Ruggero Ferro

NOTE

DI

LOGICA MATEMATICA

Per il corso di laurea magistrale in Matematica
Anno Accademico 2012-2013

PREMESSA

Gli inizi dello studio della logica si perdono nella civiltà greca. I massimi filosofi greci ne parlano già compiutamente indicando anche principi logici e regole logiche. La stessa parola trae origine dal vocabolo greco “logos”, di ben difficile traduzione, poiché è usato in contesti non sempre omogenei. Già la traduzione latina in “Verbus” non è la più felice, indicando più la rappresentazione linguistica dell'attività del pensiero, che non l'attività stessa; ma questa distinzione tra oggetto e sua rappresentazione non era molto sentita dagli antichi.

Oggi si potrebbe dire che la logica è lo studio di come si argomenta, di come si ragiona. Ma questa indicazione pone subito seri problemi. Con che ragionamento si studia il ragionamento? Sembra che questa domanda evidenzi una circolarità inaccettabile, che ci richiede di precisare meglio cosa debba intendersi per logica.

Spesso si sente definire l'uomo come animale razionale, ma, se ci chiediamo cosa vuole dire, dovremmo precisare cosa intendiamo per razionale, e a volte ci viene risposto che la razionalità è quell'attività che distingue l'uomo dagli altri animali. Combinando le due affermazioni si ottiene che l'uomo è un animale che ha una sua tipica attività (la razionaliastà) che lo distingue dagli altri animali. Alla fine non sappiamo più né cosa s’intenda per uomo, né cosa si intenda per razionale.

A proposito della nozione di tempo, Sant’Agostino sostanzialmente osservava che, se ci viene chiesto cosa vuole dire tempo cronologico, ciascuno di noi è convinto di averne una nozione molto chiara, ma, se ci si domanda davvero cosa si intende, si deve riconoscere che ci è molto difficile rispondere, e quasi ci si convince di non sapere di cosa si sta parlando. Ho richiamato questa osservazione perché credo si applichi bene anche a varie altre nozioni, oltre che alla nozione di tempo, tra le quali anche le nozioni di razionale e, in particolare, di logica, che ci interessa ora.

Quanto cercheremo di studiare, dovrebbe portare a specificare ambiti esatti, entro i quali cercare di dare un significato accettabilmente preciso al termine logica, sfruttando un'attenta analisi del linguaggio, che diverrà oggetto di studio e, dunque, formale.

La logica, oggi, si situa a mezza strada tra la filosofia e la matematica. Infatti, da una parte usa modalità matematiche per sviluppare la propria analisi sul linguaggio e dall'altra vuole applicare i risultati di tale analisi proprio alla comprensione del fenomeno matematica, cioè ad una filosofia della matematica, e, magari, anche ad una filosofia della conoscenza. Ma questi sono traguardi ambiziosi e chissà se effettivamente raggiungibili. Quello di cui ci si accontenterà è acquisire una conoscenza precisa e giustificata di varie affermazioni a cui è giunta la logica, affermazioni che hanno una notevole rilevanza nelle discussioni sulla conoscenza (in particolare sulla conoscenza matematica), tali da influenzare un possibile modo di considerare questo problema.

Nell'uso quotidiano la parola logica assume molti significati diversi in diversi contesti. A volte, per affermazione logica viene inteso qualcosa che si impone per la sua stessa costruzione interna, anche se raramente si va a vedere qual è effettivamente la sua costruzione interna e se essa giustifica l'imporsi dell'affermazione. A volte la qualificazione di logicità di qualche affermazione sta a indicare che chi parla la ritiene così importante da dover essere accettata anche dagli altri, e quasi usa questa qualificazione perché l'altro sia costretto moralmente ad accettare l'affermazione, pena il dimostrarsi illogico, che è un attributo negativo, anche se non si sa cosa vuole realmente dire. I significati assunti dalla parola logica nei vari contesti non si limitano a questi indicati: un elenco esaustivo è praticamente impossibile, e fuori posto in questa circostanza, così ci si è limitati ai soli indicati.

Comunque lo studio della logica porta con sé un'attenzione ai problemi filosofici da cui è nata: al problema della conoscenza, al problema della giustificazione delle affermazioni. Così questo studio incontra difficoltà analoghe a quelle che s'incontrano in studi filosofici. D'altra parte, a causa dell'approccio matematico a molti problemi, sorgono anche le difficoltà usuali di una trattazione matematica di un argomento: nello studio si potrà procedere lentamente analizzando bene ogni parola e ogni legame tra affermazioni, e curando di fare propri i risultati acquisiti, perché su questi si baseranno i prossimi. Parlando di modalità matematica utilizzata per questo studio non intendo certo quella falsa visione della matematica in cui tutto si riduce a calcoli e a regole di calcolo, ma penso alla elaborazione di concetti che si fa in matematica, alla giustificazione della loro importanza dimostrando i risultati a cui si può giungere appoggiandosi su di essi.

I concetti elaborati dalla mente umana hanno bisogno di ricevere dei nomi per essere comunicati, ma questi nomi vengono scelti tra parole già note, anche se queste hanno un significato diverso da quello nuovo che si vuole comunicare, ma parole note che rievochino alcuni aspetti comuni con la nozione che si sta introducendo o problematiche che si vogliono organizzare con i nuovi concetti. Per esemplificare quanto appena detto, si pensi alla parola continuo, che nel linguaggio comune significa qualcosa che non si interrompe o che prosegue (ma i due significati sono già molto diversi). Questa nozione comune, che ci viene dall'esperienza, non è poi così precisa e ci si potrebbe trovare in difficoltà a usarla in casi critici. Appunto per superare tali vaghezza e difficoltà nei casi critici, la matematica ha elaborato, attraverso successivi affinamenti nel tempo, una nozione di continuità più sofisticata e precisata mediante una definizione rigorosa che presuppone varie altre conoscenze specifiche. Ma invece di inventare un nuovo nome per la nozione sviluppata, ha continuato a chiamarla continuità per indicare qual era la problematica fondamentale a cui si rivolgeva. Così, quando si incontra questo vocabolo in una trattazione matematica, bisogna considerarlo con il senso precisato nel contesto: può essere fonte di gravi equivoci volersi agganciare alla personale idea che ci si è fatti del significato di quella parola attraverso il suo uso comune.

L'osservazione appena esposta è ancora più rilevante nel contesto dello studio che si vuole iniziare, perché molte delle parole che si useranno hanno già connotazioni forti nel linguaggio comune, anche se saranno usate con significati che verranno via via definiti. Anche se l'uso dello stesso termine vuole indicare legami con i significati acquisiti dall'uso corrente, non bisogna farsi fuorviare da quei significati, ma cercare di cogliere cosa vogliono dire nel contesto in cui vengono usati, seguendone attentamente l'introduzione.

In concreto le pagine seguenti richiederanno un buon impegno, accessibile a chiunque vi voglia dedicare un po' di tempo ed energie. Oltre all'esposizione dei vari problemi, concetti e risultati, verranno proposte domande ed attività che riguardano il contenuto presentato.

Giusto per avviare l'attività, propongo fin da ora alcuni temi:

1) Scrivere varie frasi in cui compare la parola logica, possibilmente con diversi significati attribuiti a tale parola, e sostituire la parola logica in quelle frasi con altre parole, quelle che sembrano più adeguate in quel contesto.

2) Esporre in una ventina di righe al massimo cosa ciascuno intende per logica.

Sarà interessante esaminare la vostra attuale elaborazione dei temi proposti alla fine dello studio, e confrontarla con le posizioni che avrete maturato sugli stessi temi.

Spero di riuscire a coinvolgere il vostro interesse per la disciplina, in modo che la soddisfazione per ciò che si riuscirà ad acquisire compensi le fatiche del percorso.

Esistono molti ottimi manuali di logica, e lo studio che seguirà approderà agli stessi risultati conseguiti negli altri testi. Nello studiare gli altri testi spesso mi sono domandato come mai si seguiva un certo percorso, o come si poteva esprimere più esplicitamente il significato di ciò che veniva introdotto. Non so quanto sia di aiuto al lettore cercare di indicare una possibile risposta alle domande che via via mi sorgevano: lo sforzo che ciascuno può compiere in questo senso, senza alcuna guida, potrebbe fare acquisire con maggiore partecipazione personale le nozioni presentate solo attraverso le loro proprietà. Inoltre uno dei punti di forza della presentazione matematica è proprio quello di precisare aspetti accettati di certe nozioni e su questi basare quanto viene sviluppato, in modo che possa valere qualunque sia il significato che uno attribuisce alla nozioni di partenza, purché quel significato sia compatibile con gli aspetti accettati che sono stati presentati. Addirittura si può contribuire allo sviluppo di una teoria matematica anche senza aver colto completamente quali nozioni si vogliono indicare mediante certi nomi: basta sapere che si parla di qualcosa con certe caratteristiche e queste devono essere sufficienti per gli sviluppi successivi. Tuttavia credo che alcuni potrebbero desiderare una indicazione più precisa del possibile significato delle nozioni di cui si vuole parlare, quasi per fare mente locale, per avere un'idea di ciò di cui si potrebbe stare parlando. Ecco un'analogia che potrebbe facilitare la comprensione di ciò che sto cercando di dire. La geometria si interessa di certi enti che hanno certe proprietà fondamentali e, da queste, cerca di dedurne molte altre, magari importanti e quanto più esplicative possibile della situazione in cui ci si trova. Tuttavia torna conveniente all'uomo pensare che gli enti che si stanno considerando sono spazi di una certa dimensione con punti, rette, e quanto altro possa essere utilmente esaminato. Per dimostrare le proprietà di un tale mondo si dovrà fare riferimento esclusivamente agli aspetti fondamentali accettati inizialmente, tuttavia l'aver fatto mente locale su particolari enti può essere di grande aiuto nel coglierne le ulteriori proprietà. Per non parlare della applicabilità delle nozioni matematiche possibile solo se a esse viene attribuito uno specifico significato (non necessariamente unico). Nel caso particolare della teoria matematica che è la logica, questa ricerca di significato è opportuna anche per giustificare la scelta dei nomi che si usano per le varie nozioni e per cogliere il legame che c'è, ed anche gli aspetti di differenziazione, tra queste nozioni e il significato che hanno nel linguaggio comune le parole che le rappresentano.

In quanto presenterò, ho cercato di indicare, per varie locuzioni che verranno considerate, anche un possibile significato, almeno un significato che io intravedo e che mi pare rilevante, magari paradigmatico. Così cercherò di introdurre motivazioni che io vedo per vari sviluppi e acclarazioni su nozioni delle quali in genere ci si limita a dare delle caratteristiche da cui sia possibile dedurre i risultati che interessano. Non credo che questa dichiarazione d'intenti possa essere ora del tutto chiara a qualcuno che affronta per la prima volta questa disciplina, ma penso che potrà esserlo sempre di più ritornandovi a vari stadi man mano che si prosegue nello studio del materiale proposto.

0. PREREQUISITI

Per lo sviluppo di quanto seguirà sono necessarie certe nozioni, fondamentali in matematica, e che dovrebbero essere già patrimonio di tutti, almeno ad un livello ingenuo (naive in inglese).

Nel richiamare delle nozioni che si collocano all'inizio degli insegnamenti di matematica, qui si vuole cogliere l'occasione per indicare la notazione che si adotterà in seguito e per sottolineare degli aspetti che risulteranno rilevanti nell'affrontare la logica.

Cominciamo con la nozione di **collezione**. Con questa parola intendiamo riferirci a tutti quegli elementi che si è deciso di considerare in un certo momento. Esempi di collezione possono essere: 1) la collezione i cui elementi sono il sole, la bontà e io stesso; 2) la collezione con nessun elemento perché non sto considerando proprio niente; 3) la collezione dei mesi dell'anno; 4) la collezione degli alunni bravi di una certa classe; 5) la collezione di tutto, cioè di tutti gli elementi. Le collezioni sono determinate dagli elementi che vengono considerati nella collezione, si dice che **appartengono** alla collezione, e non dal modo come essi vengono descritti. Per indicare che un certo elemento, indicato da a, è uno di quelli considerati in una certa collezione, cioè appartiene a quella collezione, indicata con z, si scriverà $a \in z$, mentre per indicare che un certo elemento c non appartiene alla collezione v si scriverà $c \notin v$.

Per le collezioni useremo due tipi di notazione:

a) quella per elencazione degli elementi, che va bene per le collezioni finite, che racchiude tra parentesi graffe l'elenco degli elementi che le appartengono separati da virgole; ad esempio la prima e la seconda collezione prima menzionate possono essere indicate così

{il sole, la bontà, io stesso}, {};

b) quella per determinazione mediante una proprietà degli elementi, che va bene quando gli elementi della collezione hanno una proprietà in comune che non è posseduta dagli elementi che non sono nella collezione, che si scrive nel modo seguente: si inizia con la parentesi graffa aperta {, seguita da un simbolo che vuole indicare un generico elemento della collezione (ad esempio a), poi si mettono i due punti : (alcuni usano la sbarretta |), poi si indica la proprietà comune agli elementi della collezione riferendola al simbolo usato per indicare gli elementi della collezione (ad esempio se P indica la proprietà e, come prima, a indica un qualsiasi elemento della collezione, si scriverà P(a)), infine si termina con la parentesi graffa chiusa }. Così la terza, quarta e quinta collezione, menzionate prima come esempi di collezione, possono essere indicate come segue: {n: n è un mese dell'anno}, {a: a è un bravo alunno di una specifica classe},{c: c è un elemento}.

L'ultima collezione può essere indicata anche come {c: c=c} poiché ogni elemento è uguale a se stesso e le due notazioni descrivono in modo diverso gli stessi elementi, e perciò indicano la stessa collezione, come avevamo già osservato.

Si usa indicare la collezione vuota (quella che non ha elementi), oltre che con la notazione {}, anche con la notazione $\varnothing$. Si noti che la collezione vuota è qualcosa, e non niente.

Si noti che ci sono collezioni che non possono essere indicate con nessuno dei due metodi indicati ed esse saranno indicate mediante una descrizione, a volte non molto precisa, di come si ottengono.

Se C e D sono due indicazioni di collezioni, al solito per dire che indicano la stessa collezione si userà la notazione C=D.

La nozione d'**insieme** differisce da quella di collezione perché un insieme è una collezione pensata come cosa singola, come elemento, come soggetto di proprietà (come già aveva precisato Cantor nell'introdurre questa nozione). Quando s'iniziò a considerare queste nozioni non si accentuò la differenza tra la nozione di collezione e quella di insieme perché si ipotizzava che ogni collezione potesse essere un insieme (ipotesi accettata da Frege). Ma Russell mostrò con il suo paradosso che questa ipotesi porta a contraddizione per cui non ogni collezione può essere considerata un insieme. In particolare certe collezioni come quella individuata da Russell o quella costituita da tutti gli elementi (che viene detta classe universale) non possono essere insiemi. Il risultato di Russell costringe a particolari attenzioni nel precisare chi sono gli insiemi, e la situazione è stata sufficientemente chiarita precisando attraverso assiomi che almeno certe collezioni sono insiemi, ma qui pare superfluo richiamare detti assiomi reperibili in ogni introduzione alla teoria degli insiemi. Trascuriamo qui anche la presentazione e discussione di assiomi non sempre accettati per la loro delicatezza, come l'assioma di scelta, dei quali magari parleremo quando si dovranno utilizzare.

Per gli insiemi si adotteranno le stesse notazioni usate per le collezioni (essendo questi anche collezioni), ma per essi, oltre che ad avere elementi (eventualmente nessuno) come le collezioni, si può dire che anche, in quanto elementi, appartengono ad altre collezioni o insiemi. Così nella scrittura $a \in b \in c$, a deve essere un elemento che può essere un insieme, b deve essere un insieme essendo sia collezione (gli appartiene qualcosa) sia elemento (appartiene a qualcosa), e c deve essere una collezione che può anche essere un insieme.

Non richiamiamo qui le operazioni di unione e intersezione tra collezioni (e dunque anche tra insiemi) perché sono ben conosciute anche con la loro notazione. Altrettanto molto nota, anche se più delicata, è l'operazione di complementazione di una collezione. Si osservi che il complementare di un insieme è una collezione che non può essere un insieme. Per l'operazione di complementazione ci sono varie notazioni: se A è una collezione la collezione complementare può essere indicata con A^c, oppure -A, o in altri modi ancora, ma sarà sempre chiaro dal contesto cosa si intende. Una ulteriore operazione molto usata tra collezioni (ed in particolare tra insiemi) è la sottrazione, che indicheremo con A-B o con A\B e che indica la collezione degli elementi che appartengono ad A e non a B, se è applicata alle collezioni A e B.

In quanto faremo, oltre agli insiemi ci interesseranno anche gli insiemi finiti ordinati, che chiameremo semplicemente **insiemi ordinati**. In essi gli elementi vanno considerati in un certo ordine ben precisato. La notazione per un insieme finito ordinato inizia con una parentesi tonda aperta ([alcuni usano anche il simbolo <], seguita dall'indicazione ordinata degli elementi dell'insieme ordinato, separati da virgole, e termina con la parentesi tonda chiusa) [oppure il simbolo >, se si è iniziato con <].

Si osservi che, mentre {a} = {a,a} e {a,b} = {b,a}, per gli insiemi ordinati la situazione cambia: infatti (a) è ben diverso da (a,a) (il primo è un insieme ordinato con un solo elemento che è a, mentre il secondo è una coppia ordinata di elementi dei quali il primo è a e il secondo è pure a), ed anche (a,b) è ben diverso da (b,a) (entrambi sono insiemi ordinati i cui elementi sono a e b, ma nel primo caso il primo elemento è a e il secondo b, mentre nel secondo caso il primo elemento è b e il secondo è a). Si noti che due insiemi ordinati sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi nelle stesse posizioni, posizioni che devono essere in uguale numero.

Un particolare tipo d'insiemi ordinati, che sarà molto usato, è quello delle coppie ordinate, cioè insiemi ordinati con due sole posizioni.

In seguito, per non appesantire eccessivamente l'esposizione, si parlerà spesso di coppie e di n-uple senza ricordare ogni volta quando si considerano coppie ordinate o n-uple ordinate: il contesto dovrebbe chiarire di cosa si sta parlando. In certi casi, tuttavia, si continuerà a indicare che si tratta d'insiemi ordinati per enfatizzare questa caratteristica.

Un'operazione importante tra insiemi è il **prodotto cartesiano**. Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano di A per B nell'ordine, denotato da $A \times B$, è l'insieme di tutte le coppie ordinate i cui primi elementi sono in A e i secondi elementi sono in B. Con la notazione finora introdotta si può scrivere: $A \times B = \{(x,y): x \in A \text{ e } y \in B\}$. Si noti che questa operazione non è né commutativa né associativa. Nonostante questa difficoltà che rende difficoltosa l'applicazione dell'operazione di prodotto cartesiano a prodotti cartesiani già ottenuti, tuttavia si può introdurre il prodotto cartesiano tra n insiemi $A_1, \ldots, A_n$ mediante la seguente definizione: $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, \ldots ,x_n): x_1 \in A_1 \text{ e } \ldots \text{ e } x_n \in A_n\}$. Quando gli n insiemi ai quali si applica il prodotto cartesiano sono sempre lo stesso insieme A, allora si parla di n-esima potenza cartesiana di quell'insieme e la si indica con A^n.

Un'ulteriore nozione che vale la pena ripassare è quella di **relazione**. Iniziamo con le relazioni binarie, cioè quelle tra due elementi. Per quanto sia difficile dire cosa si intende quando si afferma che tra coppie di elementi sussiste una certa relazione (ad esempio la relazione di genitore-figlio, o la relazione di essere più anziano, o altro), dal punto di vista matematico ci si accontenta di conoscere chi sono le coppie di individui che stanno in quella relazione, senza chiedersi per quali motivi sono nella relazione o se è opportuno o meno che siano nella relazione, o altro ancora. Questo atteggiamento della matematica viene detto estensionale perché considera solo a quali coppie si estende la relazione. Così la conoscenza e determinazione della relazione si limita a sapere quali sono le coppie ordinate di individui che soddisfano la relazione, e, in matematica, si identifica la difficile nozione di relazione con il più semplice insieme di tali coppie ordinate. Se si considera una diversa relazione, si considererà un diverso insieme di coppie ordinate. Questo atteggiamento estensionale comporta che descrizioni diverse dello stesso insieme di coppie ordinate indichino la stessa relazione, che sarà indipendente dal modo di descriverla.

Finora si sono considerate solo relazioni binarie, ma ci sono pure relazioni unarie, ternarie, ... , n-arie, cioè relazioni che si applicano ad un solo individuo o a terne ordinate di individui, ..., o a n-uple ordinate di individui. Un esempio di relazione unaria è la relazione essere argentino, infatti è uno solo l'individuo che può soddisfare o meno questa relazione (le relazioni unarie vengono anche dette proprietà di un individuo). Esempi di relazioni ternarie possono essere: 1) la relazione tra tre individui di essere il primo figlio del secondo che è femmina e del terzo che è maschio; 2) la relazione tra tre numeri di essere il primo il risultato della sottrazione dal secondo del terzo (si noti che questa è una relazione ben diversa da quella tra numeri di essere il terzo risultato della sottrazione dal primo del secondo: la terna ordinata (1,3,2) appartiene alla relazione indicata dapprima e non a quella indicata per ultima).

Si chiama **arietà** di una relazione il numero di elementi a cui si applica quella relazione. Così l'arietà di una relazione binaria è 2, l'arietà di una relazione ternaria è 3, quella di una relazione unaria è uno, e quella di una relazione n-aria è n.

Spesso oltre a considerare una relazione R n-aria si fissano anche n insiemi $A_1, \ldots, A_n$ tali che gli i-esimi ($i \leq n$) elementi di ciascuna n-upla della relazione R appartengano all'i-esimo degli insiemi fissati. Si noti che gli n insiemi non sono determinati dalla relazione R, ma possono essere scelti in vari modi, e costituiscono una ulteriore precisazione che non segue dalla relazione data. Il considerare questi ulteriori insiemi oltre alla relazione porta ad una nuova nozione che è la (n+1)-pla costituita dalla relazione e dagli n insiemi aggiunti, $(R, A_1, \ldots, A_n)$, detta **relazione n-aria tra gli n insiemi**. Se poi gli n insiemi sono tutti uguali ad un insieme A, la relazione n-aria tra quegli n insiemi è detta **relazione n-aria su A**, e questo è il caso a cui si può ricondurre ogni relazione n-aria tra n insiemi, ed anche il caso che viene maggiormente considerato, in particolare quando l'arietà è 2.

Tra le relazioni binarie su un insieme ce ne sono certe con particolari caratteristiche che sono ben note e studiate; ad esempio le relazioni di equivalenza, le relazioni d'ordine di vari tipi, eccetera. Sono nozioni importanti che saranno usate, ma le riteniamo troppo note per dilungarci su di esse ora.

Piuttosto notiamo che una proprietà che possono avere le relazioni è quella di essere univoche. Diremo che una relazione (n+1)-aria è **univoca** se comunque fissati ordinatamente i primi n elementi c'è al più un elemento che, aggiunto come (n+1)-esimo dopo i primi n, dà una (n+1)-upla che appartiene alla relazione. Detto altrimenti, se due (n+1)-uple con gli stessi primi n elementi appartengono entrambe alla relazione allora anche gli ultimi elementi delle due (n+1)-uple sono uguali. Così una relazione binaria R è univoca se fissato ad arbitrio un primo elemento a c'è al più un elemento b tale che la coppia ordinata $(a,b)\in R$, oppure se entrambe le coppie (a,b) e (a,c) appartengono alla relazione R allora b=c.

Le relazioni univoche vengono dette **funzioni**. Poiché in queste relazioni, se sono (n+1)-arie, con n un qualsiasi numero naturale, ciò che conta sono i primi n elementi, essendo l'(n+1)-esimo univocamente individuato (eventualmente mancando), la relazione vista come funzione viene considerata n-aria. Quindi in generale una funzione n-aria è una relazione (n+1)-aria e una relazione (n+1)-aria univoca è una funzione n-aria. Così le funzioni unarie sono relazioni binarie univoche, cioè insiemi di coppie ordinate il cui secondo elemento è univocamente determinato dal primo. Per le funzioni unarie, oltre alla usuale notazione insiemistica $(a,b)\in f$ per dire che una certa coppia (a,b) sta nella relazione f, che è la funzione, si usa la notazione f(a)=b, che ha esattamente lo stesso significato. In questo caso si dice anche che f fa corrispondere b ad a. Per funzioni binarie g, che sono relazioni ternarie, si usa anche la notazione g(x,y)=z invece della notazione $(x,y,z)\in g$, e analogamente per le altre arietà. Una funzione n-aria può essere vista anche come una funzione unaria in cui il primo elemento di una coppia ordinata della funzione unaria è l'n-upla ordinata dei primi n elementi di una (n+1)-pla ordinata appartente alla funzione n-aria. Usando la notazione introdotta, data una funzione n-aria f, la si può considerare come la funzione unaria f* tale che $f^*((x_1, \ldots, x_n)) = y$ per ogni $x_1, \ldots, x_n$, y tali che $f(x_1, \ldots, x_n) = y$.

Si definisce **dominio** di una funzione unaria h (a volte detto anche campo di esistenza) l'insieme degli elementi che compaiono come primi elementi in coppie ordinate della funzione. La notazione per l'insieme dominio della funzione h sarà: Dom(h). Si ha che Dom(h) = {c: esiste d tale che $(c,d)\in h$}. Se la funzione data non è unaria, ma n-aria, ci saranno n domini. Si definisce **dominio i-esimo** (i = 1, 2, …, n) di una funzione n-aria h l'insieme degli elementi che compaiono come i-esimi nelle (n+1)-uple della funzione h. La notazione per l'i-esimo dominio della funzione h sarà: $Dom_i(h)$. Si ha che $Dom_i(h) = \{c_i$: esistono $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n, c_{n+1}$ tali che l' (n+1)-upla $(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n, c_{n+1})$ appartiene ad h}

Il **codominio** di una funzione unaria h (detto anche immagine attraverso la funzione) è l'insieme Cod(h) = {v: esiste u tale che $(u,v) \in h$}. Se la funzione data h è n-aria, il codominio della funzione h è l'insieme Cod(h) = {v: esistono c_1, ... , c_n tali che l'(n+1)-upla (c_1, ... , c_n, v) appartiene ad h}.

Una funzione unaria f viene detta **iniettiva** (a volte si dice 1-1) se ad elementi differenti fa corrispondere elementi differenti, cioè se $a \neq c$ allora $f(a) \neq f(c)$. Nel caso in cui f sia una funzione n-aria, essa sarà detta iniettiva se a n-uple diverse fa corrispondere elementi differenti (equivalentemente, se, vista come funzione unaria, è iniettiva).

Generalmente siamo abituati a considerare una funzione unaria tale che i primi elementi delle sue coppie ordinate appartengano ad un certo insieme, detto primo insieme (o anche dominio, ma in senso diverso da quello proposto prima), che deve contenere il dominio, e i secondi elementi delle sue coppie ordinate appartengano ad un insieme, detto secondo insieme (o anche codominio della funzione, ma ancora in senso diverso da quello proposto prima), che deve contenere il codominio. Primo insieme e secondo insieme aggiungono delle informazioni ulteriori che non erano incluse nell'insieme di coppie ordinate che era la funzione: la stessa funzione (lo stesso insieme di coppie ordinate) può essere visto sia tra un certo primo insieme e un certo secondo insieme, come pure tra altri primi insiemi e secondi insiemi.

Per considerare anche le ulteriori informazioni che vengono dall'avere precisato un primo e un secondo insieme per una funzione unaria (che devono contenere rispettivamente il dominio e il codominio di quella funzione) si introduce una nuova nozione, quella di **funzione unaria da ... a ...** . Questa è una terna ordinata costituita da un primo elemento che è il primo insieme, un secondo elemento che è il secondo insieme, e un terzo elemento che è una funzione nel senso prima precisato. Inoltre tale funzione dovrà avere dominio e codominio contenuti rispettivamente nel primo e nel secondo insieme.

Anche per le funzioni di arietà n maggiore di uno può essere conveniente specificare all'interno di quali insiemi si considerano gli elementi nelle singole posizioni delle (n+1)-uple della funzione. Si introduce così una nuova nozione di funzione, quella di **funzione da un primo insieme, un secondo insieme, ... , un n-esimo insieme a un ultimo insieme**. Questa è una (n+2)-upla ordinata costituita da un primo elemento che è detto il primo insieme, ... , da un n-esimo elemento che è detto l'n-esimo insieme, da un (n+1)-esimo elemento che è detto l'ultimo, e da un (n+2)-esimo elemento che è una funzione n-aria nel senso introdotto prima. Inoltre tale funzione dovrà avere primo dominio, ... , n-esimo dominio contentuti rispettivamente nel primo insieme, ... , nell'n-esimo insieme, e codominio contenuto nell'ultimo insieme.

Rispetto a questa nuova nozione di funzione unaria da ... a ... si possono introdurre anche ulteriori precisazioni. Una funzione f da A a B viene detta **totale** (si sta considerando la terna (A,B,f)) se il dominio di f coincide con l'insieme A. Essa viene detta **suriettiva** se il codominio di f coincide con B. Infine essa viene detta **biiettiva** se è sia iniettiva che totale che suriettiva.

