Logica computazionale
(Laurea Specialistica)
Assegnamento 1

Giovanni Lovato
VR077231

14 ottobre 2009

Esercizio 1

(a) $(A \to \neg B) \to (B \to A)$ è falsificabile nell'interpretazione I tale che $A_I = \mathbf{F}$ e $B_I = \mathbf{V}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\bigcirc}{B \Rightarrow A} \qquad \dfrac{\overset{\times}{B \Rightarrow A, B}}{\neg B, B \Rightarrow A}\,\neg\text{-L}}{(A \to \neg B), B \Rightarrow A}\,\to\text{-L}}{(A \to \neg B) \Rightarrow (B \to A)}\,\to\text{-R}}{\Rightarrow (A \to \neg B) \to (B \to A)}\,\to\text{-R}$$

(b) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ è valida.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{B, A \Rightarrow A}}{B \Rightarrow \neg A, A}\,\neg\text{-R} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{B, A \Rightarrow B}}{B \Rightarrow \neg A, B}\,\neg\text{-R}}{\neg B, B \Rightarrow \neg A}\,\neg\text{-L}}{(A \to \neg B), B \Rightarrow \neg A}\,\to\text{-L}}{(A \to \neg B) \Rightarrow (B \to \neg A)}\,\to\text{-R}}{\Rightarrow (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)}\,\to\text{-R}$$

(c) $((A \vee B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$ è valida.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{A \Rightarrow C, A, B}}{A \Rightarrow C, (A \vee B)}\,\vee\text{-R} \qquad \overset{\times}{C, A \Rightarrow C}}{(A \vee B) \to C, A \Rightarrow C}\,\to\text{-L}}{(A \vee B) \to C \Rightarrow (A \to C)}\,\to\text{-R} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{B \Rightarrow C, A, B}}{B \Rightarrow C, (A \vee B)}\,\vee\text{-R} \qquad \overset{\times}{C, B \to C}}{(A \vee B) \to C, B \Rightarrow C}\,\to\text{-L}}{(A \vee B) \to C \Rightarrow (B \to C)}\,\to\text{-R}}{((A \vee B) \to C) \Rightarrow ((A \to C) \wedge (B \to C))}\,\wedge\text{-R}}{\Rightarrow ((A \vee B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))}\,\to\text{-R}$$

(d) $((A \to B) \to A) \to A$ è valida.

\begin{prooftree}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$\Rightarrow$-R}
\UnaryInfC{$\Rightarrow A, A \to B$}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$\to$-L}
\BinaryInfC{$((A \to B) \to A) \Rightarrow A$}
\RightLabel{$\to$-R}
\UnaryInfC{$\Rightarrow ((A \to B) \to A) \to A$}
\end{prooftree}

(e) $((A \to \neg B) \to A) \to (\neg\neg A)$ è valida.

\begin{prooftree}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$A, B \Rightarrow A$}
\RightLabel{$\neg$-L}
\UnaryInfC{$\neg A, A, B \Rightarrow$}
\RightLabel{$\neg$-R}
\UnaryInfC{$\neg A, A \Rightarrow \neg B$}
\RightLabel{$\to$-R}
\UnaryInfC{$\neg A \Rightarrow (A \to \neg B)$}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$\neg$-L}
\UnaryInfC{$A, \neg A \Rightarrow$}
\RightLabel{$\to$-L}
\BinaryInfC{$((A \to \neg B) \to A), \neg A \Rightarrow$}
\RightLabel{$\neg$-R}
\UnaryInfC{$((A \to \neg B) \to A) \Rightarrow (\neg\neg A)$}
\RightLabel{$\to$-R}
\UnaryInfC{$\Rightarrow ((A \to \neg B) \to A) \to (\neg\neg A)$}
\end{prooftree}

Esercizio 2

(a) La regola *cut add*:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ \textit{cut add}$$

preserva la validità. Infatti perché le premesse siano valide, per ogni valutazione V esiste un $C \in \Gamma$ tale che $V(C) = \mathbf{F}$ oppure esiste un $D \in \Delta$ tale che $V(D) = \mathbf{V}$ e queste condizioni rendono valido per definizione il sequente conclusione. La valutazione di A è ininfluente, poiché se discriminasse la validità di una delle premesse renderebbe l'altra falsificabile: se $V(A) = \mathbf{V}$ fosse l'unica formula vera nel succedente della premessa $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ la renderebbe un assioma, ma lascierebbe falsificabile $A, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Analogalmente se $V(A) = \mathbf{F}$ fosse l'unica formula falsa nell'antecedente della premessa $A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ la renderebbe un assioma, ma lascierebbe falsificabile $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$.

La regola *cut add* è anche semanticamente invertibile. Infatti se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido, per ogni valutazione V esiste un $C \in \Gamma$ tale che $V(C) = \mathbf{F}$ oppure esiste un $D \in \Delta$ tale che $V(D) = \mathbf{V}$ e per la regola del *weakening* la validità è preservata in entrambe le premesse.

(b) La regola *cut mult*:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2}\ \textit{cut mult}$$

preserva la validità. Essendo presenti diversi contesti tra le premesse, la loro validità è ottenibile in diversi casi:

1. banalmente entrambe le premesse sono valide indipendentemente dalla valutazione di A, ovvero

$$((\exists C \in \Gamma_1.V(C) = \mathbf{F}) \vee (\exists D \in \Delta_1.V(D) = \mathbf{V})) \wedge \\ ((\exists C' \in \Gamma_2.V(C') = \mathbf{F}) \vee (\exists D' \in \Delta_2.V(D') = \mathbf{V})) \quad (1)$$

   e questa condizione è sufficiente per preservare la validità del sequente conclusione;

2. la valutazione di A è determinante per la valutazione della prima premessa, ovvero

$$((\forall C \in \Gamma_1.V(C) = \mathbf{V}) \wedge (\forall D \in \Delta_1.V(D) = \mathbf{F}) \wedge V(A) = \mathbf{V}) \wedge \\ ((\exists C' \in \Gamma_2.V(C') = \mathbf{F}) \vee (\exists D' \in \Delta_2.V(D') = \mathbf{V})) \quad (2)$$

   ma anche in questo caso la condizione di validità della seconda premessa è sufficiente per preservare la validità del sequente conclusione;

3. analogalmente se la valutazione di A è determinante per la valutazione della seconda premessa

$$((\exists C \in \Gamma_1.V(C) = \mathbf{F}) \vee (\exists D \in \Delta_1.V(D) = \mathbf{V})) \wedge \\ ((\forall C' \in \Gamma_2.V(C') = \mathbf{V}) \wedge (\forall D' \in \Delta_2.V(D') = \mathbf{F}) \wedge V(A) = \mathbf{F}) \quad (3)$$

   la condizione di validità della prima premessa è sufficiente per preservare la validità del sequente conclusione.

La regola *cut mult* non è però semanticamente invertibile, infatti

$$\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2$$

è valido alla seguente condizione:

$$(\exists C \in \Gamma_1.V(C) = \mathbf{F}) \vee (\exists D \in \Delta_1.V(D) = \mathbf{V}) \vee \\ (\exists C' \in \Gamma_2.V(C') = \mathbf{F}) \vee (\exists D' \in \Delta_2.V(D') = \mathbf{V}) \quad (4)$$

ma se ad esempio solo la prima clausola della condizione fosse vera, la validità della prima premessa sarebbe preservata ma quella della seconda dipenderebbe dalla valutazione di A e quindi non sarebbe preservata.