \Rightarrow \Box A$ può essere falsificato dal seguente modello:

$$\mathcal{M} = (\{w_1, w_2\}, \{w_2 \sqsubseteq w_1, w_1 \sqsubseteq w_1, w_2 \sqsubseteq w_2\}, \{w_1 \nVdash A, w_1 \Vdash B, w_2 \Vdash A, w_2 \nVdash B\})$$



In questo modello l'antecedente risulta vero in w_1, ovvero $\Box(\Box A \to \Box B) \to \Box A$ è vero in tutti i mondi accessibili da w_1:

- in w_1, $\Box(\Box A \to \Box B)$ è falso perché $w_2 \sqsubseteq w_1$ e in w_2 $\Box A \to \Box B$ è falso (w_2 accede solo a se stesso e $w_2 \Vdash A$ ma $w_2 \nVdash B$), quindi l'implicazione è vera;
- in w_2, $\Box A$ è vero perché w_2 accede solo a se stesso e forza A, quindi l'implicazione è vera.

Il succedente invece è falso in $\mathcal{M}$, perché $w_1 \sqsubseteq w_1$ e $w_1 \nVdash A$. Il modello quindi falsifica il sequente.

(d) $\Box(\Box(\Box A \to \Box B) \to \Box A) \to \Box\Diamond A$, con $S = \Box(\Box A \to \Box B) \to \Box A$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box S, A, \Box A \Rightarrow A, \Diamond A, \Box B$}
\RightLabel{$\Diamond$-R}
\UnaryInfC{$\Box S, A, \Box A \Rightarrow \Diamond A, \Box B$}
\RightLabel{$\Box$-L}
\UnaryInfC{$\Box S, \Box A \Rightarrow \Diamond A, \Box B$}
\RightLabel{$\to$-R}
\UnaryInfC{$\Box S \Rightarrow \Diamond A, \Box A \to \Box B$}
\RightLabel{$\Box$-R}
\UnaryInfC{$\Box S \Rightarrow \Diamond A, \Box(\Box A \to \Box B)$}
\AxiomC{$A, \Box A, \Box S \Rightarrow A, \Diamond A$}
\RightLabel{$\Diamond$-R}
\UnaryInfC{$A, \Box A, \Box S \Rightarrow \Diamond A$}
\RightLabel{$\Box$-L}
\UnaryInfC{$\Box A, \Box S \Rightarrow \Diamond A$}
\RightLabel{$\to$-L}
\BinaryInfC{$\Box(\Box A \to \Box B) \to \Box A, \Box S \Rightarrow \Diamond A$}
\RightLabel{$\Box$-L}
\UnaryInfC{$\Box S \Rightarrow \Diamond A$}
\RightLabel{$\Box$-R}
\UnaryInfC{$\Box S \Rightarrow \Box\Diamond A$}
\end{prooftree}
$$

Esercizio 3

Dato un modello di Kripke $(W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$, verificare che gli assiomi **D**

$$\Box A \to \Diamond A$$

e *transitività*

$$\Box A \to \Box\Box A$$

sono validi in $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ se e solo se $\mathcal{F}$ è transitiva e senza punti terminali.

- $\Box A \to \Diamond A$ è valida se e solo se $\mathcal{F}$ è senza punti terminali:

  $\Rightarrow$) per ipotesi **D** è valida. Consideriamo il modello

  $$\mathcal{M} = (\{w\}, \varnothing, w \Vdash A)$$

  in cui w è terminale. Allora $w \Vdash \Box A$, ovvero $\forall w'. w' \sqsubseteq w \to w' \Vdash A$, perché non esiste alcun w' e quindi l'implicazione è vera. Inoltre $w \nVdash \Diamond A$, ovvero $\exists w'. w' \sqsubseteq w \wedge w' \Vdash A$ è falsa perché non esiste alcun w'. L'ipotesi di validità di **D** è falsificata e da qui l'assurdo dimostra la tesi.

  $\Leftarrow$) per ipotesi la cornice $\mathcal{F}$ non ha mondi terminali. Se $w \Vdash \Box A$, $\forall w'. w' \sqsubseteq w \to w' \Vdash A$, quindi $\exists w'. w' \sqsubseteq w \wedge w' \Vdash A$.

- $\Box A \to \Box\Box A$ è valida se e solo se $\mathcal{F}$ è transitiva:

  $\Rightarrow$) per ipotesi l'assioma *transitività* è valido. Consideriamo $w, w', w'' \in W$ tali che $w'' \sqsubseteq w'$ e $w' \sqsubseteq w$ ma $w'' \not\sqsubseteq w$. Costruiamo un modello di Kripke $\mathcal{V}$ ponendo

  * $\mathcal{V}(w', P) = \mathbf{V}$, per ogni $w' \in W$ tale che $w' \sqsubseteq w$;
  * $\mathcal{V}(w'', P) = \mathbf{F}$;
  * $\mathcal{V}(w, P)$ arbitrario, per ogni w tale che $w' \neq w \neq w''$;
  * $\mathcal{V}(w, Q)$ arbitrario, per ogni w ed ogni $Q \neq P$.

  Allora $w \Vdash \Box P$ ma $w \nVdash \Box\Box P$, che falsifica l'ipotesi e da qui l'assurdo.

  $\Leftarrow$) per ipotesi $\mathcal{F}$ è transitiva. Dato $w \in W$, se $w \Vdash \Box A$ allora per ogni $w', w'' \in W$ tali che $w'' \sqsubseteq w'$ e $w' \sqsubseteq w$ per transitività abbiamo $w'' \sqsubseteq w$ e dunque $w'' \Vdash A$. Ne segue che $w' \Vdash \Box A$ e dunque $w \Vdash \Box\Box A$.