Analogamente una funzione n-aria si dirà totale se i suoi domini coincidono con i rispettivi insiemi; e sarà detta suriettiva se il codominio coincide con l'ultimo insieme, e biettiva quanso è sia iniettiva ce ttale che suriettiva.

Si noti che in algebra e in analisi matematica la nozione di funzione generalmente è introdotta in modi diversi, diversi anche dalla definizione qui data. In algebra vengono considerate solo funzioni totali che hanno per primo insieme e per secondo insieme (per primi insiemi e per ultimo insieme) uno stesso insieme: ciò perché si è particolarmente interessati alla composizione di funzioni senza doversi preoccupare della possibilità di eseguire una tale operazione. Al contrario in analisi matematica si è spesso interessati a funzioni che non sono definite in ogni punto di un insieme, cioè non sono totali. La presentazione che si è proposta qui vuole essere utilizzabile sia in campo algebrico che nel campo dell'analisi matematica.

Non si insiste qui sulle operazioni tra funzioni, in particolare sulla composizione di funzioni, non perché non siano estremamente importanti, ma perché sono ritenute ben note.

Alla conclusione di questi richiami, necessari per i successivi sviluppi, si vuole ricordare l'importanza della nozione di funzione unaria biiettiva da un insieme ad un altro. Di fatto, l'esistenza di una biiettività tra due insiemi definisce il concetto di **equinumerosità** (o ugual numerosità, o uguale cardinalità) tra i due insiemi. Infatti, due insiemi si dicono equinumerosi quando c'è un modo di fare corrispondere a ciascun elemento di un insieme uno e uno solo elemento dell'altro in modo che ad elementi diversi corrispondano elementi diversi e si raggiungano tutti gli elementi del secondo insieme: nella terminologia introdotta queste richieste dicono esattamente che tra i due insiemi ci deve essere una biiettività.

E' allora naturale dire che un insieme ha una numerosità minore od uguale a quella di un altro se è equinumeroso ad un sottinsieme del secondo, ovvero, ed è un modo di riformulare la stessa condizione, se esiste una funzione totale e iniettiva dal primo nel secondo. Si è detto minore od uguale, e non solo minore, poiché la condizione espressa può essere soddisfatta da una funzione non suriettiva tra i due insiemi anche se c'è una diversa funzione biiettiva tra i due insiemi: si pensi, ad esempio, all'insieme dei numeri pari che è certo equinumeroso ad un sottinsieme dei numeri naturali (lo stesso insieme dei pari attraverso la funzione identica), ma è anche equinumeroso all'insieme dei numeri naturali poiché la funzione che ad un numero pari associa la sua metà è una biiettività tra i due insiemi.

Si ricordi anche che Cantor ha dimostrato l'esistenza di insiemi infiniti di numerosità strettamente maggiore uno dell'altro: quindi non c'è un'unica nozione di infinito.

Questa scorsa attraverso alcuni concetti fondamentali della matematica che saranno usati in seguito è stata veloce e non esaustiva. Ciò per non appesantire con esposizioni di fatti forse ben noti, e per non iniziare a sviluppare un tema che non è il nostro.

Chi cercasse ulteriori approfondimenti su questi argomenti può consultare un qualsiasi libro introduttivo di teoria degli insiemi a livello universitario: ce ne sono molti.

1. L'ESIGENZA DI STUDIARE UN LINGUAGGIO FORMALE.

Da sempre l'uomo si è posto domande fondamentali circa la sua esperienza nella propria vita. Una di queste è: perché la realtà si comporta nel modo che viene constatato? Tale domanda continua a ripetersi perché le risposte proposte non si sono dimostrate definitive. E' nella comune esperienza dell'uomo l'illudersi, l'avere l'impressione che le cose stiano in un certo modo, per poi accorgersi di essersi sbagliato. Come essere certi che un'eventuale risposta alla domanda posta inizialmente non sia sbagliata? Peggio, l'uomo sperimenta anche la falsità. Sa dire bugie, magari convincenti, come riconoscerle? Questo aspetto è rilevante anche per la conoscenza, dal momento che molte informazioni arrivano all'uomo non per esperienza diretta, che è molto limitata, ma perché riferite da altri, attraverso le possibilità comunicative di cui l'uomo dispone. Quando credere a ciò che viene comunicato? Dall'antichità l'uomo ha studiato questo problema in entrambe le direzioni: convincere e lasciarsi convincere. Così sono nate la retorica e l'ermeneutica. Ma l'ambizione era quella di arrivare a risultati certi, a volte possibili come si può constatare nell'esperienza. Così l'uomo ha cominciato a notare e catalogare le modalità di espressione che portano a risultati incontrovertibili. Ecco la logica con i suoi sillogismi e le sue varie forme di argomentazione. Visti i successi ottenuti in questa direzione, l'uomo si è fatto ancora più ardito cercando di appoggiare le risposte ai suoi problemi fondamentali su basi certe e inconfutabili. Così ha cercato di presentare tali basi come conseguenze di fatti che non possono che essere come sono, perchè concepiti in modo da auto giustificarsi per la stessa strutturazione (logica nel senso prima detto) della loro presentazione. In tal modo la mente umana sarebbe forzata ad accettare la basi così strutturate. Direi che in questa ottica si inseriscono varie opere di filosofi, che si sentono in dovere di precisare la logica (ancora nel senso sopra detto) su cui appoggiarsi, visto anche che altri sistemi logici, precedentemente elaborati, sarebbero stati insufficienti ai loro scopi.

Per secoli non si notò, in questa problematica, il ruolo centrale del linguaggio. Ipotizzando che il linguaggio fosse totalmente trasparente (cioè non frapponesse alcun ostacolo tra il significato rappresentato e il modo di rappresentarlo), non si sentì la necessita di separare i due momenti costituiti da ciò che si vuole rappresentare e dal modo con cui lo si rappresenta, ma anzi si analizzò la correttezza di quanto affermato attraverso lo studio dell'espressione linguistica che lo rappresentava. Questo atteggiamento, del tutto ragionevole nell'ambito dell'ipotesi formulata, portò ad identificare lo studio del ragionamento (dell'attività mentale) con lo studio delle espressioni del linguaggio al punto che l'ineluttabilità dell'accettazione di certe affermazioni si identificava con la correttezza del ragionamento espresso linguisticamente. Pur non esplicitando cosa debba intendersi per ragionamento corretto, esso veniva ritenuto tale se seguiva le norme della logica, ovvero le norme del costituirsi di espressioni linguistiche della cui validità nessuno avrebbe potuto dubitare. Di conseguenza, la logica che si sviluppò si appoggiò pesantemente sugli aspetti linguistici, fino a sentire la necessità di giustificare la loro affidabilità. Ma proprio nel tentativo di dimostrare tale affidabilità, il linguaggio con le sue espressioni divenne oggetto dello studio. Affinché tale studio non fosse basato sulle sabbie mobili di una lingua viva, mutabile e sfuggente, anzitutto si dovette precisare il linguaggio che si voleva studiare, costruendolo e definendolo esplicitamente, e giungendo al cosiddetto linguaggio oggetto o linguaggio formale. Così facendo, si mise in risalto anche il ruolo dell'organizzazione interna del linguaggio nella determinazione delle affermazioni che si è forzati ad accettare come corrette. Fu proprio nell'ambito di questi studi che ci si accorse dei limiti dei linguaggi formali, ad esempio individuando concetti non rappresentabili con precisione (cioè non definibili né esplicitamente né implicitamente) mediante un linguaggio formale. A questi risultati si giungerà nello sviluppo dello studio che si sta intraprendendo; qui, invece, interessa mettere in risalto come sia maturata l'esigenza di introdurre un linguaggio formale, e come, di conseguenza, si sia precisato il campo della logica come studio delle potenzialità e dei limiti dei linguaggi formali.

Se i linguaggi formali colgono con sufficiente precisione aspetti dei linguaggi naturali, quello che si riesce a esprimere attraverso un linguaggio formale dovrebbe essere esprimibile anche in un qualsiasi linguaggio naturale. Il vantaggio di essere riusciti ad esprimerlo nel linguaggio formale sta nel fatto che potrà diventare più agevole e sicuro un controllo sulla accettabilità di quanto asserito quando, per tale controllo, si debbano usare considerazioni che prendono in esame il linguaggio con cui viene espresso ciò che si vuole descrivere, poiché di questo linguaggio si ha un controllo preciso, essendo stato costruito artificialmente, in un modo ben specifico, per renderlo oggetto inequivocabile di studio.

In questa direzione si potrà, ad esempio, cercare di chiarire cosa debba intendersi quando si dice che un'affermazione A è conseguenza di altre B_1,B_2, ... Sicuramente ciò non corrisponde a dire che in una certa interpretazione vale A, piuttosto si vuole sottolineare un legame tra A e B_1,B_2, ... che non si può limitare a considerazioni in una certa interpretazione dove A dovrebbe valere o meno. Dire che è conseguenza dovrebbe includere che il legame tra A e le altre affermazioni è indipendente dalla particolare interpretazione. Così pare naturale precisare questo legame tra A e B_1,B_2, ... dicendo che l'affermazione A deve valere in tutte le interpretazioni in cui valgono B_1, B_2, ... Questa esplicitazione della nozione di conseguenza, presuppone sapere cosa sono le interpretazioni e cosa vuol dire che una certa espressione del linguaggio vale in una certa interpretazione, tutte nozioni che verranno studiate in seguito, ma che indicano fin da ora l'esigenza che l'affermazione sia in un linguaggio oggetto per poter essere oggetto di studio (non può essere in un linguaggio fluido, come i linguaggi naturali, altrimenti non si potrebbe precisare quando una affermazione vale in una interpretazione o meno).

Ma le motivazioni indicate non sono le sole che portano alla considerazione di linguaggi formali. Un'altra fonte per questa esigenza è l'informatica.

Come indica l'origine etimologica della parola informatica (informazione automatica), questa si occupa di come trasmettere ed elaborare informazioni in modo automatico, attraverso opportune macchine.

A volte si pensa che solo l'uomo sia in grado di elaborare informazioni, detto altrimenti di ragionare, e può sorprendere il ricorso a delle macchine per effettuare una tale operazione, a meno che non si tratti di macchine intelligenti. Spesso i computers vengono chiamati proprio macchine intelligenti, ma, in effetti, sono autentiche macchine che eseguono solo le operazioni per cui sono state costruite, senza sapere ciò che fanno. Come possono allora elaborare informazioni?

Mentre nella comunicazione interpersonale si può assumere una conoscenza dei significati delle parole da parte degli interlocutori, conoscenza a cui si può ricorrere per cogliere il messaggio, quando questo passa attraverso una macchina, ed è eventualmente elaborato, non si possono utilizzare né significato, né ingegno per realizzare la comunicazione e l'elaborazione dell'informazione. L'unica cosa su cui può operare una macchina è la forma linguistica del messaggio, la sua rappresentazione che deve essere ben architettata per poter essere accettata dalla macchina ed essere utile ad essa.

Come si vedrà dallo studio che seguirà, introducendo opportunamente un linguaggio, si possono trovare delle operazioni di trasformazione delle espressioni linguistiche che portano da espressioni con un certo significato ad espressioni il cui significato è ottenuto dal significato precedente mediante operazioni mentali sui significati (ragionando). Sicché al posto di operare sui significati (attività riservata a chi comprende i significati), si può equivalentemente operare sulle espressioni di questi, attività (chiamata calcolo) eseguibile anche da chi non comprende il significato di quanto si sta facendo.

L'esistenza di questa attività parallela, che sarà illustrata nello studio successivo, suggerisce la possibilità di architettare e costruire macchine (prototipi di stupidità) che possano elaborare i significati semplicemente elaborando inconsapevolmente, ma comandate da chi sa cosa si vuol ottenere, le espressioni di un opportuno linguaggio.

Ecco l'esigenza di un linguaggio ben realizzato, eventualmente artificialmente costruito, per poter esser utilizzato nelle comunicazioni attraverso una macchina: l'esigenza di un linguaggio formale.

Così, volendo automatizzare e controllare come si ragiona, cioè come si opera nei modelli mentali, dobbiamo studiare come questo operare si manifesti attraverso il linguaggio. Ecco allora l'importanza dello studio delle potenzialità e dei limiti del linguaggio, e, di conseguenza della logica se questa significa studiare proprio ciò.

Si vedrà che i linguaggi formali, non possono fondare la conoscenza (cioè permettere di cogliere tutti i significati e comunicarli senza trascurarne aspetti), a causa del regresso infinito insito nelle definizioni esplicite, e della non univoca indicazione di significato da parte delle definizioni implicite che indichino strutture finite arbitrariamente grandi o infinite (fatto che sarà provato proprio da questo studio). Tuttavia i linguaggi formali possono essere di grande aiuto nel precisare nozioni che non hanno manifestazioni concrete e che non possono essere determinate completamente, permettendo di esprimere dubbi sulla loro costituzione e eventuali risposte a tali dubbi.

Ciò si constata con particolare facilità nel campo della matematica, priva com'è di nozioni concrete e non completamente precisate (nessuno ha mai stretto la mano a un numero, né conosce tutte le proprietà dei numeri, che non potranno mai essere completamente individuate, come verrà giustificato alla fine di questi studi), ma piena di nozioni elaborate mentalmente, sgrezzate e approfondite in modo sempre più fino, ma mai completo.

E ciò fornisce una ulteriore motivazione per sviluppare e studiare linguaggi formali, oggetto.

Quando il linguaggio diventa oggetto di studio, esso diventa un **linguaggio oggetto**, di cui parliamo ovviamente usando un linguaggio che dobbiamo già conoscere, questo sarà chiamato **metalinguaggio**.

Come deve essere il linguaggio oggetto? Può essere un linguaggio naturale?

Non proprio, un po' per l'imprecisione di un qualsiasi linguaggio naturale. Direi che per forza i linguaggi naturali devono essere imprecisi a causa dei modi e degli scopi per cui sono sorti: devono rispondere alle esigenze umane di comunicazione qualunque sia l'argomento che si vuol trattare, e, senza perdere le precedenti doti di comunicabilità, devono svilupparsi nel tempo per rispondere alle nuove esigenze espressive anche riguardo a nozioni elaborate ex novo, oppure vaghe e forse non completamente esprimibili in alcun linguaggio formale meccanizzabile.

Di più, in un linguaggio naturale la stessa costruzione sintattica (cioè la determinazione delle successioni di simboli dell'alfabeto che vogliamo accettare per costruire dei discorsi) è regolata, a volte, da criteri che coinvolgono la semantica, cioè il significato dei termini usati. Ad esempio, si considerino le frasi "questo fiore è profumato" e "questo numero è pari": esse hanno la stessa strutturazione sintattica. Anche le seguenti frasi "questo fiore è pari" e "questo numero è profumato" hanno quella stessa strutturazione sintattica, ma non sono accettate, non tanto per scorrettezze sintattiche, ma per il significato degli aggettivi che non si applica ai rispettivi soggetti. Questa presenza di aspetti del significato anche nel precisare la strutturazione sintattica del linguaggio naturale impedisce un controllo puramente sintattico sulla correttezza dei ragionamenti, che, invece, si vorrebbe e si può ottenere attraverso linguaggi opportunamente ben costruiti. Per chiarire questo concetto vale la pena presentare un esempio a tutti noto.

Noi usiamo la notazione araba per indicare i numeri naturali. Questa notazione usa le cifre, simboli per indicare i numeri dallo zero al nove, e sfrutta la posizione delle cifre nella scrittura dei numeri. Sappiamo anche che i romani adottavano una notazione completamente diversa che partiva dai simboli I, V, X, L, C, D, M e ancora sfruttava la posizione, ma in modo diverso. Anche i romani, come noi, sapevano fare le operazioni fondamentali: i risultati della addizione e della moltiplicazione non dipendono dalla notazione ma dai numeri a cui si applicano queste operazioni. Però è molto più facile e sicuro eseguire, ad esempio, l' addizione di due numeri naturali a e b usando la notazione araba. Infatti, invece che effettuare l'operazione di passaggio al successore b volte a partire dal numero a (con la probabile possibilità di perdere il conto se il numero b è grande) e poi indicare il numero ottenuto con la notazione voluta, è più semplice usare il ben noto algoritmo della somma che opera sulle scritture in notazione araba dei numeri a e b per dare una scrittura che indica il numero somma, sempre nella notazione araba. Analogamente per la moltiplicazione si può operare sulla scrittura araba dei numeri da moltiplicare per ottenere la scrittura del prodotto. Cioè, con un buon linguaggio, ad una operazione tra gli enti che sono i significati di certi nomi, si può sostituire un'operazione tra i nomi che porta, correttamente, in modo facilmente controllabile e senza far ricorso alla comprensione dei significati (dunque in modo meccanizzabile), al nome dell'ente risultato dell'operazione.

La notazione romana dei numeri, ed anche quella mediante il linguaggio naturale, non consentono questo interessante modo di procedere operando sul linguaggio invece che sugli enti indicati dal linguaggio (in particolare per la moltiplicazione), ma richiedono di conoscere il significato dei vocaboli per poter pervenire al risultato. Sicuramente il linguaggio naturale non è atto a poter essere elaborato da una macchina, che certo non è intelligente e non opera sui significati, ma neppure può essere usato come linguaggio oggetto di studio, perché sarebbe un oggetto mal definito e sfuggevole, dal momento che è un linguaggio vivo e in continua trasformazione.

Nonostante il linguaggio naturale sia così comodo, ben conosciuto, ed utilizzato anche in questo momento per comunicare quanto si sta indagando, le motivazioni appena viste fanno desiderare di costruire un linguaggio che funzioni almeno altrettanto bene quanto la notazione araba per i numeri naturali, ma esteso ad un campo ben più largo. Certo non si può pensare ad un linguaggio omnicomprensivo, per i motivi già detti riguardo ai linguaggi naturali, e ci si accontenterà di un linguaggio in grado di descrivere almeno situazioni matematiche.

Ovviamente, non si vuole che il linguaggio formale arrivi ad esprimere e dedurre (cioè controllare come accettabile) una qualsiasi stupidaggine, eventualmente una contraddizione. Attenzione, però, che, proprio a causa di questo desiderio, nello studio di un linguaggio formale non è sufficiente determinare cosa appartiene al linguaggio, cosa si deduce, cosa è vero in certe interpretazioni, ma anche cosa non appartiene al linguaggio, cosa non si deduce, cosa non è vero in quelle interpretazioni; ed il problema (come tutti i problemi di impossibilità) cambia ordine di difficoltà.

I problemi di impossibilità non hanno una risposta assoluta, ma dipendono dagli strumenti concessi per la soluzione, che vanno precisati, perché è rispetto ad essi che la soluzione può esserci o meno. Si pensi ad esempio al classico problema della quadratura del cerchio che non ha soluzioni con riga e compasso, ma che si risolve facilmente disponendo dei numeri reali e del passaggio al limite; o al problema di trovare le soluzioni dell'equazione $x^2-c = 0$ che, al variare dell'interpretazione di c tra 4, 2,-1, ha o non ha soluzioni in funzione del campo numerico in cui si cercano tali soluzioni.

Così, nel nostro caso, bisognerà precisare in modo definitivo quali sono gli strumenti concessi, e ancora una volta ci si accorge che il linguaggio comune, vivo ed in continua evoluzione, non è adatto per questo studio. Abbiamo bisogno di un linguaggio in cui siano ben precisate le espressioni da accettare e quelle da non accettare, al limite un oggetto artificialmente costruito allo scopo, ma che si comporti come un linguaggio, cioè sia almeno in grado di descrivere situazioni. Si è tornati così a sentir bisogno dello studio dei limiti e delle potenzialità di un linguaggio oggetto opportunamente costruito per le esigenze esposte (e qui l'enfasi è sul linguaggio costruito per quelle esigenze) o, come si usa dire, un linguaggio formale.

2. LE STRUTTURE.

Vistane l'esigenza, vi vuole passare all'introduzione di un linguaggio artificialmente costruito. Almeno inizialmente, ci si limita a linguaggi atti a descrivere situazioni, sull'esempio del linguaggio delle cifre arabe, ma capace di descrivere una qualsiasi situazione e non solo ciò che avviene tra numeri naturali. Ma prima ancora di vedere cosa ciò significhi e comporti, si noti una caratteristica che il linguaggio deve avere: deve essere sempre possibile riconoscere in modo effettivo le sue espressioni, che dovranno essere di lunghezza finita.

Poiché il linguaggio dovrà essere in grado di **descrivere** una qualsiasi situazione, si cercherà anzitutto di analizzare cosa c'è in comune tra le varie situazioni, quali sono i costituenti di una qualsiasi situazione, prima di cercare un modo per descriverla. Questa domanda chiede di cogliere ciò che è comune in tutte le specifiche situazioni.

Astraendo il più possibile dalle particolarità di ogni singola situazione per offrire un concetto utilizzabile al massimo, si può dire che in ogni situazione ci sono degli elementi, degli oggetti, tra i quali ci sono delle relazioni che interessano.

Ecco dunque il concetto di **struttura** (che vuole cogliere quanto c'è in comune tra le varie situazioni): una struttura $\mathfrak{A}$ è una coppia ordinata il cui primo elemento è un insieme non vuoto (per non banalizzare il tutto) A, detto **universo** (in cui sono raccolti gli oggetti della situazione), e il cui secondo elemento è un insieme non vuoto $\mathcal{R}$ di **re-**

lazioni R su A, ciascuna con la sua arietà maggiore di zero, cioè sottinsiemi del prodotto cartesiano di A con sé stesso tante volte quante viene specificato dall'arietà della relazione (queste sono le relazioni che ci interessano nella situazione). Così la relazione R di arietà n è un insieme di n-uple ordinate di elementi che appartengono ad A.

Si noti subito che abbiamo appena introdotto i nomi $\mathfrak{A}$ per la struttura, A per l'universo, $\mathcal{R}$ per l'insieme delle relazioni che ci interessano, R per una generica relazione di questo insieme, ma tutti questi nomi non sono simboli del linguaggio che vogliamo costruire, ma sono nomi nel linguaggio, diciamolo esterno, che usiamo per descrivere sia una struttura, che un linguaggio artificiale e i rapporti tra questi, linguaggio esterno che nel nostro caso è l'italiano arricchito di alcuni simboli e che, come già detto, viene chiamato metalinguaggio.

Si noti anche che la conoscenza del metalinguaggio deve essere presupposta alla conoscenza del linguaggio artificiale che costruiremo, e che questo, dunque, non potrà essere utilizzato a fondamento del comportamento del metalinguaggio (avremo modo di tornare su questa osservazione in vari momenti).

Spesso tra le relazioni si suole mettere in evidenza alcune tra quelle particolari relazioni che sono le **funzioni** n-arie totali, cioè le relazioni (n+1)-arie tali che comunque scelti ordinatamente n elementi dell'universo c'è un unico elemento che, ultimo dopo gli altri n, costituisce una (n+1)-upla ordinata della relazione; tali relazioni vengono dette totali e univoche. Si indichi con $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni messe in evidenza. Per tali relazioni, si usa considerare l'operazione di applicazione ad un'n-upla ordinata, che è l'operazione che ad una qualsiasi n-upla ordinata di elementi dell'universo associa l'elemento dell'universo, che, considerato come (n+1)-esimo dopo gli altri n, dà un'(n+1)-upla ordinata che è un elemento della relazione: tale elemento è anche detto l'immagine dell'n-upla ordinata data attraverso la funzione. L'arietà delle funzioni può essere anche 0 (allora la funzione è una relazione totale univoca 1-aria), e in tal caso alla funzione appartiene un solo insieme ordinato che ha un solo elemento, appartenente all'universo, e viene chiamata **costante individuale** perché mette in evidenza un particolare elemento dell'universo. In questo caso la funzione si applica solo alle 0-uple (che non esistono, e dunque si applica a niente), e l'immagine attraverso la funzione è l'unico elemento associato. Si noti che le costanti individuali, essendo funzioni 0-arie su A, sono elementi dell'universo A, sicché l'insieme delle costanti individuali, che si indicherà con $\mathcal{C}$, è un sottinsieme di A, non necessariamente tutto A, ma costituito da quegli elementi di A che hanno un particolare interesse tanto da essere messi in evidenza.

Separando le funzioni totali messe in evidenza dalle relazioni e le costanti tra queste funzioni, una struttura $\mathfrak{A}$ diventa una quaterna ordinata $(A,\mathcal{R},\mathcal{F},\mathcal{C})$ il cui primo elemento è l'insieme non vuoto A, detto universo, il secondo elemento è l'insieme non vuoto $\mathcal{R}$ delle relazioni su A che si vogliono considerare nella struttura, eventualmente privato di quelle che considereremo tra le funzioni totali (questo insieme $\mathcal{R}$ non include necessariamente tutte le relazioni su A, ma solo alcune, quelle che interessano e che vengono considerate nella struttura), il terzo elemento (eventualmente vuoto) è l'insieme $\mathcal{F}$ delle funzioni totali su A che si vogliono considerare nella struttura che non sono costanti individuali (come prima, questo insieme $\mathcal{F}$ non include necessariamente tutte le funzioni totali su A non 0-arie, ma solo alcune, quelle che interessano e che vengono considerate nella struttura), e il quarto è l'insieme $\mathcal{C}$ (eventualmente vuoto) delle costanti individuali che si vogliono considerare nella struttura, che sono particolari elementi di A (ancora, questo insieme C non include necessariamente tutte le funzioni totali 0-arie, ma solo alcune, quelle che interessano e che vengono considerate nella struttura).

3. IL LINGUAGGIO.

Per descrivere il comportamento della struttura va introdotto un linguaggio adatto. Poiché si vogliono considerare le strutture nella loro generalità, non c'è alcuna informazione specifica sulle eventuali caratterizzazioni o rapporti tra le relazioni o sulle funzioni della struttura, così vanno prese come elementi non definiti (qui per definire si intende precisare mediante una frase che usa altre parole il cui significato è già noto), primitivi come si suole dire, per indicare i quali sarà necessario un apposito simbolo del linguaggio. Pertanto iniziamo introducendo nel linguaggio almeno un simbolo, che chiameremo **predicato**, in corrispondenza di ciascuna relazione della struttura, almeno un simbolo, che chiameremo **simbolo per funzione**, in corrispondenza di ciascuna funzione della struttura e almeno un simbolo, che chiameremo **simbolo per costante**, in corrispondenza di ciascuna costante della struttura, i simboli di quest'ultimo tipo possono anche essere detti i nomi dei corrispondenti elementi dell'universo che sono le costanti; ovviamente si intende che ad elementi diversi della struttura corrispondano simboli diversi. A ciascun simbolo così introdotto sarà associata un'arietà uguale a quella del predicato o della funzione a cui corrisponde (si ricordi che le costanti sono funzioni di arietà zero). (Si vedrà in seguito l'uso dell'arietà dei simboli). Un tal linguaggio verrà detto **adatto** o **adeguato** alla struttura.

Iniziamo anche ad indicare come si **interpretano** in una struttura gli elementi del linguaggio, cioè qual è il loro significato, cominciando da quelli finora introdotti: i predicati si interpretano nelle relazioni a cui corrispondono, i simboli per funzione si interpretano nelle funzioni a cui corrispondono e i simboli per costante si interpretano nelle costanti a cui corrispondono. Si noti che i simboli del linguaggio finora introdotti non hanno, di per sé alcun significato, ma lo acquistano solo se collegati ad una struttura in cui vengono interpretati. L'interpretazione degli elementi del linguaggio finora introdotti e' allora la funzione metalinguistica (funzione interpretazione) che lega i predicati alle corrispondenti relazioni della struttura in cui vengono interpretati, i simboli per funzione alle funzioni della stessa struttura, i simboli per costante alle costanti ancora della stessa struttura. Come dichiarato, tale funzione dovrà preservare l'arietà tra predicati e relazioni corrispondenti e tra simboli per funzione e funzioni corrispondenti.

Detto come assegnare un significato agli elementi del linguaggio finora introdotti, per mezzo di una funzione interpretazione in una struttura, si vuol sottolineare subito un fatto molto importante. Si è partiti da una struttura e si sta cercando di costruire un linguaggio adatto a **descrivere** ciò che avviene in quella struttura. Ma lo stesso linguaggio è adatto anche a descrivere ciò che avviene in altre strutture che abbiano una certa analogia con quella data. Anzi questa possibilità deve essere una caratteristica del linguaggio che si sta costruendo. Per cercare di giustificare queste ultime affermazioni si considerino delle situazioni concrete che ne fanno emergere l'esigenza.

Sono molte, e tra loro diverse, le relazioni che si dicono "uguaglianza" nel linguaggio comune. Ad esempio, spesso si dice che due oggetti sono uguali per dire che hanno certe caratteristiche in comune pur essendo oggetti diversi. Anche se ciascuna relazione che chiamiamo uguaglianza sussiste tra due individui esattamente se tra questi ci sono delle ben precisate caratteristiche in comune (eventualmente quella di essere lo stesso elemento dell'universo), esse possono differire tra loro sia per l'insieme degli elementi a cui si applicano, che per quali caratteristiche devono essere condivise tra due elementi. Così si suole usare sempre lo stesso simbolo nel linguaggio artificiale in costruzione per indicare le varie relazioni che chiamiamo uguaglianza, ma quel simbolo, che è un predicato binario, sarà fatto corrispondere, mediante la funzione interpretazione, a relazioni diverse nelle varie strutture (diremo anche che quel predicato sara' interpretato in relazioni diverse).

Pensiamo all'operazione addizione: è una funzione binaria che è diversa al variare dell'ambito numerico in cui viene considerata. Anche se l'operazione di addizione tra naturali è diversa da quella tra razionali, ad esempio, tuttavia le analogie presenti ci consigliano di usare lo stesso nome per entrambe le operazioni. Così quel simbolo sarà fatto corrispondere a funzioni binarie diverse nelle diverse strutture.

Ancora, a volte si vuol cogliere l'analogia di comportamento tra varie relazioni. Ad esempio si può voler considerare la relazione di immediato successore tra numeri naturali quasi come una generazione ed usare, in modo figurato, la relazione di figliolanza tra numeri dicendo, ad esempio, che tre è figlio di due. Questo uso in modo figurato di nomi si realizza dando allo stesso elemento del linguaggio interpretazioni diverse in strutture diverse.

Anche se negli esempi considerati ci sono dei particolari legami tra relazioni o funzioni in diverse strutture a cui si fa corrispondere lo stesso simbolo, non è opportuno richiedere la presenza di questi legami perché ciò limiterebbe, artificiosamente e dall'esterno, il modo di interpretare un linguaggio in una struttura (ovvero assegnare un significato ai simboli, cioè far corrispondere ai predicati una relazione, ai simboli di funzione una funzione, ai simboli di costanti una costante mantenendo l'arietà).

C'è un altro ordine di motivazioni che giustificano il fatto che un simbolo possa essere interpretato in vari modi in varie strutture. Qualsiasi linguaggio è uno strumento comunicativo, e, anche se si vuole considerare un linguaggio atto a descrivere una struttura, oltre a chi descrive c'è anche chi riceve la comunicazione, e questi dovrebbe farsi un'idea della struttura descritta dalla descrizione. Ma perché l'immagine che l'ascoltatore si costruisce dalla descrizione della struttura dovrebbe coincidere con la struttura descritta? A priori bisogna supporre che l'immagine che l'ascoltatore si fa possa corrispondere ad una diversa interpretazione dei simboli del linguaggio. L'usuale esperienza di fraintendimenti conferma la possibilità di diverse interpretazioni in diverse strutture, anche se si potrebbe auspicare che un linguaggio opportunamente costruito debba permettere di individuare univocamente l'interpretazione voluta nella struttura che si intende descrivere. Alla fine si vedrà che ciò è chiedere troppo poiché si dimostrerà che un linguaggio non può individuare univocamente una interpretazione in un'unica struttura che abbia un universo infinito.

Così il linguaggio artificiale che stiamo costruendo non avrà solo l'interpretazione, in qualche modo privilegiata, che rende quel linguaggio atto a descrivere ciò che avviene nella struttura oggetto della nostra attenzione, ma potrà essere interpretato anche in altre strutture. Così nelle interpretazioni bisognerà specificare, oltre l'universo, quali relazioni, quali funzioni e quali costanti sono associate a ciascun predicato, a ciascun simbolo di funzione e a ciascun simbolo di costante rispettivamente, e gli enti, nelle varie strutture, corrispondenti allo stesso simbolo del linguaggio dovranno avere la stessa arietà. Sicché ci sarà un legame tra le varie strutture in cui può essere interpretato un certo linguaggio, che è il seguente: il medesimo linguaggio è adatto per ciascuna di quelle strutture (come detto, un linguaggio è adatto ad una struttura se c'è una corrispondenza (che abbiamo chiamato funzione interpretazione) che associa ad ogni predicato una relazione, ad ogni simbolo di funzione una funzione, ad ogni simbolo per costante una costante mantenendo l'arietà). In un certo senso si può dire che non solo un linguaggio è adatto a tutte le strutture che si prestano ad essere descritte con quel linguaggio, ma anche che quelle strutture sono adatte a quel linguaggio. Sicché la relazione tra strutture e linguaggi di essere adatti uno per l'altra può essere considerata simmetrica. Così si può parlare di strutture adatte allo stesso linguaggio, invece che di un unico linguaggio adatto a più strutture. Due strutture adatte per lo stesso linguaggio si dicono **strutture dello stesso tipo**.

4. I TERMINI.

Si è detto che ciascun simbolo per costante può essere considerato il nome della corrispondente costante. Attraverso le funzioni e i loro simboli, si può cercare di dar un nome anche ad altri elementi dell'universo che non sono costanti (l'immagine di funzioni 0-arie) della struttura: questo metodo è noto e lo si usa ad esempio quando si indica il numero 1 come il successore di 0, oppure una certa persona come il padre di un'altra. In effetti, se si applica una funzione n-aria ad un'n-upla di elementi dell'universo si ottiene un unico elemento dell'universo. Possiamo allora pensare di dare un nome a quel elemento dell'universo sfruttando il simbolo per la funzione e i nomi per ciascuno degli elementi dell'n-upla. Di fatto si deve anzitutto precisare l'uso sintattico del simbolo di funzione, cioè come debba entrare in scritture (successioni finite di simboli) assieme ad altri simboli. Si ricordi anzitutto che le funzioni hanno una certa arietà: essa dovrà essere anche un elemento caratterizzante l'uso del simbolo per quella funzione per cogliere la dimensione della successione a cui è applicata la funzione. Così si decide che un simbolo di funzione debba essere seguito da tanti nomi di individui quanti sono previsti dall'arietà del simbolo di funzione, che è la stessa dell'arietà della funzione a cui il simbolo è associato.

Si sarà notato che è nostra intenzione ottenere nuovi nomi per elementi facendo seguire al simbolo per funzione nomi per elementi, ma non si sa cosa siano in generale i nomi per elementi. Sembra che ci sia una certa circolarità in quanto si sta per definire. Ma non è così perché si può partire da quei nomi per elementi che sono i simboli per costante, ed ottenerne degli altri usando il metodo che si sta delineando, ottenuti i quali si può riapplicare il metodo a quanto si ha a disposizione ora per ottenerne degli altri ancora, e così via iterando la procedura. Ciò porta a dare una definizione ricorsiva di questi primi nomi per elementi, che saranno chiamati **termini** (più avanti si introdurranno altri termini). Ciascun simbolo per costante è un termine; ed inoltre, se f è un simbolo di funzione n-ario e $t_1,..,t_n$ sono successioni finite di simboli già riconosciute come termini, allora anche la successione finita di simboli costituita da f seguito prima dai simboli che costituiscono t_1, poi dai simboli che costituiscono t_2,..., ed infine dai simboli che costituiscono t_n (che sarà indicata come $ft_1... t_n$) è un termine. Si noti che $t_1,..,t_n$ non sono simboli del linguaggio che si sta costruendo, ma indicano particolari successioni finite di simboli di detto linguaggio, quelle che possono essere riconosciute come termini proprio in base a quanto si è appena stabilito.

Si cercherà ora di interpretare nella struttura data queste prime scritture chiamate termini, cioè dare loro significato. L' interpretazione in una certa struttura $\mathfrak{A}$ di un termine che sia un simbolo per costante è la costante a cui quel simbolo è associato nella struttura $\mathfrak{A}$, e dunque è un elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$. L'interpretazione del termine $ft_1...t_n$ è quel elemento a dell'universo di $\mathfrak{A}$ che è immagine attraverso la funzione F, interpretazione in $\mathfrak{A}$ del simbolo f (cioè la funzione di $\mathfrak{A}$ cui è associato il simbolo f), dell'n-upla $(a_1,.. .,a_n)$ di elementi dell'universo di $\mathfrak{A}$ che sono le interpretazioni in $\mathfrak{A}$ dei termini $t_1,..., t_n$, cioè, se si indica con $(\ )^{\mathfrak{A}}$ l'operazione di interpretazione nella struttura $\mathfrak{A}$, $(ft_1...t_n)^{\mathfrak{A}}= (f)^{\mathfrak{A}}((t_1)^{\mathfrak{A}},.., (t_n)^{\mathfrak{A}})=F(a_1,...,a_n)=a$.
Chiaramente, anche questa è una definizione ricorsiva che ha la sua base nell'interpretazione in $\mathfrak{A}$ dei termini che sono simboli per costanti (se $\underline{c}$ è un simbolo per costante che è associato alla costante c nella struttura $\mathfrak{A}$, allora $(\underline{c})^{\mathfrak{A}}=c$), e prosegue supponendo che sia già precisata l'interpretazione, nella struttura $\mathfrak{A}$, di certi termini, $t_1,..., t_n$ (sia questa interpretazione l'n-upla $((t_1)^{\mathfrak{A}},..., (t_n)^{\mathfrak{A}})$ che è un'n-upla di elementi dell'universo, la si indichi con $(a_1,...,a_n)$), per dare quella di un termine, $ft_1...t_n$, ottenuto dai termini $t_1,.. ., t_n$ anteponendo alle loro scritture in successione un simbolo per funzione f della dovuta arietà (appunto, se $(f)^{\mathfrak{A}}$ è F e se $((t_1)^{\mathfrak{A}},..., (t_n)^{\mathfrak{A}})$ è $(a_1,...,a_n)$, allora $(ft_1...t_n)^{\mathfrak{A}}$ è $F(a_1,...,a_n)$).

5. LE FORMULE ATOMICHE.

Si cercherà ora di esprimere, attraverso il linguaggio, il fatto che una n-upla di individui dell'universo di una struttura appartenga ad una certa relazione n-aria della struttura, o, come si usa dire, che soddisfi quella relazione.
Si sono già introdotti i predicati, simboli per le relazioni. Per un motivo del tutto analogo a quello visto per i simboli per funzioni, anche a ciascun predicato si è assegnata un'arietà, quella della relazione a cui corrisponde.
Per ora ci si accontenterà di esprimere, nel linguaggio che si sta costruendo, quando un'n-upla $(a_1,...,a_n)$ di elementi che abbiano nome (al momento si considereranno solo tali elementi) soddisfi o meno una relazione n-aria R, si vuole cioè esprimere un legame tra una tale n-upla ed una relazione. Per fare ciò si comincia col convenire di usare la scrittura $Pt_1...t_n$ (cioè la scrittura che inizia con il simbolo P seguito dai simboli che costituiscono t_1, ..., seguiti dai simboli che costituiscono t_n) dove P è il predicato che si interpreta, nella struttura $\mathfrak{A}$, nella relazione R, e $t_1,..,t_n$ sono termini che si interpretano in $\mathfrak{A}$ rispettivamente negli elementi $a_1,...,a_n$ dell'universo di $\mathfrak{A}$, ed n è l'arietà della relazione e del predicato corrispondente.
Si chiamerà **formula atomica** una scrittura del tipo $Pt_1...t_n$: un predicato seguito da tanti termini quanti sono indicati dall'arietà del predicato.
Si noti che anche una formula atomica è una successione finita di simboli del linguaggio $\mathcal{L}$.
Ci si pone ora il problema di interpretare in una struttura la scrittura $Pt_1...t_n$, di darle significato.
Si è abituati a dire che una affermazione è vera quando le cose stanno esattamente come l'affermazione le descrive, e si potrebbe adottare questa terminologia anche nel caso del linguaggio artificiale che si sta cercando di costruire. Si era detto che il nostro

vuol essere un linguaggio per descrivere situazioni, ed ora si è proprio al punto di affermare se quanto dice l'espressione del linguaggio descrive o meno un aspetto della situazione.

Così si dirà che la scrittura $Pt_1..t_n$ è **vera** in una struttura $\mathfrak{A}$ se l'n-upla dei significati in $\mathfrak{A}$ dei termini $t_1,..,t_n$ appartiene alla relazione che è l'interpretazione in $\mathfrak{A}$ del predicato P, altrimenti si dirà che è **falsa**; cioè $(Pt_1...t_n)^{\mathfrak{A}}=V$ se $((t_1)^{\mathfrak{A}},...,(t_n)^{\mathfrak{A}}) \in (P)^{\mathfrak{A}}$, mentre $(Pt_1...t_n)^{\mathfrak{A}}=F$ se $((t_1)^{\mathfrak{A}},..., (t_n)^{\mathfrak{A}}) \notin (P)^{\mathfrak{A}}$. V ed F sono i segni metalinguistici che vengono usati per indicare il vero e il falso rispettivamente.

Si noti che V ed F non appartengono al linguaggio artificiale che si sta introducendo, chiamiamolo $\mathcal{L}$, ma sono abbreviazioni dell'italiano (del castellano nella traduzione), linguaggio che si sta usando per parlare della sintassi e della semantica (il modo di interpretare gli elementi della sintassi) delle espressioni linguistiche di $\mathcal{L}$.

Ancora un'osservazione su qual è l'accezione della parola vero che si sta usando. In italiano questa parola ha vari significati, tra i quali alcuni emergono in particolar modo.

In una prima accezione si parla di vero, del vero motivo, della vera causa, quando si vuole individuare il motivo principale, forse determinante, che ha generato una certa situazione.

In una seconda accezione si parla di vero, di cercare il vero, quando non si sa come stanno le cose e lo si vorrebbe scoprire: è la verità del giudice che cerca di scoprire come si sono svolti i fatti avendo a disposizione delle informazioni a volta anche contraddittorie. In questa circostanza il giudice si chiede qual è la verità, volendo domandarsi cosa è avvenuto di fatto. In questo caso il linguaggio non è coinvolto nel concetto di verità. Questa riguarda solo dei fatti: si tratta di individuare, tra i fatti riportati dai testimoni, quelli che sono effettivamente accaduti.

Diverso è il significato nella terza accezione che si considererà. Sappiamo che si può cercare di nascondere ad altri il motivo di una scelta personale e giustificarla con delle scuse, cioè delle motivazioni corrette e plausibili ma che non sono la vera motivazione, quella che ha provocato la scelta fatta. Ecco un altro significato della parola vero: qui sta ad indicare la motivazione essenziale che ha determinato una scelta.

Così, finora, l'alternativa nello scegliere che significato dare alla parola verità è almeno tra i seguenti significati: causa principale, ricerca di come stanno le cose, e motivazione determinante di una scelta.

L'uso che si farà qui della parola vero è ancora diverso e sarà il seguente: si dirà vera una espressione del linguaggio se racconta i fatti esattamente come sono, cioè si dirà vera un'espressione del linguaggio se è una descrizione fedele di aspetti di una situazione nota. Questa è, in qualche modo, la verità del notaio che attesta e dichiara ciò che conosce. Nel caso che si sta ora considerando, <u>**i fatti devono essere completamente conosciuti, e anche quando non lo saranno si supporrà che lo siano**</u>. Inoltre si attribuisce la verità ad un'espressione del linguaggio, relativamente ad una interpretazione in una struttura ben precisata e completamente nota (e non ai fatti), e si dirà che quell'espressione è vera in quell'interpretazione in quella struttura esattamente nel caso in cui ciò che afferma è proprio come stanno effettivamente i fatti collegati all'espressione dall'interpretazione nella struttura, <u>struttura che</u>, ripeto, <u>deve essere supposta perfettamente nota</u>.

Nel proporre di accettare qui l'accezione appena precisata della nozione di vero, chiaramente si compie una ben precisa scelta che coinvolgerà gli sviluppi successivi. La logica studiata oggi non si limita al caso che si è indicato, cioè all'ipotesi che la situazione sia completamente nota, ma quello scelto è l'ambito della logica classica, e ritengo che sia opportuno farsi un'idea più precisa di cosa sia la logica classica prima di passare alle logiche non classiche.

Si è così precisato un po' meglio cosa si intende per vero, e di conseguenza anche per falso (che vuol dire non vero), che sono i possibili significati di una formula atomica.

6. LE FORMULE.

Ma una formula atomica si limita a descrivere un aspetto della struttura in considerazione, mentre, in genere, sono molti gli aspetti di una struttura che si vogliono descrivere. Per far fronte a tale molteplicità di aspetti, si dovranno usare varie affermazioni, magari combinandole in un'unica espressione. Si può prendere lo spunto dal linguaggio naturale: in esso si formulano frasi del tipo "succede un fatto A ed anche un altro B" oppure "o succede una certo fatto C o non succede un altro D". Volendo dare una analoga potenzialità al linguaggio formale si dovranno introdurre varie modalità di combinare in un'unica descrizione descrizioni di aspetti di una struttura da descrivere. E' chiaro che anche il significato di quell'unica espressione, ottenuta componendone altre, dovrà essere il vero o il falso a seconda che l'espressione descriva la situazione come in effetti è o meno. Si chiamano **formule** queste espressioni del linguaggio $\mathcal{L}$. Le formule atomiche saranno particolari formule e il significato di una qualsiasi formula, atomica o non atomica, dovrà essere o il vero o il falso.

Poiché una formula più complessa dovrebbe essere la combinazione in un'unica espressione di formule che colgono solo particolari aspetti, e quanto essa descrive dipende da cosa descrivono le componenti e da come sono combinate (possono esserlo in modi diversi come è indicato dai due diversi esempi dal linguaggio naturale sopra riportati), si vuole che il valore di verità (l'essere vera o falsa) di una formula, cioè il suo significato, dipenda da quali sono i valori di verità delle formule che la compongono e da come sono combinate tra loro, e soltanto da ciò.

Evidentemente ci sono vari modi di combinare tra loro n-uple di valori di verità per ottenere corrispondenti valori di verità. Così, nello scrivere una formula che vuole combinare in un'unica espressione varie espressioni parziali, bisognerà avere una notazione per indicare quale è il modo di combinare i valori di verità delle varie espressioni parziali, modo che viene adottato per ottenere il valore di verità dell'espressione complessiva.

Sempre nello spirito che la sintassi debba essere indipendente dai significati attribuiti ai simboli, il modo di mettere assieme dei valori di verità per ottenere un valore di verità deve andar bene qualunque siano le componenti, e, perciò, deve essere precisato qualunque siano i valori di verità delle componenti.

Poiché i valori di verità sono solo due (V e F) e si vogliono combinare in una formula un prefissato numero finito n di componenti, i possibili modi di mettere assieme n valori di verità per ottenere dei valori di verità sono in numero finito, e precisamente tanti quanti sono i modi di associare dei valori di verità ad n-uple di valori di verità, cioè tanti quante sono le funzioni da n-uple di valori di verità nei valori di verità, ovverosia $2^{(2^n)}$, perché 2^n sono le n-uple di valori di verità. Si noti che queste funzioni non fanno parte della struttura in cui si vuole interpretare un linguaggio (non sono tra le funzioni o tra le relazioni di una struttura), e non sono neppure elementi del linguaggio (eventualmente lo saranno i loro nomi), ma sono modi di organizzare e accorpare le osservazioni su una struttura. Poiché i modi di mettere assieme n valori di verità per ottenere dei valori di verità sono, per ciascun numero naturale n, nel numero finito calcolato, ci vorrebbe una quantità numerabile di nomi per indicare queste funzioni sui valori di verità, ma non si riserverà un nome per quelle funzioni che possano essere generate da altre e che non siano di uso frequente.

Si chiameranno **connettivi** i simboli, che si aggiungeranno al linguaggio artificiale in costruzione $\mathcal{L}$, che saranno nomi di funzioni da n-uple di valori di verità nei valori di verità, e l'interpretazione di un connettivo sarà la funzione di cui è nome, che, si noti, è una interpretazione indipendente da quale sia la struttura adottata per l'interpretazione di altri simboli del linguaggio.

Si comincino a considerare le funzioni da $\{V,F\}^n$ in $\{V,F\}$ quando n è 1. Esse sono quattro e possono essere descritte mediante la seguente tavola che dice, per ciascuna delle quattro funzioni, quale valore di verità la funzione associa al valore di verità della componente.

	f_1'	f_2'	f_3'	f_4'
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F

Si noti che la funzione f_2' è la funzione identica ed è inutile avere un nome per essa: al posto della formula composta basta tenere la componente. Inoltre si potrà vedere, dopo l'introduzione delle funzioni binarie, che le funzioni f_1' e f_4' possono essere generate da altre funzioni, perciò non vale la pena di introdurre un nome neppure per queste. Infine, la funzione f_3' è quella che scambia i valori di verità; essa si comporta come l'usuale accezione del "non" in italiano (in castellano nella traduzione): per essa si sceglierà il simbolo $\neg$, simbolo che verrà letto "non" ed interpretato, appunto, nella funzione f_3.

Si considerino ora le funzioni da $\{V,F\}^n$ in $\{V,F\}$ quando n è 2. Sono 16 e, come prima, possono essere rappresentate mediante una tavola

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
V V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

La funzione f_2 ha un comportamento che ricorda quello del significato più usuale della disgiunzione "o" in italiano (in castellano nella traduzione). Le si assegna il simbolo $\vee$, simbolo che sarà chiamato "o" e che si interpreta nella funzione f_2.

La funzione f_8 ha un comportamento che ricorda quello del significato più usuale della congiunzione "e" in italiano (in castellano nella traduzione). Le si assegna il simbolo $\wedge$, simbolo che sarà chiamato "e" e che si interpreta nella funzione f_8.

Anche la funzione f_5 ha un comportamento particolare. Esso ricorda quello del significato a volte, in italiano (in castellano nella traduzione), della locuzione "se ... allora ...", o della locuzione "ogniqualvolta ... allora succede anche che ...", oppure anche di una certa accezione della parola "implica". Attenzione che spesso, in italiano, implica indica una consequenzialità, una causalità: qui non c'è niente di questo, il linguaggio artificiale che stiamo costruendo vuole solo descrivere situazioni, dire come stanno le cose, cosa succede quando altre cose succedono, senza darne i perché né una qualsiasi motivazione. Si assegna alla funzione f_5 il simbolo $\rightarrow$, simbolo che sarà chiamato "implica" e che si interpreta nella funzione f_5.

Una ulteriore funzione a cui spesso si da un nome è la f_7. Il suo comportamento ricorda quello della locuzione in italiano (in castellano nella traduzione) "se e solo se", ma ancora nell'accezione puramente descrittiva, senza alcuna intenzione di causa reciproca tra due affermazioni. Si assegna alla funzione f_7 il simbolo $\leftrightarrow$, simbolo che sarà chiamato "equivalente a" e che si interpreta nella funzione f_7.

Non interessa andare oltre nell'attribuzione di nomi alle funzioni indicate nelle due tabelle perché si dimostra che esse (ed anche tutte le funzioni di qualsiasi arietà sui valori di verità) sono tutte generabili o dalle due funzioni di simboli $\neg$ ed $\vee$, o dalle due funzioni di simboli $\neg$ ed $\wedge$, o dalle due funzioni di simboli $\neg$ ed $\rightarrow$. Si può fare anche di meglio: ciascuna delle funzioni f_9 e f_{15} , a cui assegniamo i simboli $|$ e $|'$ rispettivamente, da sola genera tutte le funzioni delle due tabelle (ed anche tutte le funzioni di qualsiasi arietà sui valori di verità). Ma, usando una di queste due ultime funzioni, la lettura diverrebbe tanto difficoltosa da sconsigliare la loro adozione.

Per dimostrare il risultato appena menzionato si fa vedere che le funzioni di simboli $\neg$, $\wedge$ ed $\vee$ sono ottenibili dalle coppie di funzioni o dalle singole funzioni sopra menzionate, e poi si dimostra che ogni altra funzione dalle n-uple di valori di verità nei valori di verità si ottiene dalle tre di simboli $\neg$, $\wedge$ ed $\vee$. La prima parte segue dalle seguenti uguaglianze:

$$\wedge(x_1,x_2)=\neg(\vee(\neg(x_1),\neg(x_2))),\ \vee(x_1,x_2)=\neg(\wedge(\neg(x_1),\neg(x_2))),\ \wedge(x_1,x_2)=\neg(\rightarrow(x_1,\neg(x_2))),$$
$$\vee(x_1,x_2)=\rightarrow(\neg(x_1),x_2),$$
$$\neg(x_1)=|(x_1,x_1),\ \neg(x_1)=|'(x_1,x_1),$$
$$\wedge(x_1,x_2)=|(|(x_1,x_2),|(x_1,x_2)),\ \vee(x_1,x_2)=|'(|'(x_1,x_2),|'(x_1,x_2)),$$

dove x_1 e x_2 sono variabili sui valori di verità e si è usata la solita notazione per le funzioni e la composizione di funzioni nel metalinguaggio. La prima uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\wedge$ è ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\vee$ (ovviamente $\neg$ ed $\vee$ sono ottenibili da loro stesse e non ripeteremo osservazioni di questo tipo nel seguito). La seconda uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\vee$ è ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\wedge$. La terza uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\wedge$ è ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\rightarrow$. La quarta uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\vee$ è ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\rightarrow$. La quinta e la sesta uguaglianza mostrano che la funzione di simbolo $\neg$ è ottenibile sia dalla funzione di simbolo $|$ che dalla funzione di simbolo $|'$. La settima uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\wedge$ è ottenibile dalla funzione di simbolo $|$. L'ottava uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\vee$ è ottenibile dalla funzione di simbolo $|'$. Ciò completa la dimostrazione della prima parte di quanto si è asserito, mentre la seconda parte sarà affrontata dopo la prossima osservazione.

Le funzioni di simboli $\wedge$ ed $\vee$ sono sia associative che commutative, sicché avrà senso usare non ambiguamente le notazioni $\wedge(x_1,...,x_n)$ e $\vee(x_1,...,x_n)$, pur essendo $\wedge$ ed $\vee$ simboli di funzioni binarie, intendendo con queste notazioni, ad esempio, $\wedge(x_1,\wedge(x_2,$

$\wedge(..,\wedge (x_{n-1}, x_n)...)))$ e $\vee(x_1,\vee(x_2,\vee(...,\vee (x_{n-1}, x_n)...)))$ rispettivamente. Così $\wedge$ ed $\vee$ sono divenuti anche simboli per particolari funzioni n-arie, con n>1, dai valori di verità nei valori di verità, che però sono ottenibili dalle funzioni binarie di simboli $\wedge$ ed $\vee$. Si osservi che la funzione n-aria $\wedge$ associa V solo all'n-upla costituita da soli V, mentre la funzione n-aria $\vee$ associa F solo all'n-pla costituita da soli F.

E' opportuno estendere le nozioni di funzioni n-arie di simbolo $\wedge$ e di simbolo $\vee$, anche ai casi in cui l'arietà è 1 o 0. L'estensione opportuna al caso di arietà 1 si ottiene sfruttando l'osservazione precedente che la funzione n-aria $\wedge$ associa V solo all'n-pla costituita da soli V, e analogamente per la funzione n-aria $\vee$, dal momento che questa caratterizzazione è del tutto applicabile anche al caso in cui n è 1. Per il caso n = 0, è opportuno ricordare che una funzione 0-aria dà un valore che non dipende dalla scelta di altri valori, essendo una relazione unaria univoca: essa indica un determinato elemento, ed è perciò anche detta relazione o funzione costante. Poiché si stanno considerando funzioni sui valori di verità, le costanti non possono che essere V o F. Scegliamo che la funzione 0-aria di simbolo $\wedge$ sia la costante V poiché al diminuire del numero dei valori di verità tra cui si prende la congiunzione si ottiene il valore V con maggior frequenza sui casi possibili (sempre in un solo caso, ma su un numero decrescente di possibilità). Invece scegliamo che la funzione 0-aria di simbolo $\vee$ sia la costante F poiché al diminuire del numero dei valori di verità tra cui si prende la disgiunzione si ottiene il valore F con maggior frequenza sui casi possibili (sempre in un solo caso, ma su un numero decrescente di possibilità).

Per quanto riguarda poi tutte le funzioni da $\{V,F\}^n$ in $\{V,F\}$, si dimostra che esse sono tutte generabili dalle funzioni $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (con $\wedge$ e $\vee$ delle arietà opportune), e perciò anche dalle funzioni che generano queste, per cui non introdurremo nel linguaggio $\mathcal{L}$ alcun altro nuovo simbolo in corrispondenza alle funzioni che possono essere generate.

Per dimostrare questa affermazione si consideri, per un numero naturale n scelto ad arbitrio, una funzione n-aria f dalle n-uple dei valori di verità nei valori di verità. Si indichi con $(a_1,a_2,...,a_i,...,a_{n-1},a_n)$ una n-upla di valori di verità tale che $f(a_1,a_2,...,a_i,...,a_{n-1},a_n) =V$. Se si è in tale caso, si considerino poi le funzioni 1-arie g_i, i=1,...,n, tali che g_i è la funzione identica se a_i è V mentre g_i è la funzione di simbolo $\neg$ se a_i è F. Si noti che la funzione n-aria $h_{a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n}$ definita da

$$h_{a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n}(x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n)=\wedge(g_1(x_1),g_2(x_2),...,g_{n-1}(x_{n-1}),g_n(x_n))$$

dà V se e solo se alle variabili $x_1,x_2,...,x_i,...,x_{n-1},x_n$ vengono attribuiti i valori di verità $a_1,a_2,...,a_i,..., a_{n-1},a_n$ rispettivamente. Si consideri la funzione n-aria ottenuta applicando la funzione di simbolo $\vee$ di arietà opportuna alle funzioni n-arie $h_{a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n}$ di indici tali che $f(a_1,a_2,...,a_i,...,a_{n-1},a_n)=V$. La funzione così ottenuta è uguale alla funzione f poiché a ciascuna n-upla di valori di verità le due funzioni associano lo stesso valore di verità.

A causa si questi risultati si decide di inserire nel linguaggio artificiale $\mathcal{L}$, che si sta costruendo, solo i simboli $\neg$ ed $\wedge$, che, come detto, saranno chiamati connettivi.

Si noti che, al contrario dei predicati e dei simboli per funzioni e per costanti il cui numero e arietà cambia a secondo del tipo di struttura per cui il linguaggio è adatto, e la cui interpretazione cambia da struttura a struttura, i connettivi sono sempre gli stessi in ogni linguaggio e hanno sempre la stessa interpretazione in ogni struttura: pertanto saranno detti **costanti logiche**, mentre i primi simboli, che variano da linguaggio a linguaggio, saranno detti **simboli propri**.

Si sono introdotti i connettivi per poter combinare assieme delle formule in nuove formule, vediamo finalmente come fare ciò, dal punto di vista sintattico (prima si era solo espresso il desiderio di ottenere qualcosa, le formule, che avesse un certo comportamento).
Così si definirà cosa si intende per **formula**.
Anzitutto le formule atomiche saranno formule, e poi, se φ e ψ sono scritture (successioni finite di simboli) già riconosciute come formule, allora anche $\neg\varphi$ e $\wedge\varphi\psi$ sono formule. Questa è chiaramente una definizione ricorsiva (che viene lasciata aperta perché in seguito si vorranno aggiungere altre formule) e per la quale valgono osservazioni analoghe a quelle già presentate per la definizione di termine.
In altre trattazioni, queste formule vengono scritte, con notazione infissa, come $(\neg\varphi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, ma allora ci vorrebbero le parentesi tra i simboli del linguaggio, cosa che non è necessaria, senza perdere in univocità di lettura, con la notazione prefissa precedente che si è adottata. Con questa seconda scrittura è più facile la lettura delle formule, anche se permangono opportune delle convenzioni sulla eliminazione delle parentesi, che altrimenti diventano troppo ingombranti. Inoltre spesso si usano anche le scritture

$$\vee\varphi\psi,\ \rightarrow\varphi\psi,\ \leftrightarrow\varphi\psi,$$

al posto delle scritture

$$\neg\wedge\neg\varphi\neg\psi,\ \neg\wedge\varphi\neg\psi,\ \wedge\neg\wedge\varphi\neg\psi\neg\wedge\psi\neg\varphi$$

rispettivamente, e le scritture $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ per indicare le prime. Sicché sarà adottato questo criterio: si useranno le scritture introdotte (con le usuali convenzioni sulle parentesi) come scritture nel metalinguaggio per indicare le corrispondenti scritture nel linguaggio $\mathcal{L}$ (che così non avrà parentesi).
L'interpretazione di una formula può essere definita ancora ricorsivamente. L'interpretazione delle formule atomiche è già stata data. L'interpretazione delle formule del tipo $\neg\varphi$ è il vero se l'interpretazione della formula φ è il falso, il falso altrimenti. L'interpretazione delle formule del tipo $\varphi\wedge\psi$ è il vero se le interpretazioni di φ e ψ sono entrambe il vero, il falso altrimenti.
Usando la simbologia $(\ )^{\mathfrak{A}}$ per indicare l'operazione di interpretazione nella struttura $\mathfrak{A}$, è naturale convenire che, qualunque sia la struttura $\mathfrak{A}$, $(\neg)^{\mathfrak{A}} = f_3'$ e $(\wedge)^{\mathfrak{A}} = f_8$. Così le clausole precedenti possono essere riscritte nel modo seguente:

$$(\neg\varphi)^{\mathfrak{A}}=(\neg)^{\mathfrak{A}}((\varphi)^{\mathfrak{A}})=f_3'((\varphi)^{\mathfrak{A}});$$
$$(\varphi\wedge\psi)^{\mathfrak{A}}=(\wedge)^{\mathfrak{A}}((\varphi)^{\mathfrak{A}},(\psi)^{\mathfrak{A}})=f_8((\varphi)^{\mathfrak{A}},(\psi)^{\mathfrak{A}});$$

L'interpretazione delle altre scritture che abbiamo deciso essere abbreviazioni si ottiene interpretando la formula non abbreviata indicata da ciascuna di tali scritture, cioè interpretando la corrispondente formula di $\mathcal{L}$.
Si osservi ancora che le definizioni dei connettivi del linguaggio artificiale in costruzione $\mathcal{L}$ sono state possibili grazie alla conoscenza dei connettivi in italiano, che è il metalinguaggio che stiamo usando per descrivere il linguaggio. Ad esempio per individuare la funzione f_8, che è l'interpretazione di $\wedge$, si deve dire che è la funzione che <u>se</u> applicata alla coppia (V,V) <u>allora</u> dà V <u>e</u> <u>se</u> applicata alle coppie ordinate di valori di verità che <u>non</u> sono (V,V) <u>allora</u> dà il falso: si sono sottolineate le due occorrenze del connettivo se...allora..., l'occorrenza del connettivo non e l'occorrenza del connettivo e nel metalinguaggio per definire la funzione f_8; se il significato di tali connettivi non fosse già noto nel metalinguaggio, non si potrebbe sapere chi è la funzione f_8.

Pertanto è assurda ogni pretesa di fondazione del significato dei connettivi a partire dalle tavole viste precedentemente (che vengono chiamate tavole di verità).

Ciò non vuol dire che le tavole di verità non possano essere utili, magari per aiutare la comprensione del linguaggio naturale. Infatti esse colgono il comportamento dei connettivi anche in certe accezioni usate nel linguaggio naturale, e così possono permettere un facile controllo anche di espressioni complesse del linguaggio naturale, magari per poterle riformulare in forma equivalente.

Le tavole di verità non sono che un facile modo per descrivere delle funzioni totali sui valori di verità. Così, anche se non sono intese per definire i significati dei connettivi della lingua naturale, sono essenziali per definire il significato dei connettivi del linguaggio formale.

Ci si potrebbe domandare perché ci si limita a funzioni totali. Si ricordi che si sta costruendo un linguaggio per descrivere situazioni, e le descrizioni o descrivono le cose come sono o non lo fanno. Così, se non si usassero solo funzioni totali, si sarebbe in difficoltà già nel definire la costruzione sintattica delle formule perché non dovrebbe essere corretto permettere il formarsi di formule nei casi in cui il connettivo non trova interpretazione, altrimenti la costruzione sintattica di una formula composta dovrebbe dipendere dal significato delle componenti, impedendo di separare il ruolo della sintassi da quello della semantica.

7. LE VARIABILI.

Di proposito finora non si è parlato di variabili perché si sono volute separare le difficoltà e presentare la prima parte in modo che già avesse una sua significatività e comprensibilità autonome.

Tante volte, anche nel linguaggio ordinario, ci si riferisce ad un individuo non ben precisato, vuoi perché è ben noto e non è il caso di citarlo continuamente, vuoi perché non interessa individuarlo più che tanto, vuoi perché non si è in grado di precisarlo, magari pur conoscendone l'esistenza. Il nome di un oggetto non precisato viene detto **variabile**. E' opportuno introdurre le variabili anche nel linguaggio artificiale che si sta costruendo. Poiché può succedere di voler indicare in modo non preciso più di un individuo, ci vorranno più variabili, addirittura un numero illimitato, non volendo porre alcun limite aprioristico al numero di variabili che si possono voler usare, anche se in una formula se ne useranno sempre solo un numero finito.

Che il numero delle variabili da usare in una espressione (espressione è una qualsiasi scrittura del linguaggio che viene o verrà riconosciuta sintatticamente corretta, ad esempio, un termine, una formula, eccetera) sia un numero finito dipende da una caratteristica del linguaggio che è molto importante e che si vuol mantenere: si vuol sempre sapere cosa sono le espressioni, si vuol poter riconoscere quando una certa scrittura è una espressione del linguaggio formale, quindi bisogna poterla leggere per intero e non restare nel mezzo della lettura senza sapere quando la lettura sarà completata. Così una espressione deve essere una scrittura finita, non solo finita, ma anche riconoscibile come espressione, cioè ci deve essere un criterio effettivo per dire che una certa scrittura è o meno una espressione del linguaggio formale. Questo è un requisito irrinunciabile. Ci potranno essere formule con molti simboli, con più simboli di un prefissato numero naturale, il numero dei simboli di una qualsiasi formula non è limitato a priori (come potrebbe essere nel linguaggio di un computer che ha una memoria con un limite ben fissato, anche se molto grande). Così il dotarsi di un numero numerabile di variabili risponde alle esigenze del linguaggio che si vuol costruire.

Quindi si decide di inserire nel linguaggio $\mathcal{L}$ in costruzione una infinità numerabile di simboli, $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$, con n numero naturale, come **variabili**.

Volendo essere nomi di individui, le variabili vanno annoverate tra i termini. Più precisamente si modifica la definizione ricorsiva di termine aggiungendo alla base della definizione la clausola che le variabili sono termini. Non si modificherà ulteriormente la definizione ricorsiva di termine, per cui si può aggiungere anche la clausola che nient'altro è un termine.

A questo punto pare opportuno ridare esplicitamente l'intera **definizione di termine**.

Una successione finita di simboli di un linguaggio formale $\mathcal{L}$ è un termine se:
- o è costituita da un singolo simbolo che è una variabile,
- o è costituita da un singolo simbolo che è un simbolo di costante,
- o è della forma $ft_1...t_n$ dove f è un simbolo di funzione n-ario e $t_1,...,t_n$ sono successioni finite di simboli del linguaggio già riconosciute come termini;
- nient'altro è un termine.

Si noti che nelle scritture usate la giustapposizione di scritture che stanno per successioni di simboli indica la giustapposizione delle successioni indicate.

Se dopo l'introduzione delle variabili si è sistemata facilmente la definizione sintattica di termine, più delicato è il problema di interpretare i termini nella nuova accezione: la struttura non precisa, e non deve precisare, come interpretare le variabili. Si deve introdurre nella descrizione dei rapporti tra struttura e linguaggio, cioè nel metalinguaggio, una funzione che dica come interpretare ciascuna variabile, cioè quale elemento di un certo universo associare a ciascuna variabile. Questa funzione è ovviamente legata in parte alla struttura in quanto il suo codominio è contenuto nell'universo della struttura, ma il legame tra variabili e struttura non dovrà estendersi più di tanto, perché si vuole mantenere la possibilità di cambiare l'interpretazione delle variabili pur mantenendo fissa l'interpretazione degli altri simboli già precisata in una certa struttura.

Si suppone, quindi, di disporre di una funzione che ad ogni variabile assegni un elemento dell'universo di una certa struttura. Chiameremo **attribuzione di valori alle variabili** una tale funzione. Data così una struttura, la si indichi con $\mathfrak{A}$, e una attribuzione di valori alle variabili, la si indichi con $\underline{a}$, si ottiene la coppia ordinata $(\mathfrak{A},\underline{a})$ che sarà chiamata **realizzazione** e indicata con σ, $\sigma= (\mathfrak{A},\underline{a})$, e questa sarà l'ambiente corretto per interpretare termini con variabili. L'interpretazione in una realizzazione σ di un termine è definita per induzione integrando la precedente definizione con la clausola che se il termine è una variabile allora la sua interpretazione è il valore che la funzione attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ assegna a quella variabile.

In analogia con la precedente notazione $(\ )^{\mathfrak{A}}$, si può ora introdurre la notazione $(\ )^{\sigma}$, cioè $(\ )^{(\mathfrak{A},\underline{a})}$, per indicare le interpretazioni nella realizzazione $\sigma=(\mathfrak{A},\underline{a})$. Così si può ridare esplicitamente l'intera **definizione di interpretazione di un termine in una realizzazione**.

Date una struttura $\mathfrak{A}$ e una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$, cioè data una realizzazione $\sigma=(\mathfrak{A},\underline{a})$, l'interpretazione di un termine t in tale realizzazione è data per induzione sulla costruzione del termine come segue:
- se il termine t è la variabile v_i allora la sua interpretazione $(t)^{\sigma}= (v_i)^{\sigma}$ nella realizzazione σ è $\underline{a}(v_i)$, che è un elemento dell'universo della struttura;

- se il termine t è un simbolo per costante, diciamo c, la sua interpretazione $(t)^\sigma=(c)^\sigma$, è la costante $\underline{c}$ (che è $(c)^{\mathfrak{A}}$) a cui quel simbolo è associato nella struttura $\mathfrak{A}$, cioè $(c)^\sigma$ è $\underline{c}$ (è $(c)^{\mathfrak{A}}$), che è ancora un elemento dell'universo;
- se il termine t è del tipo $ft_1...t_n$, con f simbolo di funzione n-aria e $t_1,...,t_n$ termini, la sua interpretazione $(t)^\sigma= (ft_1...t_n)^\sigma$ nella realizzazione σ è quel elemento a dell'universo che è immagine attraverso la funzione F, che è l'interpretazione in $\mathfrak{A}$ del simbolo f, dell'n-upla $(a_1,...,a_n)$ di elementi dell'universo che sono le interpretazioni in σ dei termini $t_1,...,t_n$, cioè è $(f)^\sigma((t_1)^\sigma, ..,(t_n)^\sigma) = (f)^{\mathfrak{A}}((t_1)^\sigma, ..,(t_n)^\sigma) = F(a_1,..., a_n)$, che è un elemento dell'universo.

E' evidente la forte analogia tra variabili e simboli per costanti, entrambi sono termini ed entrambi si interpretano in elementi dell'universo. Ma vale la pena sottolineare anche la differenza tra di loro. Mentre l'interpretazione di un simbolo per costante viene data nel precisare una struttura associata al linguaggio, ciò non avviene per una variabile, la cui interpretazione è precisata in un secondo momento, riservandosi così la possibilità di cambiare l'interpretazione della variabile senza cambiare l'interpretazione dei simboli che non sono variabili nel passare da una realizzazione ad un'altra, pur mantenendo, in entrambe le realizzazioni, la stessa struttura associata al linguaggio, e cambiando solo l'attribuzione di valori alle variabili. In qualche modo, le variabili sono simboli per elementi dell'universo per i quali ci si riserva di dare l'interpretazione in un secondo momento, potendola variare senza dover variare la struttura in cui si interpreta il resto.

E' evidente che, fissata una struttura $\mathfrak{A}$, l'elemento dell'universo interpretazione di un termine dipende solo dai valori che la funzione $\underline{a}$ assegna alle variabili che occorrono nel termine (queste saranno sicuramente in numero finito perché un termine è una successione finita di simboli); detto altrimenti, data una struttura $\mathfrak{A}$ e due attribuzioni di valori alle variabili $\underline{a}$ e $\underline{a'}$ che coincidano sulle variabili che occorrono in un termine t, entrambe le realizzazioni σ, dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a}$, e σ', dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a'}$, interpretano t nello stesso elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$. La dimostrazione di quanto appena affermato si può agevolmente svolgere per induzione sulla costruzione dei termini ed è lasciata al lettore come utile esercizio.

L'ultima osservazione porta a considerare l'interpretazione di un termine in una struttura non solo come elemento dell'universo precisato dall'attribuzione di valori alle variabili, ma anche come una funzione dall'interpretazione delle variabili che occorrono in esso all'universo, prescindendo così dalle specifiche attribuzioni di valori alle variabili. Detto altrimenti, si può ancora pensare all'interpretazione in una struttura $\mathfrak{A}$ di un termine in cui occorrano variabili, ma questa non è più un elemento dell'universo della struttura, bensì una funzione, determinata dal termine, che fa corrispondere un elemento dell'universo alla successione ordinata degli elementi dell'universo assegnati alle variabili che occorrono nel termine.

Supponendo che le variabili che occorrono in un termine t siano tra le prime k, si può dare un nuovo significato alla notazione $(t)^{\mathfrak{A}}$ e precisamente $(t)^{\mathfrak{A}}$ indica la funzione che ad una k-upla ordinata $(a_0,...,a_{k-1})$ di elementi dell'universo assegna l'elemento dell'universo a tale che $a=(t)^{(\mathfrak{A},\underline{a})}$, dove $\underline{a}$ è una attribuzione di valori alle variabili che assegna alle prime k variabili rispettivamente proprio i valori $a_0,...,a_{k-1}$. Per indicare detto elemento a dell'universo si userà anche la notazione $(t)^{\mathfrak{A}}[a_0,...,a_{k-1}]$.

L'ampliamento introdotto a proposito di termini con l'introduzione delle variabili coinvolge anche le formule. Pur rimanendo formalmente inalterate le definizioni sintattiche di formula atomica e di formula, variano le successioni finite di simboli accettate dalle due definizioni per la possibilità di includere termini secondo la definizione ampliata di questi.

Per l'interpretazione delle formule si ripropone la stessa problematica vista con i termini. Da una parte si può continuare a pretendere che le formule debbano essere o vere o false, ma per dire questo bisogna precisare non solo l'interpretazione in una struttura dei simboli che non sono variabili, ma anche, indipendentemente, l'interpretazione delle variabili: solo se si saranno precisati entrambi questi elementi si potrà dire se una formula è vera o falsa. In questo contesto, continueremo ad usare la notazione $(\ )^{\sigma}$ per indicare un'interpretazione in una realizzazione σ.

Ancora il valore di verità dell'interpretazione di una formula in una struttura fissata, con una certa attribuzione di valori alle variabili dipende solo dai valori assegnati alle variabili che occorrono nella formula, cioè se si considerano una struttura $\mathfrak{A}$ e due attribuzioni di valori alle variabili $\underline{a}$ e $\underline{a'}$ che coincidano sulle variabili occorrenti in una certa formula, entrambe le realizzazioni σ, dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a}$, e σ', dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a'}$, interpretano la formula nello stesso valore di verità.

Si noti che la struttura $\mathfrak{A}$ con l'attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ da luogo ad una interpretazione $(\ )^{\sigma}$ in una realizzazione σ possibilmente diversa dall'interpretazione, chiamiamola $(\ )^{\sigma'}$, nella realizzazione σ' che si ottiene dalla stessa struttura $\mathfrak{A}$ ma abbinata alla attribuzione di valori alle variabili $\underline{a'}$. Comunque, come appena detto, le due valutazioni indicate sono abbastanza simili da interpretare in ugual modo le formule le cui variabili sono interpretate ugualmente da $(\ )^{\sigma}$ e da $(\ )^{\sigma'}$, o, equivalentemente, da $\underline{a}$ e da $\underline{a'}$.

Altro atteggiamento è quello di non considerare più una formula φ come vera o falsa in una interpretazione in una certa realizzazione, ma vera, relativamente ad una certa struttura $\mathfrak{A}$, in funzione dell'attribuzione di valori alle prime k variabili se queste includono quelle occorrenti nella formula. Quindi il significato che si attribuisce ad una formula φ, relativamente ad una certa struttura $\mathfrak{A}$, è una funzione h_{φ} dalle k-uple ordinate di elementi di A (dove A è l'universo di $\mathfrak{A}$) delle interpretazioni delle prime k variabili (che contengono quelle occorrenti nella formula φ) nei valori di verità, h_{φ}: $A^k \to \{V,F\}$. Più precisamente $h_{\varphi}(a_0, \dots , a_{k-1})=V$ se φ è vera quando è interpretata nella realizzazione σ dipendente dalla struttura $\mathfrak{A}$ e da una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ che assegni alle prime k variabili proprio i valori $a_0, \dots , a_{k-1}$; mentre $h_{\varphi}(a_0, \dots , a_{k-1})=F$ altrimenti. Anche ora, per indicare la funzione h_{φ}, si potrà usare la notazione $(\varphi)^{\mathfrak{A}}$, e per indicare il valore di verità che questa funzione fa corrispondere alla k-upla ordinata $(a_0, \dots , a_{k-1})$ si potrà scrivere $(\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0, \dots , a_{k-1}]$.

8. LA QUANTIFICAZIONE.

A volte si è interessati a sapere se l'interpretazione di una formula in una realizzazione è sempre la stessa al variare dell'interpretazione di una variabile, o se, invece di essere sempre la stessa, ha un qualche altro ben precisato comportamento, ancora al variare dell'interpretazione di una variabile. Nel linguaggio comune tale esigenza viene manifestata da affermazioni del tipo: per ogni individuo è vera una certa affermazione che coinvolge quel individuo, ad esempio ogni numero naturale è maggiore od uguale a zero.

Vogliamo dare anche al linguaggio che stiamo costruendo la possibilità di esprimere affermazioni del tipo visto.

Così sia φ una formula in cui compaiano al più le variabili $v_0,v_1,...,v_{k-1}$, indichiamola con $\varphi(v_0,v_1,...,v_{k-1})$. La formula $\varphi(v_0,v_1,...,v_{k-1})$ può essere vera o falsa, quando è interpretata in una realizzazione basata su di una struttura $\mathfrak{A}$, a seconda dell'attribuzione di valori data alle variabili $v_0,v_1,...,v_{k-1}$. Con la notazione prima introdotta si può dire che il significato della formula $\varphi(v_0,v_1,...,v_{k-1})$ relativamente ad una struttura $\mathfrak{A}$, è la funzione k-aria $h_\varphi = (\varphi)^{\mathfrak{A}} = \{(a_0,a_1,...,a_{k-1},V): (\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0,...,a_{k-1}] = V\} \cup \{(a_0,a_1,..., a_{k-1}, F): (\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0, ...,a_{k-1}] = F\}$. Detto altrimenti, $h_\varphi(a_0,a_1,...,a_{k-1}) = (\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0,. ..,a_{k-1}]$

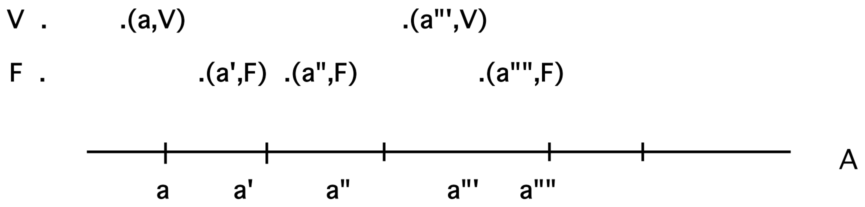
Si può essere interessati a vedere il comportamento di questa funzione h_φ al variare dell'attribuzione di valore alla variabile v_i, tenendo fissa l'attribuzione di valori delle altre variabili. Così si può definire una funzione unaria $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_{k-1}}$ mediante la seguente uguaglianza $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_{k-1}}(x) = h_\varphi(a_0,...,a_{i-1},x,a_{i+1},..., a_{k-1}) = (\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0,.. .,a_{i-1},x,a_{i+1},...,a_{k-1}]$, dove x indica un qualsiasi elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$.

Si sta intravedendo una operazione che al significato di una formula φ, (vista come funzione h_φ, dalle attribuzioni di valore alle prime k variabili [che contengono quelle occorrenti nella formula] nei valori di verità) fa corrispondere una nuova formula il cui significato è ancora una funzione dall'interpretazione delle sue variabili nei valori di verità, ma questa volta dipende non dall'interpretazione di tutte le variabili, ma dall'interpretazione delle variabili eccetto una. Più precisamente, tale operazione fa ottenere una nuova formula il cui valore di verità non dipende più dall'interpretazione di una delle variabili, diciamo della variabile v_i, ma, fissata ad arbitrio l'interpretazione delle altre variabili, è il vero se la dipendenza del valore della formula iniziale dall'interpretazione della variabile v_i è di un certo tipo (o di certi tipi), il falso altrimenti.

Detto altrimenti, data una formula φ il cui valore di verità dipenda dalla interpretazione di certe variabili $v_0,...,v_{n-1}$, si consideri una di queste variabili, v_i, e la funzione $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_{n-1}}$ che fa dipendere il valore di verità della formula φ dall'interpretazione della variabile v_i,. In tale situazione, fissata l'interpretazione delle altre $v_o, \ldots, v_{i-1},v_{i+1}, ..., v_{n-1}$ in $a_0,...,a_{i-1}, a_{i+1},...,a_{n-1}$, si vuole ottenere una nuova formula il cui valore di verità, colga il comportamento globale della funzione $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_{n-1}}$, cioè sia il vero se la funzione $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_{n-1}}$ presenta un comportamento voluto, il falso altrimenti.

Forse un grafico può aiutare a cogliere quanto si è detto. Nel seguente disegno la retta orizzontale rappresenta l'universo delle struttura, e su tale retta sono indicati alcuni suoi elementi che rappresentano alcuni elementi dell'universo A della struttura. L'interpretazione della formula φ nella realizzazione la cui struttura è $\mathfrak{A}$ e l'attribuzione di valori alle variabili assegna alle variabili $v_o,..., v_{i-1},v_{i+1},...,v_{n-1}$ gli elementi $a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},..., a_{n-1}$ rispettivamente e alla variabile v_i un arbitrario valore x dell'universo A è

$(\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0,..., a_{i-1},x,a_{i+1},...,a_{k-1}]$, che è o V o F a seconda del valore x. Nel grafico si è supposto che queste interpretazioni siano V quando l'elemento arbitrario dell'universo indicato da x è o a o a"', e che siano F quando l'elemento arbitrario dell'universo indicato da x è o a' o a" o a"": ciò è rappresentato dai punti indicati nel grafico con le rispettive coordinate.



Nel caso ipotizzato nel grafico si può notare ad esempio un certo comportamento globale della funzione $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_{n-1}}$: non è costante, a volte assume il valore V, a volte assume il valore F. Ma i comportamenti globali di una tale funzione possono essere anche tanti altri. Eccone alcuni ad esempio: il valore V è assunto tante volte quanto il valore F; il valore V è assunto 50 volte; il valore F è assunto infinite volte. Si noti come in tutti questi esempi si colga sempre una caratteristica globale della funzione $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1}, a_{i+1},...,a_{n-1}}$, e non il valore che essa fa corrispondere ad un singolo elemento dell'universo.

Questa operazione che fa cogliere la tipologia globale della dipendenza del valore di verità di una formula dalle interpretazioni di una certa sua variabile, ossia dal comportamento della funzione $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_{n-1}}$ nella sua globalità, viene chiamata **quantificazione** Così la quantificazione "lega", in un certo modo, una variabile che non dovrà più essere considerata nel computo delle variabili da cui dipende l'interpretazione della nuova formula, interpretazione ancora intesa come funzione, dalle interpretazione delle altre variabili, nei valori di verità, sempre relativamente ad una certa fissata struttura.

Le varie operazioni di quantificazione corrispondono ai vari tipi di comportamento della funzione $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_{n-1}}$, e questi tipi di comportamento sono infiniti se l'universo della struttura è infinito.

Ancora ci si potrebbe domandare (come si è fatto per le funzioni da n-uple di valori di verità nei valori di verità e le funzioni che sono il significato dei connettivi) se ci sono alcuni tipi di comportamento che, se opportunamente applicati più volte e in combinazione, eventualmente anche con i connettivi, hanno lo stesso effetto di un particolare tipo di comportamento comunque prefissato. Questa volta, però, non si ha un tale risultato, e, d'altra parte, non si possono considerare tutti questi infiniti tipi di comportamento. Si sceglie allora di privilegiare uno di questi tipi di comportamento particolarmente semplice, e precisamente il caso in cui la funzione $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_{n-1}}$ sopra ricordata è la funzione costante vero. Si sceglie così una operazione di quantificazione, chiamata quantificazione universale, che, fissata l'interpretazione di tutte le variabili diverse da v_i, dà il valore vero alla formula da precisare che dovrà rappresentare il comportamento globale della $h_{\varphi a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_{n-1}}$) se la formula $\varphi(v_0, v_1, ...,v_{n-1})$ è vera comunque si interpreti la variabile v_i e mantenendo fissa, oltre l'interpretazione delle altre variabili, anche l'interpretazione degli altri simboli, in una struttura fissata.

Da un punto di vista sintattico, si vuole ampliare il concetto di formula consentendo cittadinanza anche a nuove formule che rispondano all'esigenza di poter quantificare. Allo scopo si introdurrà tra i simboli del linguaggio in costruzione il seguente: $\forall$, da chiamarsi **quantificatore universale**. Poiché la quantificazione si riferisce ad una specifica variabile, a questo punto è abbastanza naturale ampliare la definizione ricorsiva di formula con la seguente clausola: se φ è una formula e v_i una variabile allora anche la successione finita di simboli $\forall v_i \varphi$ è una formula. Poiché non si estenderà ulteriormente la nozione di formula, almeno in questa presentazione, si può aggiungere alla definizione ricorsiva di formula, che abbiamo appena ampliata, un'ultima clausola affermante che qualsiasi cosa che sia diversa dalle successioni finite di simboli che possono essere riconosciute come formule in base alle condizioni già precisate non è una formula.

9. FORMULE E LORO INTERPRETAZIONE.

A questo punto pare opportuno ridare esplicitamente l'intera **definizione di formula**.
Una successione finita di simboli di un linguaggio formale $\mathcal{L}$ è una formula se;
- o è una formula atomica, cioè un predicato di arietà n seguito da n termini,
- o è del tipo $\neg\varphi$ o $\wedge\varphi\psi$ dove φ e ψ sono successioni finite di simboli del linguaggio già riconosciute come formule,
- oppure è del tipo $\forall v_i \varphi$ dove v_i è una variabile e φ è una successione finita di simboli del linguaggio già riconosciuta come formula;
- nient'altro è una formula.

Si ripropone, anche in presenza di quantificatori, il problema di determinare l'interpretazione di una formula in una realizzazione, cioè in una struttura con una certa attribuzione di valori alle variabili.

Si dispone già del simbolismo $(\ )^\sigma$, che indica un'interpretazione in una realizzazione, e questa non dipende soltanto dalla struttura $\mathfrak{A}$, ma anche dall'attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$. Ci sarà bisogno di attribuzioni di valori alle variabili che differiscano da $\underline{a}$ solo per il fatto che attribuiscono ad una certa variabile v_i un fissato valore b indipendentemente dal valore che $\underline{a}$ attribuisce a v_i. Si usa la notazione $\underline{a}(v_i/b)$ per indicare una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a'}$ coincidente con l'attribuzione $\underline{a}$ su tutte le variabili diverse da v_i e che attribuisce alla variabile v_i il valore b, cioè $\underline{a'}(v_j)=\underline{a}(v_i/b)(v_j)=\underline{a}(v_j)$ se $j \neq i$, mentre $\underline{a'}(v_i)=\underline{a}(v_i/b)(v_i)=b$. Si introduce la possibilità di variare di poco la realizzazione σ, e si indica con $(\ )^{\sigma(v_i/b)}$, dove v_i è una variabile, la nuova realizzazione costruita a partire dalla struttura $\mathfrak{A}$ e dall'attribuzione $\underline{a}(v_i/b)$. Essa differisce dalla precedente per il solo fatto che ci si riserva di interpretare la variabile v_i nell'elemento b dell'universo (indipendentemente da come $(\ )^\sigma$ interpreta la variabile v_i).

Ora si dice che la formula $\forall v_i \varphi$ è vera nell'interpretazione $(\ )^\sigma$ se per ogni elemento b nell'universo della realizzazione σ è vera la formula φ nell'interpretazione $(\ )^{\sigma(v_i/b)}$. Detto altrimenti, $(\forall v_i \varphi)^\sigma=V$ se per ogni b nell'universo di $\mathfrak{A}$ risulta che $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}=V$. Quindi per valutare una formula quantificata rispetto ad una certa realizzazione bisogna far ricorso a molte altre realizzazioni che differiscono da quella che interessa solo per la diversa valutazione della variabile che segue il segno di quantificazione.

A questo punto pare opportuno ridare esplicitamente l'intera **definizione di interpretazione di una formula in una realizzazione**.

L'interpretazione di una formula può essere solo V o F. Date una struttura $\mathfrak{A}$ e una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$, cioè data una realizzazione $\sigma = (\mathfrak{A},\underline{a})$, l'interpretazione di una formula φ nella realizzazione σ è definita, per induzione sulla costruzione della formula, come segue:

- se φ è una formula atomica, cioè del tipo $Pt_1...t_n$, allora $(Pt_1...t_n)^\sigma$ è V se e solo se l'n-upla delle interpretazioni dei termini appartiene alla relazione che interpreta il predicato, $((t_1)^\sigma,...,(t_n)^\sigma) \in (P)^\sigma$;
- se φ è una formula del tipo $\neg\psi$ allora $(\neg\psi)^\sigma=(\neg)^\sigma((\psi)^\sigma)$, cioè $(\neg\psi)^\sigma$=V se $(\psi)^\sigma$=F, altrimenti $(\neg\psi)^\sigma$=F;
- se φ è una formula del tipo $\wedge\varphi_1\varphi_2$ allora $(\wedge\varphi_1\varphi_2)^\sigma=(\wedge)^\sigma((\varphi_1)^\sigma,(\varphi_2)^\sigma)$, cioè $(\wedge\varphi_1\varphi_2)^\sigma$= V se $(\varphi_1)^\sigma$=V e $(\varphi_2)^\sigma$=V, altrimenti $(\wedge\varphi_1\varphi_2)^\sigma$=F;
- se φ è una formula del tipo $\forall v_i\psi$ allora $(\forall v_i\psi)^\sigma$=V se e solo se per ogni b nell'universo di $\mathfrak{A}$ risulta che $(\psi)^{\sigma(v_i/b)}$=V.

Così è ben precisata la nozione di formula e quando una formula è vera in una struttura con una certa attribuzione di valori alle variabili, brevemente, in una certa realizzazione.

Ha un certo interesse considerare anche le formule del tipo $\neg\forall v_i\neg\varphi$, che più sinteticamente saranno indicate con la scrittura $\exists v_i\varphi$. Si osservi che $\exists v_i\varphi$ è vera nella realizzazione σ se esiste un elemento b dell'universo della realizzazione σ per cui la formula φ è vera quando è interpretata nella realizzazione $\sigma(v_i/b)$. Detto altrimenti $(\exists v_i\varphi)^\sigma$=V se esiste un elemento b nell'universo di $\mathfrak{A}$ tale che $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}$=V. Infatti $\neg\forall v_i\neg\varphi$ è vera nell'interpretazione $(\ )^\sigma$ se $\forall v_i\neg\varphi$ è falsa nell'interpretazione $(\ )^\sigma$, cioè se non è vero che per ogni b nell'universo di $\mathfrak{A}$ risulta che $(\neg\varphi)^{\sigma(v_i/b)}$=V, ovvero se esiste un b nell'universo di $\mathfrak{A}$ tale che $(\neg\varphi)^{\sigma(v_i/b)}$=F, cioè, infine, se esiste un b nell'universo di $\mathfrak{A}$ tale che $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}$= V.

Si noti che la formula $\exists v_i\varphi$ interpretata nella realizzazione σ coglie un particolare comportamento globale della formula φ rispetto alle interpretazioni nelle realizzazioni $\sigma(x/a)$ con a nell'universo della struttura, e precisamente quello in cui per almeno un certo elemento b dell'universo $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}$=V. Questo nuovo comportamento globale è una quantificazione, diversa dalla quantificazione universale, che viene chiamata quantificazione esistenziale, a cui non e' stato fatto corrispondere alcun simbolo nel linguaggio perché questa quantificazione si può ottenere da quella universale mediante operazioni per cui ci sono già dei simboli. Si sarebbero anche potute fare delle scelte diverse, ad esempio non introdurre il simbolo $\forall$ che rappresenta la quantificazione universale, ma il simbolo $\exists$ che rappresenta la quantificazione esistenziale, dal momento che, come si vede facilmente, anche la quantificazione universale può essere ottenuta da quella esistenziale mediante operazioni di negazione per la quale è già stato introdotto un simbolo: di fatto, in ogni realizzazione, la formula $\forall v_i\varphi$ si interpreta nello stesso modo della formula $\neg\exists v_i\neg\varphi$, come si può facilmente vedere ricordando quali quantificazioni indicano i simboli $\forall$ e $\exists$, oppure notando che $\neg\exists v_i\neg\varphi$ è una abbreviazione di $\neg\neg\forall v_i\neg\neg\varphi$, che banalmente si interpreta nello stesso modo di $\forall v_i\varphi$ in ogni realizzazione. Ma si sarebbero potuti introdurre entrambi i simboli $\forall$ ed $\exists$ dando nome ad entrambe le quantificazioni universale ed esistenziale, anche se queste sono tra loro legate, come si e' visto, e non permettono di descrivere ogni altra quantificazione. Per il momento si vuole insistere sul fatto che nel linguaggio introdotto c'e' il solo simbolo per quantificazione $\forall$, e ciò sarà utile quando, dovendo fare dimostrazioni che dovranno considerare i vari modi di scrittura delle formule, il lavoro sarà facilitato dall'aver il minor numero possibile di tipi di formule. Così la scrittura $\exists v_i\varphi$ sarà una scrittura nel metalinguaggio per indicare la formula del linguaggio $\neg\forall v_i\neg\varphi$.

Prima di proseguire con lo sviluppo dei risultati generali sulla adeguatezza del linguaggio introdotto alla descrizione di strutture, risultati ai quali siamo interessati, pare opportuno esaminare gli effetti di combinazioni di connettivi e quantificatori sui significati di formule. Si è già detto come ogni connettivo di una qualsiasi arietà possa essere rappresentato mediante opportune iterazioni dei soli connettivi $\neg$ e $\wedge$: ciò era molto opportuno per limitare le tipologie di formule da considerare, ma ora diviene limitativo volendo analizzare il comportamento di combinazioni di quantificatori e connettivi, sicché nelle osservazioni che seguono useremo i connettivi e i quantificatori che di volta in volta saranno più opportuni.

Abbiamo già visto come si combina la negazione con i quantificatori universale ed esistenziale, sostanzialmente mutando un quantificatore nell'altro seguito da una negazione. Proseguiamo con l'osservare il comportamento di un quantificatore seguito da una congiunzione, cioè come possono essere espresse formule del tipo $\forall v_i\wedge\alpha\beta$ o $\exists v_i\wedge\alpha\beta$, con α e β formule, mediante altre formule alle quali sono equivalenti, nel senso di vere nelle stesse realizzazioni. E' abbastanza immediato vedere che $\forall v_i\wedge\alpha\beta$ equivale alla formula $\wedge\forall v_i\alpha\forall v_i\beta$. Di fatto, sia σ una qualsiasi realizzazione, dalla definizione di verità di una formula in una realizzazione segue che $(\forall v_i\wedge\alpha\beta)^\sigma = V$ se e solo se, per ogni b appartenente all'universo della struttura di σ, risulta $(\wedge\alpha\beta)^{\sigma(v_i/b)} = V$, cioè se e solo se, per ogni tale b, risulta sia $\alpha^{\sigma(v_i/b)} = V$ che $\beta^{\sigma(v_i/b)} = V$. Ma ciò equivale ad affermare che nella realizzazione σ sono vere sia $\forall v_i\alpha$ che $\forall v_i\beta$, ovvero che $(\wedge\forall v_i\alpha\forall v_i\beta)^\sigma = V$. Quanto ottenuto può essere espresso anche dicendo che in ogni realizzazione è vera la formula $(\forall v_i\wedge\alpha\beta)\leftrightarrow(\wedge\forall v_i\alpha\forall v_i\beta)$.

Passando ad analizzare la combinazione del quantificatore esistenziale con la congiunzione, $\exists v_i\wedge\alpha\beta$, e volendola confrontare con la formula $\wedge\exists v_i\alpha\exists v_i\beta$, s'incontrano delle difficoltà che saranno evidenziate. Ancora sia σ una qualsiasi realizzazione, dalla definizione di verità di una formula in una realizzazione segue che $(\exists v_i\wedge\alpha\beta)^\sigma = V$ se e solo se esiste un elemento b nell'universo della struttura di σ tale che $(\wedge\alpha\beta)^{\sigma(v_i/b)} = V$, cioè se e solo se sia $\alpha^{\sigma(v_i/b)} = V$ che $\beta^{\sigma(v_i/b)} = V$. Da ciò segue che sono vere nella realizzazione σ anche le formule $\exists v_i\alpha$ e $\exists v_i\beta$, come pure la formula $\wedge\exists v_i\alpha\exists v_i\beta$. Tuttavia la verità in σ delle formule $\exists v_i\alpha$ e $\exists v_i\beta$ implica l'esistenza di un elemento b_1, nell'universo della struttura di σ tale che $\alpha^{\sigma(v_i/b_1)} = V$ e di un elemento b_2, sempre nell'universo della struttura di σ tale che $\beta^{\sigma(v_i/b_2)} = V$, e nulla dice che gli elementi chiamati b_1 e b_2 siano lo stesso elemento, come sarebbe invece necessario se si volesse dimostrare che la verità della formula $\wedge\exists v_i\alpha\exists v_i\beta$ nella realizzazione σ comporta anche quella della formula $\exists v_i\wedge\alpha\beta$. Quanto ottenuto può essere espresso anche dicendo che in ogni realizzazione è vera la formula $(\exists v_i\wedge\alpha\beta)\rightarrow(\wedge\exists v_i\alpha\exists v_i\beta)$, ma che in generale non è vera la formula $(\wedge\exists v_i\alpha\exists v_i\beta)\rightarrow(\exists v_i\wedge\alpha\beta)$.

Analogamente si vogliono analizzare sia le combinazioni del quantificatore universale che quella del quantificatore esistenziale con la disgiunzione, iniziando dalla combinazione citata per seconda. Così, sia σ una qualsiasi realizzazione, dalla definizione di verità di una formula in una realizzazione segue che $(\exists v_i\vee\alpha\beta)^\sigma = V$ se e solo se, esiste un b appartenente all'universo della struttura di σ, tale che $(\vee\alpha\beta)^{\sigma(v_i/b)} = V$, cioè se e solo se, esiste un tale b, per il quale o $\alpha^{\sigma(v_i/b)}$ =V o $\beta^{\sigma(v_i/b)}$ =V. Ma ciò vale se e solo se o $(\exists v_i\alpha)^\sigma$ =V oppure $(\exists v_i\beta)^\sigma$ =V, cioè se e solo se $(\vee\exists v_i\alpha\exists v_i\beta)^\sigma$ =V. Quanto ottenuto può essere espresso anche dicendo che in ogni realizzazione è vera la formula $(\exists v_i\vee\alpha\beta)\leftrightarrow(\vee\exists v_i\alpha\exists v_i\beta)$.

Passando ad analizzare la combinazione di un quantificatore universale con la disgiunzione, si osservano delle difficoltà. Sia σ una qualsiasi realizzazione; dalla definizione di verità di una formula in una realizzazione segue che $(\forall v_i\vee\alpha\beta)^\sigma$ =V se e solo se, per ogni b appartenente all'universo della struttura di σ, risulta $(\vee\alpha\beta)^{\sigma(v_i/b)}$ = V, cioè se e solo se, per ogni tale b, risulta che o $\alpha^{\sigma(v_i/b)}$ =V o $\beta^{\sigma(v_i/b)}$ =V. Ma il fatto che per ogni b sia vera, nella realizzazione $\sigma(v_i/b)$, o α o β, non comporta che o α sia vera per ogni b nella realizzazione $\sigma(v_i/b)$, oppure che β sia vera per ogni b nella realizzazione $\sigma(v_i/b)$, sicché in generale non è vero che in ogni realizzazione sia vera la formula $(\forall v_i\vee\alpha\beta)\rightarrow(\vee\forall v_i\alpha\forall v_i\beta)$. D'altra parte, cominciando con l'analizzare la formula $\vee\forall v_i\alpha\forall v_i\beta$, si può notare che essa è vera in una realizzazione σ se e solo se o $(\forall v_i\alpha)^\sigma$ =V o $(\forall v_i\beta)^\sigma$ =V, cioè o per ogni b_1 appartenente all'universo della struttura di σ, risulta $(\alpha)^{\sigma(v_i/b_1)}$ =V, oppure per ogni b_2 appartenente all'universo della struttura di σ, risulta $(\beta)^{\sigma(v_i/b_2)}$ =V, sicché per ogni b appartenente all'universo della struttura di σ, risulta $(\vee\alpha\beta)^{\sigma(v_i/b)}$ =V, e dunque $(\forall v_i\vee\alpha\beta)^\sigma$ =V. Così si può concludere che in ogni realizzazione è vera la formula $(\vee\forall v_i\alpha\forall v_i\beta)\rightarrow(\forall v_i\vee\alpha\beta)$.

I risultati esaminati s'inquadrano in una visione del quantificatore universale come una congiunzione di tutti i casi colti dalle possibili interpretazioni della variabile quantificata, sicché può essere commutato con la congiunzione che è associativa e distributiva; invece il quantificatore esistenziale va visto come una disgiunzione di tutti i casi colti dalle possibili interpretazioni della variabile quantificata, sicché può essere commutato con la disgiunzione che è associativa e distributiva.

Proseguendo si vogliono analizzare le combinazioni dei quantificatore con l'implicazione e la doppia implicazione.

Cominciamo con il considerare la formula $\forall v_i\rightarrow\alpha\beta$, che possiamo riscrivere in modo più leggibile grazie all'uso delle parentesi così $\forall v_i(\alpha\rightarrow\beta)$. Dalla solita definizione di verità di una formula in una realizzazione σ, sappiamo che $(\forall v_i(\alpha\rightarrow\beta))^\sigma$ =V vuol dire che per ogni b, appartenente all'universo della struttura di σ, si ha che $(\alpha\rightarrow\beta)^{\sigma(v_i/b)}$ =V, il che equivale a dire che quando $(\alpha)^{\sigma(v_i/b)}$ =V allora anche $(\beta)^{\sigma(v_i/b)}$ =V. Se assumiamo che $(\forall v_i\alpha)^\sigma$ =V, cioè che per ogni b appartenente all'universo della struttura di σ, sia $(\alpha)^{\sigma(v_i/b)}$ =V, allora anche per ogni tale b dovrà essere $(\beta)^{\sigma(v_i/b)}$ =V, cioè $(\forall v_i\beta)^\sigma$ =V. Siccome questo risultato è stato ottenuto supponendo che $(\forall v_i\alpha)^\sigma$ =V, nella realizzazione σ dovrà essere $((\forall v_i\alpha)\rightarrow(\forall v_i\beta))^\sigma$ =V. Riassumendo quanto osservato si può dire che in ogni realizzazione è vera la formula $(\forall v_i(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow((\forall v_i\alpha)\rightarrow(\forall v_i\beta))$.

Notiamo subito che la formula $((\forall v_i\alpha)\rightarrow(\forall v_i\beta))\rightarrow(\forall v_i(\alpha\rightarrow\beta))$ non è vera in ogni realizzazione. Infatti, l'antecedente $(\forall v_i\alpha)\rightarrow(\forall v_i\beta)$ di questa implicazione potrebbe essere vero in una realizzazione σ poiché sia $(\forall v_i\alpha)^\sigma$ =F che $(\forall v_i\beta)^\sigma$ =F, cioè esistono un b_1 e un b_2, entrambi appartenenti all'universo della struttura di σ, tali che $(\alpha)^{\sigma(v_i/b_1)}$ =F e $(\beta)^{\sigma(v_i/b_2)}$ =F; ma niente dice che b_1 e b_2 debbano indicare lo stesso elemento né che $(\alpha)^{\sigma(v_i/b_2)}$ debba essere falsa. In tale caso $(\alpha\rightarrow\beta)^{\sigma(v_i/b_2)}$ =F, e anche $(\forall v_i(\alpha\rightarrow\beta))^\sigma$ =F, e abbiamo mostrato che alla verità dell'antecedente della formula proposta può non corrispondere la verità del conseguente rendendo falsa l'implicazione in una realizzazione in cui succeda quanto descritto.

Mostriamo ora che la formula $((\exists v_i\alpha)\rightarrow(\exists v_i\beta))\rightarrow(\exists v_i(\alpha\rightarrow\beta))$ è vera in ogni realizzazione. Di fatto una realizzazione σ che renda vero l'antecedente di questa implicazione, dovrà o rendere falsa la formula $\exists v_i\alpha$ o rendere vera la formula $\exists v_i\beta$ (cioè o $(\exists v_i\alpha)^\sigma$ =F o $(\exists v_i\beta)^\sigma$ =V). Nel secondo caso c'è un elemento b, appartenente all'universo della struttura di σ, tale che $(\beta)^{\sigma(v_i/b)}$ =V; ma allora anche $(\alpha\rightarrow\beta)^{\sigma(v_i/b)}$ =V, sicché $(\exists v_i(\alpha\rightarrow\beta))^\sigma$ =V, cioè la realizzazione σ rende vero anche il conseguente dell'implicazione. Nel primo caso, invece, la falsità nella realizzazione σ della formula $\exists v_i\alpha$ vuole dire che per ogni b, appartenente all'universo della struttura di σ, $(\alpha)^{\sigma(v_i/b)}$ =F, sicché $(\alpha\rightarrow\beta)^{\sigma(v_i/b)}$ dovrà essere vera per ogni tale b. Se ciò vale per ogni tale b, varrà anche per qualcuno (abbiamo convenuto di considerare solo strutture il cui universo non è vuoto), e sarà $(\exists v_i(\alpha\rightarrow\beta))^\sigma$ =V. In entrambi i casi abbiamo raggiunto la verità del conseguente dell'implicazione nella realizzazione considerata, e si può concludere che la formula iniziale è vera una arbitraria realizzazione, cioè in ogni realizzazione.

Ancora, non è vera in ogni realizzazione l'implicazione inversa $(\exists v_i(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow((\exists v_i\alpha)\rightarrow(\exists v_i\beta))$. Infatti, l'esistenza di un elemento b, appartenente all'universo della struttura di σ, tale che $(\alpha\rightarrow\beta)^{\sigma(v_i/b)}$ =V, che renderebbe vero l'antecedente dell'implicazione, non comporta l'esistenza di un elemento c, appartenente all'universo della struttura di σ, tale che $(\beta)^{\sigma(v_i/c)}$ =V, sicché la formula $\exists v_i\beta$ può essere falsa nella realizzazione σ, pur potendoci essere un elemento b', appartenente all'universo della struttura di σ, ma diverso da b, tale che $(\alpha)^{\sigma(v_i/b')}$ =V, cosicché $(\exists v_i\alpha)^\sigma$ =V. In una realizzazione σ con le caratteristiche descritte sarebbe allora vero l'antecedente $\exists v_i(\alpha\rightarrow\beta)$ dell'implicazione e falso il suo conseguente $(\exists v_i\alpha)\rightarrow(\exists v_i\beta)$, in modo che l'intera implicazione $(\exists v_i(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow((\exists v_i\alpha)\rightarrow(\exists v_i\beta))$ risulta falsa nella realizzazione σ.

Continuiamo questa parentesi considerando la combinazione di un quantificatore con il connettivo doppia implicazione. Dapprima vogliamo mostrare che $(\forall v_i(\alpha\leftrightarrow\beta))\rightarrow((\forall v_i\alpha)\leftrightarrow(\forall v_i\beta))$. Ciò segue da quanto notato circa la formula, già considerata, $(\forall v_i(\alpha\rightarrow\beta))\rightarrow((\forall v_i\alpha)\rightarrow(\forall v_i\beta))$, dall'osservazione che, scambiando α e β in questa formula, se ne ottiene una dello stesso tipo per la quale vale ancora quanto notato per la prima, e dal fatto che la doppia implicazione equivale alla congiunzione della implicazione nei due sensi, e che della possibilità, già vista di commutare quantificazione universale e congiunzione.

Ora notiamo che l'implicazione inversa in generale non vale, cioè che la formula $((\forall v_i\alpha)\leftrightarrow(\forall v_i\beta))\rightarrow(\forall v_i(\alpha\leftrightarrow\beta))$ non è vera che in ogni realizzazione. Infatti, l'antecedente dell'implicazione potrebbe essere vero in una realizzazione σ proprio perché sia $\forall v_i\alpha$ che $\forall v_i\beta$ sono false in σ, essendoci elementi b_1 e un b_2, entrambi appartenenti all'universo della struttura di σ, tali che $(\alpha)^{\sigma(v_i/b_1)}$ =F e $(\beta)^{\sigma(v_i/b_2)}$ =F; ma può essere che $(\alpha)^{\sigma(v_i/b_2)}$ =V o che $(\beta)^{\sigma(v_i/b_1)}$ =V, e in tale caso il conseguente dell'implicazione, e l'intera implicazione, sarebbero falsi nella realizzazione σ.

Passando a considerare come si combina il quantificatore esistenziale con la doppia implicazione, si può notare che la formula $((\exists v_i\alpha)\leftrightarrow(\exists v_i\beta))\rightarrow(\exists v_i(\alpha\leftrightarrow\beta))$ è vera in ogni realizzazione, mentre ci sono realizzazioni in cui non è vera la formula $(\exists v_i(\alpha\leftrightarrow\beta))\rightarrow((\exists v_i\alpha)\leftrightarrow(\exists v_i\beta))$. Ciò si può vedere come conseguenza di quanto notato per la combinazione del quantificatore universale con la doppia implicazione, ricordando che il quantificatore esistenziale è la negazione di un quantificatore universale seguito da una negazione, e sfruttando le contro nominali delle implicazioni coinvolte.

Concludiamo questa parentesi considerando le combinazioni tra i due quantificatori, esistenziale e universale. Si vede che in ogni realizzazione in cui è vera la formula

$\exists v_n \forall v_i \alpha$ è vera anche la formula $\forall v_i \exists v_n \alpha$, mentre ci sono realizzazioni in cui la formula $\forall v_i \exists v_n \alpha$ è vera ma la formula $\exists v_n \forall v_i \alpha$ è falsa. Ricorrendo alla definizione di verità di una formula in una realizzazione, ci si accorge che $(\exists v_n \forall v_i \alpha)^\sigma = V$ vuol dire che nell'universo della struttura della realizzazione σ c'è un elemento b da attribuire alla variabile v_n tale che, qualunque sia l'elemento c dello stesso universo attribuito alla variabile v_i, accoppiato sempre al medesimo elemento b, risulta $(\alpha)^{\sigma(v_n/b)(v_i/c)} = V$; mentre $(\forall v_i \exists v_n \alpha)^\sigma = V$ vuol dire che comunque s'interpreti la variabile v_i attribuendole un qualsiasi elemento c dell'universo della struttura nella realizzazione σ, in corrispondenza al c scelto ci sarà un elemento, nell'universo della struttura nella realizzazione σ, che indicheremo con b_c per ricordare la sua dipendenza dalla scelta dell'elemento c, tale che $(\alpha)^{\sigma(v_i/c)(v_n/b_c)} = V$. E' immediato notare che se è vera nella realizzazione σ la prima formula allora lo è anche la seconda perché basta prendere per b_c sempre lo stesso elemento b. Al contrario se è vera la seconda non è detto che lo sia la prima, perché non è detto che ci sia un unico elemento d da attribuire alla variabile v_n in modo che $(\alpha)^{\sigma(v_i/c)(v_n/d)} = V$ qualunque sia l'elemento c scelto.

Si noti che la verità della formula $\forall v_i \exists v_n \alpha$ in una realizzazione σ parla dell'esistenza di un modo di far corrispondere ad ogni elemento c dell'universo un altro elemento dello stesso universo b_c in maniera tale che $(\alpha)^{\sigma(v_i/c)(v_n/b_c)} = V$. Non è assolutamente richiesto che questo modo di far corrispondere a un qualsiasi elemento dell'universo un altro in sua dipendenza sia una relazione o una funzione della struttura, anzi è un qualcosa che è visto dal di fuori della struttura esaminando quali formule sono vere in essa.

Concludiamo qui questa lunga parentesi e torniamo ad esaminare l'adeguatezza del linguaggio introdotto per la descrizione di strutture.

Prima di introdurre la quantificazione si era notato che il valore di verità di una formula in una struttura dipende dall'attribuzione di valori alle sole variabili che occorrono (compaiono) nella formula, cioè due diverse attribuzioni di valori alle variabili che però coincidano sulle variabili occorrenti nella formula fanno assumere a questa lo stesso valore di verità. Ora in una formula possono comparire occorrenze (al plurale perché una certa variabile può occorrere più volte) di variabili da cui non dovrà più dipendere l'interpretazione della formula stessa, come, ad esempio, le occorrenze della variabile v_i nella formula $\forall v_i \varphi$. Chiameremo vincolate queste occorrenze di variabili la cui interpretazione, mediante una attribuzione di valori alle variabili, è irrilevante per determinare il valore di verità di una formula in una realizzazione, e libere le altre occorrenze. La distinzione tra le occorrenze delle variabili ora accennata fa' riferimento al significato ed ha, pertanto, un carattere semantico.

Ricorrendo alla definizione sintattica ricorsiva ampliata di formula si può dire, in modo puramente sintattico, quali occorrenze di variabili sono **libere** e quali **vincolate** in una formula: il successivo teorema mostrerà che la definizione sintattica di variabili libere e vincolate coglie esattamente la corrispondente distinzione semantica. Ecco la definizione sintattica di occorrenze libere o vincolate di una variabile in una formula, per ricorsione sulla costruzione della formula.

Ogni occorrenza di una variabile in una formula atomica è libera. Le occorrenze libere e vincolate di variabili nelle formule φ_1 e φ_2 restano tali anche nelle formule $\neg\varphi_1$ e

$\wedge\varphi_1\varphi_2$[1]. Le occorrenze della variabile v_i in una formula del tipo $\forall v_i\varphi$ sono tutte vincolate, mentre le occorrenze delle variabili diverse da v_i in una tale formula sono libere o vincolate a seconda che lo siano in φ. Si noti che questa distinzione tra occorrenze libere e vincolate di variabili è puramente sintattica in quanto dipende esclusivamente dalla scrittura della formula.

Ora che si è introdotta la quantificazione e si sono distinte le variabili in libere e vincolate, si può affinare il risultato sulla dipendenza del valore di verità, in una realizzazione, di una formula (senza quantificazione) dalle sole variabili che occorrono nella formula, dicendo che il valore di verità, in una realizzazione, di una formula (ora anche eventualmente con quantificazioni) dipende solo dall'attribuzione di valori alle variabili che occorrono libere nella formula. Di fatto dimostriamo il seguente

Teorema. Se $\underline{a}$ e $\underline{a}'$ sono due attribuzioni di valori alle variabili che coincidono su tutte le variabili che occorrono libere in una formula α, allora $(\alpha)^\sigma=(\alpha)^{\sigma'}$ dove σ e σ' sono rispettivamente le realizzazioni $(\mathfrak{A},\underline{a})$ e $(\mathfrak{A},\underline{a}')$.

DIMOSTRAZIONE. Argomentiamo per induzione sulla costruzione della formula α.

- Se α è atomica, del tipo $Pt_1...t_n$, tutte le occorrenze di variabili nella formula (e nei termini) sono libere. Per quanto già visto, per ogni i compreso tra 1 e n, $(t_i)^\sigma=(t_i)^{\sigma'}$, dal momento che le variabili occorrenti in t_i occorrono libere in α e quindi sono interpretate in ugual modo dalle due interpretazioni $()^\sigma$ e $()^{\sigma'}$. Poiché $(P)^\sigma$ è $(P)^{\sigma'}$, segue che $(Pt_1..\,.t_n)^\sigma = (P)^\sigma(t_1{}^\sigma,...,t_n{}^\sigma) = (P)^{\sigma'}(t_1{}^{\sigma'},...,t_n{}^{\sigma'}) = (Pt_1...t_n)^{\sigma'}$.
- Se α è del tipo $\neg\beta$, allora, sfruttando l'ipotesi induttiva e il fatto che le occorrenze libere di variabili in α sono esattamente le occorrenze libere di variabili in β, si ha che $(\alpha)^\sigma = (\neg\beta)^\sigma = (\neg)^\sigma((\beta)^\sigma) = (\neg)^{\sigma'}((\beta)^{\sigma'}) = (\neg\beta)^{\sigma'}= (\alpha)^{\sigma'}$.
- Se α è del tipo $\wedge\beta\gamma$, allora, sfruttando l'ipotesi induttiva e il fatto che le occorrenze libere di variabili in α sono esattamente le occorrenze libere di variabili in β o in γ, $(\alpha)^\sigma = (\wedge\beta\gamma)^\sigma = (\wedge)^\sigma((\beta)^\sigma,(\gamma)^\sigma) = (\wedge)^{\sigma'}((\beta)^{\sigma'},(\gamma)^{\sigma'}) = (\wedge\beta\gamma)^{\sigma'}= (\alpha)^{\sigma'}$.
- Se α è del tipo $\forall x\beta$, allora $(\alpha)^\sigma = V$ se e solo se per ogni elemento $a\in A$ si ha $(\beta)^{\sigma(x/a)} = V$. Ma, per ipotesi induttiva, per ogni $a\in A$, $(\beta)^{\sigma(x/a)}=(\beta)^{\sigma'(x/a)}$, dal momento che le due interpretazioni $()^{\sigma(x/a)}$ e $()^{\sigma'(x/a)}$ coincidono su x e anche su tutte le variabili diverse da x che occorrono libere in β (poiché queste occorrono libere anche in α). Ciò significa che $(\alpha)^{\sigma'} = V$ se e solo se $(\alpha)^\sigma = V$.

ESERCIZIO. Di fatto il teorema appena dimostrato può essere ulteriormente rinforzato osservando che il valore di verità di una formula α non dipende neppure da tutti i simboli propri che non occorrono nella formula. Per far vedere ciò si deve dimostrare che,

---

[1] Credo che sia intuitivamente chiaro cosa si debba intendere per stessa occorrenza di una variabile nella formula φ e nella formula $\neg\varphi$, oppure nella ψ e nella formula $\wedge\varphi\psi$. Tuttavia, se si vuole essere davvero precisi ed evitare equivoci, questa nozione non è così semplice. Poiché una formula è una successione finita di simboli, si può dire che una certa occorrenza di una variabile è un simbolo di quel tipo che è in un preciso punto della successione che è la formula, diciamo al k-esimo posto nella scrittura della formula φ. Per stessa occorrenza di quella variabile nella formula $\neg\varphi$ si deve intendere quella stessa variabile che occorre nel posto (k+1)-esimo della formula $\neg\varphi$, proprio per l'aggiunta all'inizio del simbolo $\neg$. Analogamente, se una certa variabile occorre al posto h-esimo nella formula ψ, allora occorrerà anche nela formula $\wedge\varphi\psi$ nel posto h+1+lunghezza della formula φ, e questa sarà detta la stessa occorrenza di quella variabile in ψ come in $\wedge\varphi\psi$. Similmente si dovrà fare per le formule di altri tipi.

se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sono strutture con lo stesso universo e che interpretano ugualmente i simboli propri che occorrono in α, e $\underline{a}$ e $\underline{a}'$ sono due attribuzioni di valori alle variabili che coincidono su tutte le variabili che occorrono libere in α, e $\sigma = (\mathfrak{A},\underline{a})$ e $\sigma' = (\mathfrak{B},\underline{a}')$, allora $(\alpha)^{\sigma}=(\alpha)^{\sigma'}$. Questa dimostrazione si svolge in modo del tutto analogo a quanto fatto finora ripartendo dall'inizio e considerando le dovute modifiche.
Si osservi che una quantificazione, dal momento che vincola una variabile, ha anche l'effetto di ridurre di uno il numero delle variabili da cui dipende il valore di verità di una formula che inizia con un quantificatore se quella variabile occorre libera nella formula che segue la quantificazione.

Il Teorema dimostrato permette di introdurre la nuova notazione $\mathfrak{A}\models\varphi[a_o,...,a_{n-1}]$ per indicare che una formula φ, le cui variabili con occorrenze libere sono tutte tra v_o,..., v_{n-1}, è vera se interpretata in una realizzazione dipendente da una struttura $\mathfrak{A}$ e da una attribuzione alle variabili che assegni alle variabili $v_o,...,v_{n-1}$ gli elementi a_o,..., a_{n-1} dell'universo di $\mathfrak{A}$. Se poi nella formula non occorrono variabili libere, in tal caso la formula viene detta **enunciato**, allora essa è o vera o falsa in una struttura indipendentemente dall'attribuzione di valori alle variabili, e nella nuova notazione si scriverà $\mathfrak{A}\models\varphi$. Possiamo dire che un enunciato descrive ciò che avviene in una struttura in cui è vero.
Attenzione, si è definita l'interpretazione del simbolo $\forall$ e della formula $\forall v_i\varphi$ del linguaggio formale, ma per fare ciò bisogna già conoscere il significato di "per ogni" in italiano: in quanto fatto non si è detto finalmente cosa vuol dire "per ogni", ma si è detto cosa vuol dire $\forall$ nel linguaggio formale se si sa già cosa vuol dire "per ogni" in italiano (in castellano nella traduzione), e, se non si sa questo, non si è detto niente. Se si fosse preteso di spiegare mediante la logica, meglio mediante un linguaggio formale, cosa vuol dire "per ogni" si sarebbero fatte delle affermazioni senza senso, perché il significato della locuzione "per ogni" non si spiega con la logica, ma si impara con l'uso della lingua materna fin dall'infanzia. Ma ora non interessa il processo di apprendimento della lingua materna.
Quella data è una definizione nel metalinguaggio del significato del simbolo $\forall$ del linguaggio formale. Si deve supporre di sapere cosa vuol dire "per ogni" nel metalinguaggio. Non è detto che lo si sappia effettivamente in modo completo, ma si suppone di saperlo. Solo allora, mediante la definizione precedente nel metalinguaggio, si è detto cosa si intende per significato del simbolo $\forall$ del linguaggio formale.
Ciò che può provocare confusione è l'uso dello stesso nome sia per la frase "per ogni" che per il simbolo $\forall$; forse le cose sarebbero più facili se chiamassi "sgorbio" il simbolo $\forall$. In tal caso direi che la formula da leggersi "sgorbio $v_i\varphi$" è vera nei casi precisati dalla precedente definizione. $\forall$ (sgorbio) è una cosa totalmente differente da "per ogni"; $\forall$ è un simbolo del linguaggio oggetto che ha un suo comportamento sintattico, permette di costruire delle formule nel modo detto prima, ed ha anche un suo comportamento semantico, un suo significato, che è esattamente quello detto prima.
Con la notazione introdotta si può affrontare il problema avviato di dare una interpretazione di una formula non solo in una realizzazione, ma anche in una struttura, di dare cioè un significato alla notazione $\varphi^{\mathfrak{A}}$ dove φ è una formula e $\mathfrak{A}$ una struttura. Come per l'interpretazione dei termini, il significato da dare a $\varphi^{\mathfrak{A}}$ è quello di una funzione, che sarà indicata da f_φ , questa volta dalle attribuzioni di valori alle prime, diciamo n, variabili, che includono quelle che possono occorrere libere nella formula, nei valori

di verità, e precisamente $f_\varphi(a_o,..., a_{n-1})$=V se $\mathfrak{A}\models\varphi[a_o,...,a_{n-1}]$, altrimenti $f_\varphi(a_o,..., a_{n-1})$ = F.

10. STENOGRAFIA E LINGUAGGIO FORMALE.

In matematica si fa spesso un uso stenografico di certi simboli. Si usa il simbolo $\forall$ semplicemente per abbreviare la scrittura di "per ogni", e "sse" per abbreviare "se e solo se": sono stenografie. Spesso, il simbolismo preso dalla logica è usato solo come una stenografia. Non è che ciò sia proibito, basta aver coscienza che si usa quel simbolismo come stenografia, e che non sono simboli di un linguaggio formale. Il linguaggio formale non è la stenografia, non è una scrittura abbreviata, il linguaggio formale è un nuovo linguaggio, è una nuova costruzione, è un nuovo oggetto di cui ci interessa il comportamento per verificare i suoi limiti e le sue potenzialità descrittive. Analogamente, quando ad esempio si introducono i numeri complessi, si costruisce un nuovo oggetto per fare certe operazioni. Qui, invece, l'oggetto che si costruisce e si studia è un linguaggio formale.

Una certa dose di stenografia può essere utile fin dalle prime fasi dello studio della matematica. Non così per il linguaggio formale. Questo va introdotto solo quando se ne sente l'esigenza. Ma quando se ne è sentita l'esigenza? Da un punto di vista storico, in modo particolare in questo secolo, dopo la crisi dei fondamenti, dopo l'introduzione dell'informatica, perché entrambe richiedono un linguaggio formale, cioè un sistema simbolico, su cui operare meccanicamente in corrispondenza delle operazioni sui significati che si vogliono controllare o elaborare. Così le operazioni puramente sintattiche sul simbolismo possono essere eseguite anche da una macchina che sarà utile all'uomo che conosce la corrispondenza tra le operazioni sintattiche e le operazioni sui significati delle formule.

11. LA TRASMISSIONE E L'ASCOLTO DI MESSAGGI. ISOMORFISMO ED ELEMENTARE EQUIVALENZA TRA STRUTTURE.

Al punto 3., si è già osservato che un linguaggio, anche formale, può essere visto come uno strumento comunicativo, e, come tale, può essere soggetto a interpretazioni in varie realizzazioni. Allora questa affermazione si riferiva all'interpretazione dei simboli del linguaggio; ora che il concetto di interpretazione in una realizzazione è stato introdotto anche per insiemi di formule è opportuno ritornare con più attenzione su quell'osservazione.

Chi vuol descrivere una situazione, più precisamente una struttura con una attribuzione di valori alle variabili, o almeno certi suoi aspetti, può usare un messaggio, cioè un insieme di formule, che siano vere appunto quando sono interpretate in quella struttura con quella attribuzione di valori alle variabili. Ovviamente, chi vuol trasmettere un messaggio parte da una realizzazione, che deve conoscere, e individua un insieme di formule vere quando sono interpretate in quella realizzazione: per lui la realizzazione è unica e prefissata.

Dall'altra parte, chi riceve un insieme di formule può non conoscere la realizzazione in cui il mittente intende interpretare dette formule. Il suo problema non è tanto quello di vedere se le formule ricevute sono vere o meno se interpretate in una prefissata realizzazione (possibilmente quella intesa dal mittente), ma piuttosto determinare l'insieme (che può anche essere vuoto) delle realizzazioni in cui quelle formule sono interpretabili nel vero. Detto altrimenti, egli vuole verificare se è accettabile l'assunzione che quelle formule siano vere se interpretate in una realizzazione e riconoscere in quali realizzazioni ciò avviene: per lui la realizzazione in cui interpretare delle formule non è detto sia unica e sicuramente non è prefissata, ma è l'obiettivo della sua ricerca.

Tutto ciò ribadisce l'importanza di considerare tutte le possibili realizzazioni di un insieme di formule in un linguaggio, e si nota ancora che non si può parlare semplicemente di verità di una formula, ma solo di verità di una formula quando è interpretata in una realizzazione.

Rimane il problema se chi vuol descrivere una realizzazione può trovare un insieme di formule che sono vere se e solo se vengono interpretate in quella realizzazione: ciò permetterebbe di individuare univocamente quella realizzazione, e consentirebbe la comunicazione più esatta tra mittente e ricevente. La risoluzione di questo problema è una delle motivazioni principali per lo studio che si sta intraprendendo, e la soluzione apparirà ben più avanti, quando si saranno sviluppati gli strumenti necessari per arrivarvi.

Ma fin da ora è possibile una osservazione: già nel momento dell'invio di un messaggio, cioè nel descrivere una realizzazione mediante formule che siano vere in quella realizzazione, ciò che viene descritto è il comportamento della struttura e dell'attribuzione di valori alle variabili, e non l'essenza degli elementi dell'universo e l'essenza delle relazioni, eccetera. (Questo atteggiamento è anche consono al generale atteggiamento estensionale della matematica). Così due strutture che si comportino esattamente nello stesso modo (ciò comporta tra l'altro che le due strutture sono dello stesso tipo) dovranno essere considerate sostanzialmente la stessa e, quindi, non potranno essere distinte mediante enunciati (cioè formule senza variabili libere che richiederebbero il ricorso ad una realizzazione, e non ad una struttura) del linguaggio. Per precisare questa importante nozione di avere lo stesso comportamento, si introduce la nozione di isomorfismo.

Due strutture, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, dello stesso tipo si dicono **isomorfe**, e si scriverà $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, se esiste una biiettività (detta **isomorfismo**) dall'universo della prima sull'universo della seconda che preserva la strutturazione. Una funzione f dall'universo di una struttura nell'universo di un'altra **preserva la strutturazione** se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) per ogni relazione n-aria R della prima struttura, una qualsiasi n-upla $a_1,...,a_n$ del suo universo appartiene alla relazione R se e solo se l'n-upla $f(a_1),...,f(a_n)$, che le corrisponde attraverso la funzione, appartiene alla corrispondente relazione (cioè la relazione, nella seconda struttura, associata al predicato che denota la relazione R); e inoltre

2) per ogni funzione n-aria F della prima struttura che fa corrispondere ad una qualsiasi data n-upla $a_1,...,a_n$ del suo universo l'elemento a, la corrispondente funzione (cioè la funzione, nella seconda struttura, associata al simbolo di funzione associato alla funzione F) fa corrispondere all'n-upla $f(a_1),..., f(a_n)$ l'elemento $f(a)$; ed infine

3) ad ogni costante c della prima struttura la funzione f fa corrispondere la corrispondente costante (cioè la costante, nella seconda struttura, associata al simbolo di costante associato alla costante c).

La nozione di isomorfismo tra strutture collega strutture che non si distinguono per il comportamento degli elementi (elementi corrispondenti si comportano nello stesso modo), ma si distinguono solo per l'identità degli elementi, cioè per chi sono gli elementi, fatto questo difficilmente accertabile specie per elementi astratti (cioè costruiti nella mente), e, spesso, di scarsa rilevanza. Si può dire che due strutture isomorfe non sono distinguibili in base al loro manifestarsi, e sono sostanzialmente la stessa struttura.

Un esempio non banale di isomorfismo è il seguente. Si considerino la struttura ordinata additiva dei reali e la struttura ordinata moltiplicativa dei reali positivi, cioè le strutture $(\mathbb{R},\{=,<\},\{+\},\{0\})$ e $(\mathbb{R}^+,\{=,<\}.\{\times\}.\{1\})$, dove $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R}^+$ l'insieme dei reali positivi e gli altri simboli si spiegano da se stessi. Le funzioni esponenziali a^x, con a numero reale maggiore di 1 e x variabile sui numeri reali, sono isomorfismi (lo si dimostri per esercizio).

Si osservi che due strutture isomorfe hanno universi equinumerosi (di uguale cardinalità), poiché un isomorfismo è anzitutto una biiettività tra gli universi delle strutture. Così è naturale introdurre la nozione di **cardinalità di una struttura** $\mathfrak{A}$, che si indica con $\|\mathfrak{A}\|$, come la cardinalità del suo universo, $|A|$ se A è l'universo di $\mathfrak{A}$.

Si è detto che due strutture isomorfe non dovrebbero essere distinguibili mediante enunciati. Ora si vuol dimostrare questo risultato, notando però che la nozione di enunciato non è stata presentata direttamente, magari per induzione, ma è stata ottenuta da quella di formula. Così per arrivare alla dimostrazione si farà vedere qualcosa di più generale, e precisamente che:

Teorema. Siano date due strutture $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tra loro isomorfe, mediante un isomorfismo f, una qualsiasi attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ sulla prima struttura e la corrispondente attribuzione di valori alle variabili $\underline{b}$ sulla seconda struttura così definita $\underline{b}(v_i) = f(\underline{a}(v_i))$ per ogni variabile v_i. Si considerino le realizzazioni $\sigma = (\mathfrak{A},\underline{a})$ e $\sigma' = (\mathfrak{B},\underline{b})$. Allora per ogni formula φ la sua interpretazione nella realizzazione σ coincide con la sua interpretazione nella realizzazione σ', $\varphi^\sigma = \varphi^{\sigma'}$.

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto serve un analogo risultato per i termini, e precisamente: per ogni termine t risulta che $f(t^\sigma) = t^{\sigma'}$. Infatti, per induzione sulla costruzione del termine, se t è un simbolo per costante l'uguaglianza segue dalla definizione di isomorfismo tra le due strutture, se t è una variabile l'uguaglianza è giustificata dalla definizione dell'attribuzione di valori alle variabili $\underline{b}$, se infine t è del tipo $ft_1...t_n$, con f simbolo di funzione n-ario, dalla definizione di isomorfismo e dall'ipotesi induttiva si ha che $f(t^\sigma)=f((ft_1...t_n)^\sigma)=f(f^\sigma(t_1{}^\sigma,...,t_n{}^\sigma))=f^{\sigma'}(f(t_1{}^\sigma),...,f(t_n{}^\sigma))=f^{\sigma'}(t_1{}^{\sigma'},...,t_n{}^{\sigma'})=(ft_1...t_n)^{\sigma'}=t^{\sigma'}$.

Da quanto appena visto si ottiene il risultato voluto per le formule atomiche. Infatti se φ è $Pt_1...t_n$ (P predicato n-ario) allora $\varphi^\sigma = (Pt_1...t_n)^\sigma = V$ se e solo se $(t_1{}^\sigma,...,t_n{}^\sigma)\in P^\sigma$ se e solo se $(f(t_1{}^\sigma),...,f(t_n{}^\sigma))\in P^{\sigma'}$ (grazie alla definizione di isomorfismo) se e solo se (per quanto dimostrato prima) $(t_1{}^{\sigma'},...,t_n{}^{\sigma'})\in P^{\sigma'}$ se e solo se $(Pt_1...t_n)^{\sigma'} = \varphi^{\sigma'} = V$, cioè $\varphi^\sigma = \varphi^{\sigma'}$ se φ è una formula atomica.

I casi dell'induzione che riguardano le formule che iniziano con i simboli $\neg$ o $\wedge$ sono banali e lasciati al lettore.

Per concludere la dimostrazione resta da considerare il caso in cui la formula φ sia del tipo $\forall x\psi$. Si noti che $(\forall x\psi)^\sigma=V$ se e solo se per ogni elemento a appartenente all'universo di σ si ha che $\psi^{\sigma(x/a)} = V$. Per ipotesi induttiva, sempre per ogni tale a, e ricordando che per definizione la realizzazione corrispondente alla realizzazione $\sigma(x/a)$ è $\sigma'(x/f(a))$, $\psi^{\sigma(x/a)} = V$, se e solo se $\psi^{\sigma'(x/f(a))} = V$, cioè, dal momento che f è suriettiva, se e solo se per ogni b appartenente all'universo di σ' si ha che $\psi^{\sigma'(x/b)} = V$, che equi-

vale a dire che $(\forall x\psi)^{\sigma'}$=V, il che conclude la dimostrazione per induzione e la dimostrazione del teorema.
Come banale conseguenza del teorema appena dimostrato si ha che, per ogni enunciato φ, se $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{A} \models \varphi$ se e solo se $\mathfrak{B} \models \varphi$, come si prevedeva.

Tornando al problema di riuscire a caratterizzare univocamente una struttura specificando degli enunciati che debbano essere interpretati nel vero in quella struttura, come conseguenza di quanto dimostrato si devono correggere un po' le aspettative, nel senso che la struttura sarà precisata al più a meno di isomorfismi, e sarà già un risultato notevole poter dire che tutte le strutture in cui sono veri tutti gli enunciati di un insieme sono tra loro isomorfe.

Un altro modo (più debole) per due strutture di avere un analogo comportamento è quello di non essere distinguibili mediante enunciati di un certo linguaggio.
Due strutture, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, che non possono essere distinte mediante gli enunciati di un linguaggio $\mathcal{L}$ (cioè ogni enunciato del linguaggio è vero in una struttura se e solo se è vero nell'altra) si dicono **elementarmente equivalenti**. Ciò si indica con la notazione $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$. Detto altrimenti, $\mathfrak{A} \equiv_{\mathcal{L}} \mathfrak{B}$ se per ogni enunciato φ nel linguaggio $\mathcal{L}$ si ha che $\mathfrak{A} \models \varphi$ se e solo se $\mathfrak{B} \models \varphi$. Se è noto a che linguaggio ci si riferisce, si usa la notazione $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Th($\mathfrak{A}$) indica la **teoria della struttura** $\mathfrak{A}$, cioè l'insieme di tutti gli enunciati nel linguaggio $\mathcal{L}$ veri nella struttura $\mathfrak{A}$: Th($\mathfrak{A}$)={φ: φ è un $\mathcal{L}$-enunciato tale che $\mathfrak{A} \models \varphi$}. Usando tale nozione la condizione $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ può essere espressa dicendo che Th($\mathfrak{A}$) = Th($\mathfrak{B}$). Si noti che per un qualsiasi enunciato φ del linguaggio $\mathcal{L}$ adatto alla struttura $\mathfrak{A}$ o lui o la sua negazione appartiene alla Th($\mathfrak{A}$).
Dal facile corollario al teorema prima dimostrato segue che se $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. In generale non vale il viceversa di quanto ora asserito, cioè esistono strutture elementarmente equivalenti ma non isomorfe, ma ciò sarà visto più oltre quando si saranno sviluppati gli strumenti necessari per dimostrare tale affermazione. I due ultimi risultati giustificano l'asserzione che la nozione di elementare equivalenza è più debole di quella di isomorfismo.

12. SOSTITUZIONI.

Si è già visto che un motivo per introdurre una variabile individuale può essere quello di voler indicare un individuo più o meno definitivamente ben precisato. In qualche modo la formula in cui ci sono occorrenze libere di una variabile parla dell'individuo associato alla variabile. Può anche darsi che, ad un certo punto, si voglia menzionare esplicitamente il nome dell'individuo, nome che dovrà essere messo al posto della variabile; o si voglia fare la stessa affermazione riguardo ad un individuo che ha un diverso nome, nel qual caso un altro termine dovrà essere messo al posto della variabile. Si vogliono ora studiare le problematiche connesse ad una tale operazione di cambiamento di un termine in una formula, sia dal punto di vista sintattico che semantico.
Sia, dunque, α una formula in cui può occorrere una variabile, diciamo la variabile x. Sia t un termine. Indichiamo con $\alpha(x/t)$ la formula ottenuta dalla formula α sostituendo nella sua scrittura il termine t al posto delle occorrenze libere della variabile x. Co-

sì, ad esempio, se α è la formula Pv_0, dove P è un predicato unario, e t è il termine costituito dal simbolo di costante c, allora $Pv_0(v_0/c)$ è la formula Pc, come ci si aspetta, e non si intravedono difficoltà, neppure rispetto ad una possibile interpretazione in una realizzazione. Infatti se l'attribuzione di valori alle variabili della realizzazione assegna alla variabile v_0 lo stesso elemento dell'universo che è la costante della struttura della realizzazione corrispondente al simbolo di costante c, allora il significato delle due formule interpretate in quella realizzazione sarà lo stesso; se invece l'elemento dell'universo non è lo stesso, allora il significato può essere diverso.

Per parlare più agevolmente di ciò che seguirà, è opportuno introdurre il concetto di **sottoformula** di una formula α. Questa vuole essere la successione di simboli che è una formula e che è compresa tra due simboli della formula α. Ciò è ben precisato dalla seguente definizione di sottoformula di α per induzione sulla costruzione della formula α: l'unica sottoformula di una formula atomica è la formula atomica stessa; le sottoformule di una formula del tipo $\neg\beta$ sono la stessa formula e anche le sottoformule di β; le sottoformule di una formula del tipo $\wedge\beta\gamma$ sono la stessa formula e anche le sottoformule di β e di γ, le sottoformule di una formula del tipo $\forall v_i\beta$ sono la stessa formula e anche le sottoformule di β. La definizione coglie proprio ciò che si voleva indicare, nel senso che una sottoformula è una formula che è costituita dalla successione di simboli, occorrenti nella formula, compresa tra due simboli (estremi inclusi) di quella formula (facili dimostrazioni per induzione sulla costruzione delle formule). Chiameremo **sottoformula propria** di una formula α una sottoformula di α diversa da α. In questo contesto si può definire cosa si intende per il **raggio d'azione** di una occorrenza di un quantificatore in una formula α: esso è la sottoformula di α che inizia con quel quantificatore.

Si consideri ora la formula $\forall v_0 \wedge Pv_0Pv_1$. Si coglie immediatamente il motivo per cui si è limitata la sostituzione solo alle variabili che occorrono libere: se infatti si sostituisse un termine al posto di una variabile vincolata il significato della formula interpretata in una qualsiasi realizzazione non cambierebbe solo nell'attribuire un certo comportamento ad un individuo piuttosto che ad un altro, ma sarebbe completamente stravolto, perché quel termine sarebbe interpretato in un elemento dell'universo e non via via in tutti gli elementi per studiare il comportamento globale dell'interpretazione nella realizzazione della sottoformula che segue la quantificazione, come è richiesto dalla formula, e non è ciò che si vuole. La stessa ultima formula introdotta ci permette di notare anche un altro pericolo: se infatti in essa si volesse sostituire il termine fv_0 (dove f è un simbolo di funzione unario) alla occorrenza della variabile v_1, che è libera, si otterrebbe la formula $\forall v_0 \wedge Pv_0Pfv_0$ che, interpretata in una qualsiasi realizzazione, ha ancora un significato molto diverso da quello che si vorrebbe, perché nel termine fv_0 occorre la variabile v_0 che diviene vincolata, contro le intenzioni di ciò che si voleva fare con la variabile libera v_1. Nel caso descritto si parla di cattura di variabili, nel senso che una occorrenza di una variabile, la v_1, che è libera, pur essendo nel raggio d'azione di un quantificatore, che è seguito immediatamente dalla diversa variabile v_0, viene sostituita da un termine in cui occorre la stessa variabile v_0, che seguiva immediatamente quel quantificatore, sicché, in quella posizione, l'occorrenza della variabile v_0, inserita con la sostituzione, diventa vincolata, venendo "catturata" dal quantificatore, cioè essendo nel raggio d'azione di quel quantificatore seguito immediatamente proprio dalla variabile v_0.

Per evitare la cattura di variabili appena evidenziata si introduce la seguente definizione. Un termine t è detto **libero per una variabile** x **in una formula** α se nessuna occorrenza libera della variabile x è nel raggio d'azione di un quantificatore seguito immediatamente da una variabile che occorre nel termine t. Se t è libero per x in α, in base alle osservazioni precedenti, pare abbia senso effettuare la sostituzione, e si indica con $\alpha(x/t)$ la formula ottenuta dalla formula α sostituendo, nella sua scrittura, il termine t al posto delle occorrenza libere della variabile x. Ovviamente, se in α non ci sono occorrenze libere della variabile x, $\alpha(x/t)$ indica la stessa formula α. Per mostrare che in questo caso la sostituzione coglie il significato che si intendeva, si dimostrerà che, rispetto ad una qualsiasi realizzazione σ, $\alpha(x/t)^\sigma = \alpha^{\sigma(x/t^\sigma)}$, cioe' la formula $\alpha(x/t)$ interpretata in σ ha lo stesso significato di α quando la sua variabile x e' interpretata proprio come t e' interpretata da σ, e gli altri simboli sono interpretati come previsto da σ.

Per arrivare a dimostrare questo risultato, si dimostra prima qualcosa di analogo per i termini. Sia t' un termine in cui può occorrere la variabile x, si indichi con t'(x/t) il termine ottenuto dal termine t' sostituendo in esso al posto di ogni occorrenza delle variabile x il termine t. In tale situazione $t'(x/t)^\sigma=t'^{\sigma(x/t^\sigma)}$. Si può dimostrare questa affermazione per induzione sulla costruzione di t'. Se t' è un simbolo per costante o una variabile diversa da x allora t'(x/t) è t' e l'uguaglianza da dimostrare è banale. Se t' è la variabile x allora t'(x/t) è t e chiaramente $t'(x/t)^\sigma=t^\sigma=x^{\sigma(x/t^\sigma)}=t'^{\sigma(x/t^\sigma)}$. Infine se t' è del tipo $ft_1...t_n$, allora t'(x/t) è $ft_1(x/t)...t_n(x/t)$ e $t'(x/t)^\sigma = (ft_1(x/t)...t_n(x/t))^\sigma = f^\sigma((t_1(x/t))^\sigma, ...,(t_n(x/t))^\sigma)$ = (per ipotesi induttiva) $f^\sigma(t_1{}^{\sigma(x/t^\sigma)},...,t_n{}^{\sigma(x/t^\sigma)}) = (ft_1...t_n)^{\sigma(x/t^\sigma)} = t'^{\sigma(x/t^\sigma)}$. Così, avendo provato la base nei vari casi e il passo della dimostrazione per induzione, si può concludere con la tesi.

Si può ora dimostrare che, se α è una formula atomica del tipo $Pt_1...t_n$, allora $\alpha(x/t)^\sigma= \alpha^{\sigma(x/t^\sigma)}$. Infatti $\alpha(x/t)^\sigma=(Pt_1(x/t)...t_n(x/t))^\sigma=V$ se e solo se $((t_1(x/t))^\sigma,...,(t_n(x/t))^\sigma)\in P^\sigma$ se e solo se (per quanto visto precedentemente) $(t_1{}^{\sigma(x/t^\sigma)},...,t_n{}^{\sigma(x/t^\sigma)})\in P^\sigma$ se e solo se $V=(Pt_1...t_n)^{\sigma(x/t^\sigma)} = \alpha^{\sigma(x/t^\sigma)}$. Si noti che, non essendoci quantificatori in questo caso, ogni termine è libero per qualsiasi variabile in α.

Se poi α è una formula del tipo $\neg\beta$ o del tipo $\wedge\beta_1\beta_2$ o del tipo $\forall y\beta$, dove β, β_1, β_2 sono formule e y è una variabile diversa da x, allora, dal momento che i termini liberi per x in α sono liberi per x anche in β o β_1 o β_2 rispettivamente (meditare perché), si ha che
$((\neg\beta)(x/t))^\sigma = (\neg(\beta(x/t)))^\sigma = \neg^\sigma((\beta(x/t))^\sigma)$ = (per ipotesi di induzione) $\neg^\sigma((\beta)^{\sigma(x/t^\sigma)}) = (\neg\beta)^{\sigma(x/t^\sigma)}$,
e $((\wedge\beta_1\beta_2)(x/t))^\sigma = \wedge^\sigma((\beta_1(x/t))^\sigma,(\beta_2(x/t))^\sigma)$ = (per ipotesi di induzione) $\wedge^\sigma(\beta_1{}^{\sigma(x/t^\sigma)}, \beta_2{}^{\sigma(x/t^\sigma)}) = (\wedge\beta_1\beta_2)^{\sigma(x/t^\sigma)}$,
e $((\forall y\beta)(x/t))^\sigma$ = (poiché o x non occorre in β, caso banale che non si considererà ulteriormente, o y non occorre in t, essendo t libero per x in $\forall y\beta$) $(\forall y(\beta(x/t)))^\sigma = V$ se e solo se $(\beta(x/t))^{\sigma(y/a)} = V$ per ogni $a\in A$ (con A universo della struttura della realizzazione σ), se e solo se (per ipotesi di induzione) $\beta^{\sigma(y/a)(x/t^{\sigma(y/a)})} = V$ per ogni $a\in A$, se e solo se (poiché $t^\sigma=t^{\sigma(y/a)}$ non occorrendo y in t) $\beta^{\sigma(y/a)(x/t^\sigma)} = V$ per ogni $a\in A$, se e solo se (poiché y non è x) $\beta^{\sigma(x/t^\sigma)(y/a)} = V$ per ogni $a\in A$, se e solo se $(\forall y\beta)^{\sigma(x/t^\sigma)} = V$.

Infine se α è una formula del tipo $\forall x\beta$, dove β è una formula, allora $(\forall x\beta)(x/t)$ è $\forall x\beta$, non essendoci occorrenze libere di x, e, per lo stesso motivo, $(\forall x\beta)^\sigma = (\forall x\beta)^{\sigma(x/t^\sigma)}$.

Avendo esaurito i casi della dimostrazione per induzione, si è conclusa la dimostrazione che $\alpha(x/t)^\sigma=\alpha^{\sigma(x/t^\sigma)}$, rispetto ad una qualsiasi realizzazione σ.

Abbiamo fin qui visto il significato della sostituzione di un termine libero per una variabile in una formula, al posto delle occorrenze libere di quella variabile nella formula.

Al contrario delle occorrenze libere di una variabile, che indicano un elemento dell'universo della realizzazione, le variabili vincolate indicano il fatto che si vuole vedere se c'è una caratteristica del comportamento globale di una certa affermazione riguardo a tutti gli individui dell'universo. Qui il nome usato per essere interpretato nei vari individui dell'universo sembra irrilevante, purché non si generino confusioni. Ci si può allora domandare quali sono i pericoli, le conseguenti attenzioni, e cosa succede se si cambia il nome alle occorrenze vincolate di una variabile? Ovviamente al suo posto bisognerà mettere ancora una variabile se si vuole che rimanga un nome da interpretare in tutti i modi possibili. Cosi pare che non dovrebbe succedere nulla di particolare poiché una variabile quantificata sta ad indicare un qualsiasi individuo, non uno specifico, e, cambiandogli nome, non dovrebbe cambiare il significato della formula interpretata in una qualsiasi realizzazione, al contrario della sostituzione di un termine al posto delle occorrenze libere di una variabile. Ad esempio sostituendo al posto delle occorrenze vincolate della variabile v_0 la variabile v_1 nella formula $\forall v_0 P v_0$, dove P è un predicato unario, si ottiene la formula $\forall v_1 P v_1$ che, come si verifica immediatamente e come si dimostrerà, interpretata in una qualsiasi realizzazione, ha lo stesso significato della prima formula.

Ma il seguente esempio mostra che anche per le sostituzioni di occorrenze vincolate di variabili ci vogliono delle attenzioni. Sia Q un predicato binario e si consideri la formula $\forall v_0 \wedge Q v_0 v_1 \forall v_1 Q v_0 v_1$, in cui la prima occorrenza della variabile v_1 è libera. Se in questa formula si sostituisce al posto delle occorrenze vincolate della variabile v_0 proprio la variabile v_1 si ottiene $\forall v_1 \wedge Q v_1 v_1 \forall v_1 Q v_1 v_1$ che si intuisce debba avere un significato abbastanza diverso da quello della formula di partenza dal momento che ora l'occorrenza di v_1 che prima era libera è diventata vincolata e quella che prima era l'ultima occorrenza di v_0 che era vincolata dal primo quantificatore ora è una occorrenza di v_1 vincolata dall'altro quantificatore (c'è stata ancora una cattura di variabili anche se di tipo diverso). Un modo per evitare queste anomalie è supporre che la variabile v_j che si vuole mettere al posto delle occorrenze vincolate di un'altra variabile v_i in una formula α non abbia, in una sottoformula δ di α che inizi con $\forall v_i$, occorrenze che sono libere relativamente alla sottoformula δ, e che v_i non abbia, in una sottoformula δ' di α che cominci con $\forall v_j$, occorrenze libere relativamente alla sottoformula δ'. L'ultima condizione implica che v_j è libera per v_i in δ'. Una sostituzione delle occorrenze vincolate di una variabile che rispetti le condizioni appena enunciate è detta un cambio alfabetico. Ma si può precisare meglio la nozione di formula α' ottenuta dalla formula α per **cambio alfabetico** della variabile v_i con la variabile v_j, dandone una definizione per induzione sulla costruzione della formula α. Così, se α è una formula atomica ogni cambio alfabetico su α dà ancora α. Se α è $\neg\beta$ oppure $\wedge\gamma\lambda$, o $\forall v_k \delta$, con k diverso da i, e β', γ', λ' e δ' sono le formule ottenute da β, γ, λ e δ rispettivamente per cambio alfabetico della variabile v_i con la variabile v_j, allora α' sarà rispettivamente o $\neg(\beta')$ o $\wedge(\gamma')(\lambda')$ o $\forall v_k(\delta')$. Se, infine, α è $\forall v_i \delta$ e la variabile v_j non occorre libera in δ ed è un termine libero per v_i in δ, allora α' è $\forall v_j(\delta(v_i/v_j))$, mentre, se v_j non soddisfa dette condizioni, non si può effettuare il cambio alfabetico di v_i con v_j, e α' è α. In particolare se si sostituisce, al posto delle occorrenze vincolate di una variabile, un'altra variabile che non occorre né libera né vincolata in una formula, questa variabile sicuramente soddisfa le condizioni per poter effettuare il cambio alfabetico.

Mostriamo ora che una formula α e una formula α' ottenuta da α per cambio alfabetico hanno lo stesso valore di verità quando sono interpretate in una stessa arbitraria realizzazione, cioè

TEOREMA Per ogni realizzazione σ, e per ogni formula α, se la formula α' è ottenuta da α per cambio alfabetico allora $\alpha^{\sigma}=\alpha'^{\sigma}$.
DIMOSTRAZIONE. Al solito si argomenta per induzione sulla costruzione delle formule. Se la formula è atomica il risultato è banale perché l'esecuzione di un cambio alfabetico non cambia la formula. Se la formula α è del tipo $\neg\beta$ o del tipo $\wedge\gamma\lambda$ o del tipo $\forall x\delta$, in cui il cambio alfabetico riguarda le occorrenze vincolate di una variabile diversa da x, e se β', γ', λ' e δ' sono ottenute mediante lo stesso cambio alfabetico da β, γ, λ e δ rispettivamente, poiché per ipotesi induttiva, qualsiasi sia la realizzazione σ, si ha che $\beta^{\sigma}=\beta'^{\sigma}$, $\gamma^{\sigma}=\gamma'^{\sigma}$, $\lambda^{\sigma}=\lambda'^{\sigma}$, e $\delta^{\sigma(x/a)}=\delta'^{\sigma(x/a)}$, risulta anche che $\alpha^{\sigma}=\alpha'^{\sigma}$. Infine, si consideri l'eventualità che la formula α sia del tipo $\forall x\delta$ e il cambio alfabetico riguardi proprio la variabile x da sostituire con la variabile y. In tal caso, qualunque sia la realizzazione σ, $\forall x\beta^{\sigma}=V$ se e solo se per ogni a appartenente all'universo della realizzazione σ si ha che $\beta^{\sigma(x/a)}=V$. Ma $\beta^{\sigma(x/a)}=$ (poiché y non occorre libera in β) $\beta^{\sigma(y/a)(x/a)}=$ (poiché $y^{\sigma(y/a)}=a$) $\beta^{\sigma(y/a)(x/y^{\sigma(y/a)})}$ = (per il risultato sulla sostituzione di occorrenze libere di variabili, dal momento che le occorrenze di x vincolate da $\forall x$ in $\forall x\beta$ sono libere in β, e che y è libera per x in β) $\beta(x/y)^{\sigma(y/a)}$. Così, per ogni a appartenente all'universo della realizzazione σ, si ha che $\beta^{\sigma(x/a)}=V$ se e solo se $\beta(x/y)^{\sigma(y/a)} = V$. Quindi $\forall x\beta^{\sigma}=V$ se e solo se $\forall y\beta(x/y)^{\sigma} = V$, che è ciò che si voleva far vedere per concludere la dimostrazione per induzione sulla costruzione delle formule.
Si chiama **variante** di una formula α una formula ottenuta da α mediante cambi alfabetici. Dal risultato precedente segue immediatamente che una formula e una sua variante sono vere nelle stesse realizzazioni sicché, dal punto di vista delle realizzazioni, si può considerare l'una invece dell'altra.

I cambi alfabetici permettono anche di definire le **sostituzioni di un termine al posto delle occorrenze libere di una variabile in una formula** anche se il termine non è libero per quella variabile in quella formula. Di fatto con opportuni cambi alfabetici si può rendere un qualsiasi termine libero per una variabile, non tanto in una formula, ma in una variante di quella formula. Così si può convenire che la scrittura $\alpha(x/t)$ indica la sostituzione del termine t al posto delle occorrenze libere della variabile x nella formula α se t è libero per x in α, altrimenti $\alpha(x/t)$ indica la sostituzione del termine t per x in una variante di α in cui t è libero per x.

13. UGUAGLIANZA COME SIMBOLO LOGICO.

Il simbolo = (uguale) è un simbolo che usiamo come predicato binario. Si faccia attenzione qui, e nel seguito, a distinguere, usando il contesto, il simbolo = usato come predicato del linguaggio formale dal simbolo = usato per l'uguaglianza nel metalinguaggio; per distinguere questi due usi è importante vedere a chi sono applicati. Il fatto che = sia un predicato binario è insufficiente per dire in quale relazione binaria deve essere interpretato il predicato =. In genere si vorrebbe che fosse interpretato nella relazione binaria, chiamata identità sull'insieme universo, costituita dalle coppie ordinate di elementi dell'universo in cui il primo e il secondo elemento coincidono. Ci si può domandare se è possibile fare in modo che tale predicato debba essere per forza interpretato nella identità sull'universo mediante il linguaggio, cioè come conseguenza della condizione che certi enunciati devono essere veri nelle strutture che si vogliono considerare. Rifacendosi alla dicotomia trasmettere e ascoltare un messaggio, il problema può essere riproposto dicendo che chi trasmette un messaggio cerca degli enunciati tali che chi li riceve non può che immaginarsi una struttura in cui il predicato = è interpretato nell'identità sull'universo affinché quegli enunciati siano veri nella struttura considerata. Ma c'è un tale insieme di enunciati?

Si può fare un tentativo di precisare, mediante il linguaggio, una struttura in cui l'interpretazione di = debba essere la relazione identica sull'universo cominciando con lo scegliere i seguenti tre enunciati $\forall v_0 = v_0 v_0$ (questo enunciato esprime la riflessività della relazione che interpreta =, cioè è vero in una struttura se e solo in quella struttura il predicato = è interpretato in una relazione binaria riflessiva), $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 ((= v_0 v_1 \wedge = v_1 v_2) \rightarrow = v_0 v_2)$ (questo enunciato esprime la transitività della relazione che interpreta =), $\forall v_0 \forall v_1 (= v_0 v_1 \rightarrow = v_1 v_0)$ (questo enunciato esprime la simmetria della relazione che interpreta =). Ma si vede subito che interpretando = in una qualsiasi relazione di equivalenza sull'universo di una struttura gli enunciati indicati sarebbero veri. Si potrebbero aggiungere le formule del tipo $\forall v_0 \forall v_1 \ (= v_0 v_1 \rightarrow (\alpha(v_0) \leftrightarrow \alpha(v_0/v_1)))$ (queste esprimono la sostituibilità tra nomi di identici in una qualsiasi formula), per ogni formula α. Le formule di tale tipo sono infinite, ma, ancora, non sono sufficienti perché si sia forzati ad interpretare = nella relazione identica per renderle vere. Infatti se anche ci fosse una realizzazione $\sigma=(\mathfrak{A},\underline{a})$ che rende vere tutte le formule di un certo insieme, che include quelle indicate, in cui = è interpretato come l'identità sull'universo, si potrebbe immediatamente costruire un nuova struttura, $\mathfrak{B}$, il cui universo B contenga propriamente quello, A, della struttura $\mathfrak{A}$, avendo ulteriori elementi, b, ciascuno dei quali è abbinato ad un corrispondente elemento a di A (cioè c'è una funzione totale dall'universo di B in A tale che se applicata ad un elemento di A gli fa corrispondere se stesso; e mediante questa funzione si può precisare che gli elementi di B che sono abbinati ad un corrispondente elemento a sono quelli a cui la funzione fa corrispondere a) e tale b, rispetto alle relazioni, diverse dall'interpretazione di =, e alle funzioni, si comporta esattamente come l'elemento a cui è abbinato, mentre è in coppia con l'elemento a cui è abbinato nella relazione che interpreta = (così abbiamo descritto non solo l'universo di questa nuova struttura, ma anche le sue relazioni e funzioni). Le costanti di $\mathfrak{B}$ siano le stesse delle costanti della struttura $\mathfrak{A}$. E' facile vedere (per induzione sulla costruzione delle formule) che, per ogni formula α, $\alpha^{(\sigma)}=V$ se e solo se $\alpha^{(\sigma')}=V$, dove $\sigma'=(\mathfrak{B},\underline{a})$.

Ma, in un certo senso vale anche il viceversa. Se le formule di un certo insieme Φ, che include quelle prima esplicitamente indicate, sono vere in una realizzazione τ in cui il predicato = non è interpretato nella identità sull'universo, allora si può costruire una diversa realizzazione τ' in cui sono ancora vere tutte le formule di Φ, e in cui = è interpretato nella relazione d'identità sull'universo. Data $\tau = (\mathfrak{D},\underline{d})$, con $\mathfrak{D} = (D,\mathcal{R},\mathcal{F},\mathcal{C})$ ecco come costruire $\tau' = (\mathfrak{D}',\underline{d}')$. Poiché il predicato = deve essere interpretato in τ in una relazione binaria di equivalenza, E (che appartiene a $\mathcal{R}$), affinché siano vere in τ le tre formule indicate all'inizio di queste considerazioni, si può suddividere D in classi di equivalenza, e ciascuna classe di equivalenza (indicheremo con a~ la classe di equivalenza cui a appartiene) sarà un elemento dell'universo, da costruire, di $\mathfrak{D}'$. Ancora, poiché nella realizzazione τ devono essere vere anche tutte le formule del tipo $\forall v_0\forall v_1 (=v_0v_1\rightarrow (\alpha(v_0)\leftrightarrow\alpha(v_0/v_1))$ anche quando α è una formula atomica (cioè del tipo $Pt_1t_2 \ldots t_n$ con P predicato n-ario), ciò comporta che la relazione E è di congruenza rispetto ad ogni relazione R_P che interpreta in τ il predicato P (cioè se a e b sono nella relazione E allora l'n-upla ordinata $(a_1,\ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1},\ldots, a_n)$ appartiene a R_P se e solo se l'n-upla ordinata $(a_1,\ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1},\ldots, a_n)$ appartiene a R_P). Così, per ogni predicato P del linguaggio adatto a $\mathfrak{D}$, si può definire una nuova relazione $R_P' = \{(a_1\sim,\ldots,a_n\sim): (b_1,\ldots, b_n)\in R_P\}$, con $b_1\in a_1\sim,\ldots, b_n\in a_n\sim$, indipendentemente da quale sia l'elemento b_1 purché appartenga ad $a_1\sim$, ..., da quale sia l'elemento b_n purché appartenga ad $a_n\sim$. Se poi P è il predicato binario =, la corrispondente relazione $R_='$ diviene $\{(a_1\sim,a_2\sim): (a_1,a_2) \in E\} = \{(a_1\sim,a_2\sim): a_1\sim=a_2\sim\}$, cioè l'identità sull'universo. Analogamente si possono definire le funzioni della nuova struttura, e le costanti che saranno le classi di equivalenza delle costanti di $\mathcal{C}$. Infine l'attribuzione di valori alle variabili $\underline{d}'$ è definita così $\underline{d}'(v_i) = \underline{d}(v_i)\sim$. Si dimostra, per induzione sulla costruzione dei termini prima e delle formule poi, che, per ogni formula β, $\beta^\tau = \beta^{\tau'}$, cioè che le due realizzazioni non sono distinguibili mediante le formule del linguaggio.

Così si è visto che nessun insieme di formule potrà costringere (mediante il suo dover essere interpretato in vero) ad interpretare un predicato binario nella identità sull'universo (perché si può subito costruire una diversa realizzazione con il predicato = non interpretato nell'identità sull'universo che rende vere le stesse formule).

D'altra parte se c'è una realizzazione che rende vere le formule di un insieme, che contiene quelle indicate, interpretando il predicato = non nella identità sull'universo, c'è anche una realizzazione che rende vere le stesse formule, ma in cui il predicato = è interpretato nell'identità sull'universo.

Si può decidere, allora, oltre quanto permette di precisare il linguaggio, di volere considerare solo le interpretazioni in cui il predicato uguale è interpretato nella identità sull'universo.

Se si adotta tale scelta, si dice che si considera il predicato = come una costante logica, o che si considera = **come simbolo logico**: in effetti al predicato = si dà una interpretazione che è pressoché sempre la stessa, costante, come alle altre costanti logiche. Di fatto le identità sono diverse su insiemi diversi, ma possono, comunque, essere tutte caratterizzate come le relazioni costituite da tutte le coppie ordinate di elementi del universo in cui il primo elemento coincide con il secondo.

14. RICCHEZZA DI UN LINGUAGGIO E STRUTTURE A CUI E' ADATTO.

Inizialmente si è introdotto il concetto di struttura e si è osservato come l'insieme non vuoto delle relazioni della struttura contiene solo le relazioni che si intendono considerare, non necessariamente tutte le relazioni. Analoghe osservazioni valgono per l'insieme delle funzioni totali non costanti e per l'insieme delle costanti.

Il problema che si vuole ora analizzare è cosa succede se si amplia o si riduce l'insieme delle relazioni o delle funzioni o delle costanti che si vogliono considerare.

Ovviamente si passa ad un'altra struttura, ma con naturali legami con la struttura di partenza.

Si dirà che una struttura $\mathfrak{A}_1=(A_1,\mathcal{R}_1,\mathcal{F}_1,\mathcal{C}_1)$ è una **espansione** di una struttura $\mathfrak{A}_0=(A_0,\mathcal{R}_0,\mathcal{F}_0,\mathcal{C}_0)$ se le due strutture hanno lo stesso universo ($A_1=A_0$) e $\mathcal{R}_1\supseteq\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{F}_1\supseteq\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{C}_1\supseteq\mathcal{C}_0$, cioè l'insieme $\mathcal{R}_1$ di relazioni include l'insieme $\mathcal{R}_0$ di relazioni, l'insieme $\mathcal{F}_1$ di funzioni include l'insieme $\mathcal{F}_0$ di funzioni, e l'insieme $\mathcal{C}_1$ di costanti include l'insieme $\mathcal{C}_0$ di costanti. Si può dire che tutte le relazioni, le funzioni e le costanti della struttura $\mathfrak{A}_0$ si ritrovano nella struttura $\mathfrak{A}_1$ dove ci sono eventualmente anche delle altre o relazioni o funzioni o costanti. In tale situazione si dirà anche che $\mathfrak{A}_0$ è una **riduzione** di $\mathfrak{A}_1$. L'espansione e la riduzione si diranno proprie se $\mathfrak{A}_0$ non è $\mathfrak{A}_1$.

Se una struttura $\mathfrak{A}_1$ è un'espansione propria di un'altra struttura $\mathfrak{A}_0$ allora le due strutture non sono dello stesso tipo. Infatti lo stesso linguaggio non è adatto ad entrambe le strutture, poiché se $\mathcal{L}_0$ è un linguaggio adatto alla struttura $\mathfrak{A}_0$, in esso tutti i simboli sono impegnati per interpretare le relazioni o le funzioni o le costanti di $\mathfrak{A}_0$ e non ci saranno i simboli per interpretare le relazioni o le funzioni o le costanti di $\mathfrak{A}_1$ che non sono nella struttura $\mathfrak{A}_0$. A partire dal linguaggio $\mathcal{L}_0$, per ottenere un linguaggio adatto alla struttura $\mathfrak{A}_1$ bisogna aggiungere dei nuovi simboli della dovuta arietà in corrispondenza alle relazioni, alle funzioni e alle costanti in $\mathfrak{A}_1$ e non in $\mathfrak{A}_0$; si otterrà così un nuovo linguaggio $\mathcal{L}_1$ che si può indicare come $\mathcal{L}_0+\Lambda$ dove Λ è l'insieme dei nuovi simboli. Si usa dire che $\mathcal{L}_1$ è un **arricchimento** del linguaggio $\mathcal{L}_0$. Spesso capiterà di considerare espansioni in cui si aggiungono solo costanti, e in tal caso il linguaggio $\mathcal{L}_1$ adatto alla struttura espansa sarà indicato mediante la scrittura $\mathcal{L}_0+C$, con C insieme di simboli di costante non in $\mathcal{L}_0$, di cardinalità almeno uguale al numero delle costanti in $\mathfrak{A}_1$ non in $\mathfrak{A}_0$.

Abbiamo già introdotto il concetto di realizzazione; le realizzazioni sono caratterizzate da una coppia di elementi: una struttura e una attribuzione di valori alle variabili. Anche per le realizzazioni possiamo parlare di espansioni e riduzioni; più precisamente si dirà che una realizzazione $\sigma_1=(\mathfrak{A}_1,\underline{a}_1)$ è una **espansione** di una realizzazione $\sigma_0=(\mathfrak{A}_0,\underline{a}_0)$ quando $\mathfrak{A}_1$ è un'espansione di $\mathfrak{A}_0$ e $\underline{a}_1$ è uguale ad $\underline{a}_0$. In tal caso si dirà anche che σ_0 è una **riduzione** di σ_1.

Quando si considera una formula, si pensa che essa sia scritta in un linguaggio che in genere è costituito da più simboli di quelli che occorrono nella formula. Così è naturale pensare che la formula può appartenere a più linguaggi che contengono i simboli occorrenti nella formula. Quando s'interpreta la formula si deve utilizzare una interpretazione adatta a un certo linguaggio, sicché è necessario precisare in quale linguaggio la formula è considerata, anche se spesso tale precisazione non viene esplicitata essendo sottinteso il linguaggio a cui ci si riferisce.

Anche quando si considera un insieme di formule si incorre in una situazione analoga: bisognerebbe sempre specificare il linguaggio in cui si intendono scritte quelle formule anche ai fini di trovare una realizzazione che sia adatta a quel linguaggio. E' opportuno ribadire che spesso è sottinteso a quale linguaggio si fa riferimento: quando non è diversamente specificato, si intende che il linguaggio di riferimento sia il minimo linguaggio in cui si possono esprimere le formule che si considerano.
A volte però (e in seguito spesso sarà fatto così), per riuscire a specificare meglio certe caratteristiche di una realizzazione in cui si vuole che certe formule siano interpretate in vero, si utilizza un linguaggio più ricco adatto ad una espansione della realizzazione cercata e, con maggiore facilità, si troverà una tale espansione. Questa è già una realizzazione in cui le formule che interessano sono interpretate in vero, anche se è adatta ad un linguaggio più ricco e non al linguaggio considerato inizialmente.
Si potrebbe essere già contenti di tale risultato, ma si può anche essere più pignoli nel richiedere che la struttura cercata debba essere proprio adatta al linguaggio inizialmente precisato. Fortunatamente questa ulteriore richiesta non presenta difficoltà ad essere soddisfatta. Infatti, raggiunta un'interpretazione adatta ad un linguaggio più ricco che rende vere certe formule, per averne una che è sostanzialmente quella trovata, ma che è adatta al linguaggio minimo di quelle formule, e in cui queste continuano ad essere vere, basta considerare la riduzione della precedente struttura al linguaggio voluto: sostanzialmente si sta considerando la stessa struttura, solo tralasciando di interpretare i simboli in più che non occorrono nelle formule considerate. Che le formule date continuino ad essere vere dipende dal risultato, già visto come esercizio, che la loro verità in una realizzazione dipende solo da come vengono interpretati i simboli propri e le variabili con occorrenze libere (ma in due realizzazioni una espansione dell'altra tutte le variabili sono interpretate nello stesso modo) che in esse occorrono e non dipende da come vengono interpretati gli altri simboli propri.

15. VALIDITA', CONSEGUENZA LOGICA E SODDISFACIBILITA'.

Anche se inizialmente l'interesse era rivolto a stabilire la verità o meno di una formula interpretata in una certa realizzazione, tuttavia spesso non è meno interessante determinare, grazie proprio alla nozione di verità o meno di una formula in una realizzazione, se esiste una realizzazione tale che quella formula è vera quando è interpretata in essa. La rilevanza di questa nuova nozione dipende anche dal suo legame con altre molto importanti che ora si considereranno.
Intanto è opportuno introdurre un po' di terminologia. Si dice che una formula φ è **valida** se è interpretata in vero in ogni realizzazione. Per indicare ciò si userà la notazione $\models\varphi$.
Si dice che una formula φ è **conseguenza logica** di un'altra formula ψ se φ è interpretata in vero in ogni realizzazione che interpreta in vero la formula ψ. In tal caso si userà la notazione $\psi\models\varphi$. Similmente si dice che una formula φ è **conseguenza logica** di un insieme di formule Φ se φ è interpretata in vero in ogni realizzazione che interpreta in vero ciascuna delle formule di Φ. Ora la notazione sarà $\Phi\models\varphi$. Se Φ è costituito da una sola formula si ricade nel caso precedente (salvo il tralasciare le parentesi graffe per indicare l'insieme di un solo elemento nella notazione), mentre, se Φ è l'insieme vuoto, dire che φ è conseguenza logica di $\varnothing$ equivale a dire che φ è valida poiché

riteniamo che in ogni realizzazione siano interpretate in vero le formula (che non ci sono) dell'insieme vuoto, cioè $\varnothing \models \varphi$ se e solo se $\models \varphi$.

Ancora si dice che un insieme Φ di formule è **soddisfacibile** se esiste una realizzazione nella quale sono interpretate in vero tutte le formule dell'insieme Φ. L'insieme Φ può essere costituito anche da una sola formula, e in tal caso si parlerà di soddisfacibilità di quella formula.

Le nozioni introdotte sono tra loro legate, nel senso che valgono i seguenti risultati:

- φ è valida se e solo se $\neg\varphi$ è non soddisfacibile;
- $\neg\varphi$ è valida se e solo se φ è non soddisfacibile;
- $\Phi\cup\{\psi\}\models\varphi$ se e solo se $\Phi\models\psi\rightarrow\varphi$; in particolare, se Φ è l'insieme vuoto, $\psi\models\varphi$ se e solo se $\models\psi\rightarrow\varphi$;
- $\Phi\models\varphi$ se e solo se $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ è non soddisfacibile.

Le prime due affermazioni sono banali conseguenze delle definizioni. Per dimostrare il terzo risultato da sinistra a destra, si consideri una qualsiasi realizzazione σ che renda vere (cioè interpreti in vero) le formule di Φ. Può succedere che $(\psi)^\sigma$=F, allora $(\psi\rightarrow\varphi)^\sigma$ =V, e per queste realizzazioni si è mostrato ciò che si voleva, oppure $(\psi)^\sigma$=V, ma allora, per ipotesi, anche $(\varphi)^\sigma$=V, sicché $(\psi\rightarrow\varphi)^\sigma$=V, e anche per queste realizzazioni si è mostrato ciò che si voleva. Per l'altra direzione dello stesso risultato, sia σ una realizzazione tale che $(\Phi\cup\{\psi\})^\sigma$=V; poiché, per ipotesi, per ogni realizzazione che rende vere le formule di Φ, e dunque anche per σ (che è anche tale che $(\psi)^\sigma$=V), pure $(\psi\rightarrow\varphi)^\sigma$=V, e così dovrà essere $(\varphi)^\sigma$=V, che è ciò che si voleva dimostrare.

Per dimostrare l'ultimo risultato da sinistra a destra, si consideri una qualsiasi realizzazione σ: se in questa non sono vere tutte le formule di Φ, allora non sono vere neppure le formule di $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$, mentre se sono vere tutte le formule di Φ, per ipotesi, dovrà essere vera anche φ, sicché $\{\neg\varphi\}^\sigma$=F, e anche in questo caso in σ non sono vere tutte le formule dell'insieme $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ che risulterà non soddisfacibile vista l'arbitrarietà di σ. Per l'altra direzione di questo risultato, sia σ un'interpretazione in cui sono vere le formule di Φ, in essa non può essere vera $\neg\varphi$ altrimenti $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ sarebbe soddisfacibile, contro l'ipotesi, e pertanto dovrà essere $(\varphi)^\sigma$= V, il che prova quanto si voleva dimostrare.

Si noti che se Φ è un insieme di formule, le realizzazioni che interpretano in vero tutte le formule di Φ sono esattamente quelle che interpretano in vero tutte le formule che sono conseguenze logiche di Φ. Infatti, l'insieme delle realizzazioni che interpretano in vero tutte le formule di Φ interpretano in vero anche tutte le conseguenze logiche di Φ, per definizione, ed anche le realizzazioni che interpretano in vero tutte le formule dell'insieme Φ' delle conseguenze logiche di Φ ($\Phi'=\{\varphi\colon \Phi\models\varphi\}$) interpretano in vero tutte le formule di Φ perché Φ e' contenuto in Φ', essendo ciascuna formula di Φ conseguenza logica di Φ.

L'insieme delle conseguenze logiche di un insieme di formule Φ si presta facilmente a indicare se Φ è soddisfacibile o meno. Di fatto vale il seguente risultato: Φ è soddisfacibile (cioè la collezione delle realizzazioni che interpretano in vero tutte le formule di Φ non è vuota) se e solo se l'insieme delle conseguenze logiche di Φ non è l'insieme di tutte le formule del linguaggio di Φ, se e solo se l'insieme delle conseguenze logiche di Φ non include una formula e la sua negazione. Infatti, se c'è una formula che non è conseguenza logica di Φ allora ci deve essere una realizzazione che rende vere le formule di Φ e non quella formula, sicché in tale caso Φ è soddisfacibile; se Φ è soddisfacibile una formula e la sua negazione non possono essere entrambe conseguenze logiche di Φ perché sarebbero entrambe vere in almeno una realizzazione (impossibile); e, infine, se o una formula o la sua negazione non sono conseguenze logiche di Φ allora c'è almeno una formula che non è conseguenza logica di Φ.

16. DIFFICOLTA' NEL RICONOSCERE VERITA' E VALIDITA'.

Si è vista la definizione d'interpretazione di una formula in una realizzazione. In un certo senso si dovrebbe essere contenti di tale definizione, perché dice in modo esplicito e preciso cosa vuol dire che una formula è vera quando è interpretata in una certa realizzazione. Tuttavia, se la struttura ha un universo infinto, non è agevole, secondo la definizione, rendersi conto se una formula con quantificatori è vera o meno quando è interpretata in una certa realizzazione. Infatti, in molte occasioni bisognerebbe effettuare infinite verifiche prima di poter decidere.

Ad esempio, per vedere se una formula che inizia con un quantificatore universale, cioè del tipo $\forall v_i \varphi$, è vera quando è interpretata nella realizzazione σ, secondo la definizione data, si deve controllare la verità della formula φ (che si ottiene togliendo la quantificazione alla formula data) in tutte le realizzazioni ottenute da σ variando, in tutti i modi possibili, solo l'attribuzione di valore alla variabile che segue il quantificatore. Così queste prove sono tante quante gli elementi dell'universo. Come si potrà mai decidere che quella formula è vera in quella realizzazione se l'universo è infinito? Si dovranno fare infinite prove prima di poter concludere che quella formula è vera in quella realizzazione. Se l'universo fosse finito la situazione sarebbe sostanzialmente diversa in quanto, ad un certo momento, si potrebbe dire che sono state completate tutte le verifiche, anche se potrebbe essere necessario un tempo di qualche secolo per completare il controllo, nonostante l'aiuto di tutte le possibilità di calcolo esistenti al mondo, quando la cardinalità dell'universo, pur finito, fosse molto grande.

Per quanto fosse attraente la definizione di verità di una formula interpretata in una realizzazione, la sua verifica è poco pratica, se non impossibile. Anche se si sa quali sono le operazioni da eseguire per arrivare a conoscere l'interpretazione di una formula in una realizzazione, in genere quelle operazioni non possono essere completate a causa della loro quantità infinita.

Però ci sono delle formule un po' particolari per le quali è facile stabilire il loro valore di verità. Si pensi a una formula del tipo $\varphi \rightarrow \varphi$, dove $\rightarrow$ ha il significato che abbiamo già introdotto. Qualunque sia l'interpretazione di φ, che sarà la stessa nelle due occorrenze, dall'interpretazione di $\rightarrow$ segue che la formula $\varphi \rightarrow \varphi$ è sempre vera, cioè vera in ogni realizzazione, o valida, secondo la definizione introdotta. Si sa decidere che $\varphi \rightarrow \varphi$ è valida anche se in φ ci sono tutte le quantificazioni che si vogliono, anche se non si sa decidere se φ è valida o meno.

Si noti che il riconoscimento della validità di una formula, dal punto di vista della definizione data, è ancora meno effettuabile del riconoscimento della verità in una realizzazione, che già poteva richiedere infinite verifiche. Infatti, ora bisognerà fare tutte quelle verifiche per ciascuna realizzazione, e queste costituiscono una quantità largamente infinita, talmente infinita da essere una classe propria (infatti, per ogni insieme, considerato come universo, si possono costruire varie strutture e quindi realizzazioni, sicché queste saranno almeno tante quante gli insiemi, cioè appunto una classe propria che è una quantità maggiore di ogni cardinalità). In base alla definizione data, non si può decidere la validità di una qualsiasi formula.

Ma per certe formule si è già riusciti a stabilire la loro validità.

Notiamo più attentamente cosa si è fatto nel caso esaminato: si è osservata la scrittura della formula data ed si è concluso che quella formula è vera in ogni realizzazione conoscendo il significato di alcuni elementi della sua scrittura.
Visto il successo, ottenuto nel caso in esame, nel determinare la validità mediante lo studio della sola scrittura di una formula, sorge spontanea la seguente domanda: ci sono criteri, basati solamente sulla scrittura della formula, che permettano di concludere con la validità o meno della formula anche per le altre formule?
Se si è interessati alla validità di una formula, alla sua verità in ogni realizzazione, il risultato non dovrà più dipendere da come sono interpretati i predicati, i simboli di funzione o le variabili, cioè non dipende dalle relazioni o dalle funzioni della struttura o dagli individui associati alle variabili libere (appunto poiché dovrà andar bene in ogni realizzazione), ma dovrà dipendere da come si sono aggregati i vari elementi della formula, il che può essere visto dal linguaggio: da qui la speranza che ci possa essere un controllo della validità di una formula che sia puramente sintattico, basato sull'analisi della sola scrittura.
Le formule vere in ogni realizzazione, in un certo senso, non dicono assolutamente niente, sono nulle di potere informativo sulla realizzazione in cui sono vere, su cosa descrivono: infatti, non distinguono una realizzazione da un'altra perché non sono vere in una e non nell'altra.
L'essere sempre vera (in ogni realizzazione) di una formula dovrebbe dipendere esclusivamente da come si è organizzato il linguaggio. Se dipende solamente dal linguaggio diventa interessante cercare dei controlli sulla scrittura di una formula che permetteranno di riconoscere se è valida o meno, oppure, ed equivalentemente come si è già visto, se la sua negazione è non soddisfacibile o meno.
Il problema diviene: c'è un modo puramente sintattico per riconoscere se una formula è valida? Oppure, c'è un modo puramente sintattico per riconoscere se una formula è soddisfacibile? Inoltre, poiché la nozione di soddisfacibilità non riguarda solo formule ma anche insiemi di formule, la domanda può divenire: c'è un modo puramente sintattico per riconoscere se un insieme di formule è soddisfacibile?
Ecco un capitolo centrale della logica: cercare un metodo formale, che opera solo sulle scritture, per vedere se una formula è valida, o se è soddisfacibile, o se un insieme di formule è soddisfacibile. Così si realizza una potenzialità molto importante del linguaggio formale.
Prima di affrontare il tema individuato, di là della quantità di passi che possono essere necessari per vedere se le formule di un insieme sono interpretate nel vero in una realizzazione, e della quantità di realizzazioni che bisogna considerare per decidere sulla soddisfacibilità dell'insieme di formule (quantità così grandi da motivare la scelta di ricercare un metodo formale per vedere se un insieme di formule è soddisfacibile) può essere opportuno considerare anche quante possono essere le formule su cui si dovrà applicare un eventuale opportuno metodo formale.
La quantità delle formule dipende dal linguaggio utilizzato per scriverle. Si è già stabilito che ogni linguaggio ha un numero numerabile di variabili (cioè tante variabili quanti sono i numeri naturali), ma ci sono anche altri simboli, alcuni che sono stati chiamati costanti logiche, e precisamente $\neg$, $\wedge$, $\forall$, $=$, e altri che sono stati chiamati simboli propri del linguaggio che si sta considerando, e precisamente i predicati, i simboli per funzione e i simboli per costante. La quantità dei simboli propri può cambiare da linguaggio a linguaggio, e di conseguenza può cambiare anche il numero delle formule da linguaggio a linguaggio. Poiché le formule sono particolari successioni

finite di simboli, e che pertanto in ciascuna di esse occorrono un numero finito, ma non limitato da un fissato numero naturale, di simboli propri, potrebbe sembrare naturale fissare l'attenzione solo su linguaggi con un numero al più numerabile di simboli propri. Tuttavia potrebbe nascere il sospetto che, accettando anche quantità più che numerabili di simboli propri e considerando insiemi di formule, si possano ottenere linguaggi più espressivi, anche se non si potrebbe arrivare a sapere bene chi sono esattamente i singoli simboli propri, proprio perché sono troppi, cioè una quantità più che numerabile. Pertanto, in quanto si farà in seguito, e fintantoché non si raggiungeranno motivi per una scelta diversa, si considereranno linguaggi con una quantità di cardinalità arbitraria di simboli propri, quantità che potrà essere diversa da linguaggio a linguaggio. Per questa discussione s'indichino rispettivamente con $k_{1\mathcal{L}}$, $k_{2\mathcal{L}}$ e $k_{3\mathcal{L}}$ le cardinalità, rispettivamente, dell'insieme dei predicati, dell'insieme dei simboli per funzione e dell'insieme dei simboli per costante del linguaggio $\mathcal{L}$.

Prima di arrivare a calcolare la quantità delle formule, è necessario calcolare quanti sono i termini. Se non ci sono né simboli per costanti né simboli per funzioni, i termini sono solo le variabili che sono una quantità numerabile; sicché in ogni linguaggio i termini sono in una quantità almeno numerabile. Se poi ci sono anche simboli per funzioni e simboli per costanti, ma entrambi i rispettivi insiemi sono al più numerabili (cioè $k_{2\mathcal{L}}$ e $k_{3\mathcal{L}}$ sono minori od uguali ad $\aleph_0$), il numero dei termini rimane numerabile. Infatti, i termini costituiscono un sottinsieme dell'insieme delle successioni finite i cui elementi sono o simboli per funzioni, o simboli per costanti o variabili, e queste successioni finite sono una quantità numerabile. Ciò perché, per ogni naturale n, le successioni finite di lunghezza n fatte con simboli presi da un elenco numerabile sono numerabili, poiché la loro quantità è il prodotto dei modi di scegliere il primo elemento della successione per i modi di scegliere il secondo elemento, per ..., per i modi di scegliere l'n-esimo elemento, cioè $\aleph_0 \times \aleph_0 \times .. . \times \aleph_0$ n volte, ma questa quantità è proprio $\aleph_0$, come si sa. Così, poiché tutte le successioni finite di tali simboli sono l'unione degli insiemi (che sono disgiunti) delle successioni di lunghezza n al variare della lunghezza n (e ciascuno di questi insiemi ha cardinalità $\aleph_0$), l'insieme delle successioni finite avrà cardinalità $\aleph_0 \times \aleph_0$, cioè $\aleph_0$. Quanto osservato mostra che, nel caso considerato, i termini sono in una quantità al più numerabile. Di fatto questa quantità è esattamente numerabile perché, oltre che essere al più numerabile, lo è anche almeno, contenendo almeno i termini costituiti da un'unica variabile e questi sono già $\aleph_0$, come si è visto.

Affinché i termini siano in numero più che numerabile, bisognerà allora che o l'insieme dei simboli per funzione o l'insieme dei simboli per costante sia più che numerabile. Si supponga che il massimo tra le cardinalità dell'insieme dei simboli per funzione e dell'insieme dei simboli per costante (cioè $\max\{k_{2\mathcal{L}}, k_{3\mathcal{L}}\}$) sia k, con $k > \aleph_0$. In entrambi i casi si possono esibire almeno k termini. Infatti se sono i simboli per costante ad essere nel numero di k il risultato è immediato essendo un termine ciascuno degli stessi singoli simboli per costante, mentre, se sono i simboli di funzione ad essere in quantità k, si possono ottenere tanti termini, tra loro diversi, in corrispondenza a simboli per funzione tra loro diversi, nel modo seguente: si fa seguire ciascun simbolo di funzione da tante volte la variabile v_0 quante è l'arietà del simbolo di funzione. D'altra parte, in questo caso, la quantità dei termini è al più k. Infatti, la quantità delle successioni di lunghezza n di simboli che sono o simboli per costante o simboli per funzione o variabili (cioè simboli scelti tra $k = k_{2\mathcal{L}} + k_{3\mathcal{L}}$ elementi) è il prodotto di k per sé stesso n volte che, essendo k un cardinale infinito, è ancora k, sicché l'insieme delle successioni finite di tali simboli (che è l'unione degli insiemi delle successioni di lunghezza n al variare del naturale n) avrà cardinalità $\aleph_0 \times k$ che è k essendo questo maggiore di $\aleph_0$. Concludendo, se il massimo tra le cardinalità dell'insieme dei simboli per funzione e dell'insieme dei simboli per costante è k, con $k > \aleph_0$, allora la cardinalità dell'insieme dei termini è esattamente k, mentre, se $k \leq \aleph_0$, allora la cardinalità dell'insieme dei termini è $\aleph_0$, sicché la cardinalità dell'insieme dei termini è comunque $\max\{\aleph_0, k\}$

Stabilita la quantità dei termini si può affrontare il problema della quantità delle formule. Ancora, dal momento che le formule sono particolari successioni finite si simboli scelti in un insieme di $h = 4 + \aleph_0 + k_{1\mathcal{L}} + k_{2\mathcal{L}} + k_{3\mathcal{L}} = \max\{4, \aleph_0, k_{1\mathcal{L}}, k_{2\mathcal{L}}, k_{3\mathcal{L}}\}$ elementi, la cardinalità dell'insieme delle formule sarà minore od uguale ad h. D'altra parte si vede che questa cardinalità è almeno h dalle seguenti considerazioni. Se $k_{1\mathcal{L}}$ è minore di h allora deve essere $h = k (= \max\{\aleph_0, k_{2\mathcal{L}}, k_{3\mathcal{L}}\})$, che è il numero dei termini. Sia ora P un predicato di arietà n, e si considerino le formule atomiche inizianti con il predicato P seguito da n volte il termine t. Si ottengono così h diverse formule atomiche al variare di t tra gli h termini. Se invece h è uguale a $k_{1\mathcal{L}}$, si ottengono h formule atomiche facendo seguire ciascuno degli h predicati da tante volte la variabile v_0 quante è l'arietà del predicato. Così si può concludere che le formule del linguaggio $\mathcal{L}$ sono esattamente $h = \max\{\aleph_0, k_{1\mathcal{L}}, k_{2\mathcal{L}}, k_{3\mathcal{L}}\}$, cioè tante quante il numero dei simboli del linguaggio $\mathcal{L}$, ovvero $|\mathcal{L}|$.

17. IL METODO DEGLI ALBERI DI CONFUTAZIONE.

E' possibile tradurre il comportamento del significato di un connettivo in un'opportuna regola sulla scrittura della formula, un po' come si è visto che si fa con i calcoli con i numeri naturali?

Si vuole cercare un metodo per poter controllare la validità o meno di una formula in modo sintattico, cioè in base ad un'analisi di come è scritta, senza ricorrere ad alcuna sua interpretazione.

Poiché, come si è già visto, una formula è valida se e solo se la sua negazione non è soddisfacibile, ed anche una formula è conseguenza logica di un insieme di formule se e solo se la sua negazione aggiunta all'insieme di formule dà un insieme non soddisfacibile, invece di cercare di vedere se una formula è valida o conseguenza logica o meno, si può indagare se un opportuno insieme di formule è soddisfacibile o meno. Allora il problema della ricerca di criteri sintattici di validità o di conseguenza logica può divenire un problema si ricerca di criteri sintattici di soddisfacibilità.

Il problema di controllare la soddisfacibilità di un insieme di formule può essere visto come il problema di controllare la credibilità di un racconto: in base a ciò che viene raccontato uno dovrebbe costruirsi un'immagine della situazione che viene descritta, ma in modo critico, cioè analizzando, nel contempo, se in ciò che viene detto non ci siano delle affermazioni non credibili (come, ad esempio, sia una affermazione che la sua negazione) o che non siano implicitamente contenute (cioè siano conseguenze logiche di quanto viene detto) delle affermazioni non credibili. Si noti che la presenza di una formula e della sua negazione in un insieme di formule, fatto che rende l'insieme non soddisfacibile, è un qualcosa di puramente sintattico, cioè rilevabile dal solo controllo della scrittura delle formule dell'insieme (si ricordi che la presenza di una formula e della sua negazione tra le conseguenze logiche di un insieme di affermazioni e' condizione necessaria e sufficiente per la sua non soddisfaciblità, tuttavia per concludere immediatamente con un metodo puramente sintattico di controllo della soddisfacibilità si dovrebbe aver un metodo puramente sintattico per determinare tutte le conseguenze logiche di un insieme di formule, cosa che al momento non c'e'). Così si può formulare un primo criterio sintattico di non soddisfacibilità di un insieme di formule: la presenza in esso di una formula e della sua negazione. Ma non è detto che questo criterio sia necessario perché anche un insieme che non contiene una formula e la sua negazione potrebbe essere non soddisfacibile. Allora ritorna l'importanza di studiare quando, più in generale, un insieme di formule è non credibile per motivi non così espliciti come la presenza di una formula e della sua negazione. Per vedere se in un insieme di affermazioni sono implicitamente contenute delle affermazioni non credibili, si può cercare di "smontare" le affermazioni date per vedere se le componenti, che dovrebbero essere giudicate più facilmente, sono pure credibili o meno. Cioè si può passare dalla considerazione di certe affermazioni complesse alla considerazione anche di loro opportune componenti da cui dipende il loro significato, per vedere se nella totalità di questo più ampio insieme di affermazioni ce ne sono di non credibili.

Si noti anche che per provare la soddisfacibilità di un insieme di formule bisognerà arrivare, ad un certo punto, a costruire una realizzazione nella quale siano vere tutte le formule dell'insieme.

Una realizzazione in cui sono vere delle formule viene detta un **modello** di quelle formule. Se le formule sono enunciati, con modello delle stesse sarà sufficiente intendere una struttura in cui sono vere, e non una realizzazione, in quanto, come si sa, la loro verità non dipende dall'attribuzione di valori alle variabili.

Ma prima di arrivare al punto di dover costruire una realizzazione, si cercherà di ridurre la complessità delle formule per le quali si vuole esibire un modello. In effetti se si crede che certe formule più elaborate siano soddisfacibili, bisognerà credere che anche certe altre formule, dalle quali le prime sono ottenute, siano soddisfacibili, e può essere più facile dover esibire un modello di queste (che sarà eventualmente un modello anche dell'insieme di formule dato inizialmente se questo nuovo insieme è stato sviluppato opportunamente); sicché possono essere opportuni successivi passi di riduzione del problema prima di dover esibire un modello o convincersi che ciò non è possibile.

E' opportuno essere più precisi su quali formule, che entrano nella costruzione di una certa formula φ in un insieme Γ ipoteticamente ritenuto soddisfacibile, vanno pure ritenute vere in un'interpretazione che rende vere le formule di Γ, e possono essere aggiunte a Γ per ottenere un nuovo insieme Γ' ancora soddisfacibile come Γ. Con tali aggiunte, d'altra parte, la non soddisfacibilità di Γ' (come avviene, ad esempio, quando in Γ' dovessero esserci una formula e la sua negazione) implicherà la non soddisfacibilità di Γ.

Quali siano queste altre formule da aggiungere dipenderà dalla scrittura di φ. I casi che si possono presentare sono i seguenti: 0) φ è atomica, 1) φ è del tipo $\wedge\alpha\beta$, 2) φ è del tipo $\neg\alpha$, 3) φ è del tipo $\forall x\alpha$.

Nel caso 0) non si può ridurre ulteriormente l'analisi della formula data poiché non ci sono altre formule che concorrono alla sua costruzione.

Nel caso 1) è banale che la verità di $\wedge\alpha\beta$ in una realizzazione implica la verità sia di α che di β nella stessa realizzazione, sicché se l'insieme Γ, che include $\wedge\alpha\beta$, è soddisfacibile dovrà esserlo anche l'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\alpha,\beta\}$. Ciò giustifica l'introduzione di una prima modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule cui appartiene una formula del tipo $\wedge\alpha\beta$, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\alpha,\beta\}$.

Nel caso 2) l'ipotesi che $\neg\alpha$ sia vera in una certa realizzazione non ci permette di passare alla conseguente verità, in una opportuna realizzazione, anche di α, l'unica formula di cui al momento si dispone dalla quale possa essere stata costruita φ. L'idea allora è di andare a vedere come è stata scritta α, e si presentano i seguenti sottocasi: 2a) α è atomica e φ è una negazione di atomica, 2b) α è del tipo $\neg\beta$ e φ è del tipo $\neg\neg\beta$, 2c) α è del tipo $\forall x\beta$ e φ è del tipo $\neg\forall x\beta$, 2d) α è del tipo $\wedge\beta\gamma$ e φ è del tipo $\neg\wedge\beta\gamma$.

Nel caso 2a) la situazione è del tutto analoga a quella del caso 0): ora la sola formula che può concorrere alla costruzione della formula $\neg\alpha$ è α, ma questa non deve essere vera in una realizzazione che rende vere le formula di Γ, sicché non si sa quale altra formula considerare come sottoformula da rendere vera per una analisi della soddisfacibilità di $\neg\alpha$.

Nel caso 2b) è banale che la verità di $\neg\neg\beta$ in una realizzazione implica la verità di β nella stessa realizzazione, sicché se l'insieme Γ, che include $\neg\neg\beta$, è soddisfacibile dovrà esserlo anche l'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\beta\}$. Ciò giustifica l'introduzione di una seconda modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule cui appartiene una formula del tipo $\neg\neg\beta$, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma' = \Gamma\cup\{\beta\}$.

Nel caso 2c) si suppone che una formula del tipo $\neg\forall x\alpha$ appartenga all'insieme soddisfacibile di formule Γ. In questo caso la definizione base di verità di una formula coinvolge la semantica e non può essere utilizzata direttamente per elaborare una modalità d'analisi sintattica. Infatti una formula del tipo $\neg\forall x\alpha$ è vera in una realizzazione σ se esiste un elemento *a* dell'universo della realizzazione tale che la formula $\neg\alpha$ è vera nella realizzazione $\sigma(x/a)$. Tuttavia si può richiamare una abitudine del linguaggio naturale: dopo aver affermato che c'è un certo individuo che ha una certa proprietà, ogniqualvolta lo si vuole menzionare non si continua a ripetere che c'è un individuo con quella certa proprietà e che è quello notato prima, ma si inventa un nome per lui e lo si indica mediante quel nome. Può darsi che nell'insieme di formule Γ ci sia una formula del tipo $\neg\alpha(x/t)$, per un certo termine t, che sarebbe già il nome di un individuo con le caratteristiche volute, senza la necessità di inventare un nuovo nome, e nell'insieme Γ ci sarebbe già l'analisi della formula $\neg\forall x\alpha$. Attenzione però che, se non si è nel caso fortunato appena descritto, e bisogna inventare un nome, il nome inventato per quel individuo non deve essere già stato usato per indicare un altro individuo *b* (eventualmente mediante una invenzione precedente dello stesso tipo di quella presente) perché non è detto che quel altro individuo *b* sia uno che ha la proprietà di rendere vera la formula $\neg\alpha$ nella realizzazione $\sigma(x/b)$.Per rispettare la precauzione appena osservata, si può decidere di utilizzare un nome nuovo per indicare l'elemento *a*, cioè un nuovo simbolo per costante, scelto apposta per la formula $\neg\forall x\alpha$, non occorrente nel linguaggio formale fin qui usato (quello di Γ) se la formula non è già stata analizzata. Per tale simbolo per costante si userà la scrittura $c_{\neg\forall x\alpha}$. Allora la verità della formula $\neg\forall x\alpha$ in una realizzazione σ ha per conseguenza la verità della formula $\neg\alpha(x/c_{\neg\forall x\alpha})$ nella realizzazione σ' che espande σ interpretando il nuovo simbolo per costante $c_{\neg\forall x\alpha}$ in *a*. Ciò giustifica l'introduzione di una terza modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule cui appartiene una formula del tipo $\neg\forall x\alpha$ e $c_{\neg\forall x\alpha}$ è un simbolo di costante non occorrente in Γ e specificamente scelto per la formula $\neg\forall x\alpha$, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma' = \Gamma\cup\{\neg\alpha(x/c_{\neg\forall x\alpha})\}$. Si noti che nella esplicitazione della modalità d'analisi non è rimasto alcun riferimento al fatto che una formula del tipo $\neg\alpha(x/t)$ sia presente o meno in Γ. Di fatto, se ci fosse con un termine t diverso da $c_{\neg\forall x\alpha}$, la modalità d'analisi proposta potrebbe introdurre un secondo nome per uno stesso elemento (il che non provoca alcuna difficoltà); mentre se ci fosse proprio con t che è $c_{\neg\forall x\alpha}$, per ottenere Γ' si aggiungerebbe a Γ una formula che gli appartiene e si avrebbe $\Gamma'=\Gamma$; infine se non ci fosse in Γ allora è proprio il caso di aggiungerla: così in ogni caso la modalità d'analisi espressa va bene.

Riserviamo a dopo il caso 2d), e consideriamo ora il caso 3)

Nel caso 3) si suppone che una formula del tipo $\forall x\alpha$ appartenga all'insieme soddisfacibile Γ, sicché $\forall x\alpha$ sarà vera in una opportuna realizzazione σ. La definizione di verità di una formula del tipo $\forall x\alpha$ porta alla verità di α in ciascuna delle realizzazioni del tipo $\sigma(x/a)$ al variare di a nell'universo della realizzazione σ. Ma questa definizione coinvolge nozioni semantiche e suggerisce poco per una regola sintattica. Tuttavia se a è l'interpretazione mediante σ di un termine t (a=t^σ), sappiamo che $\alpha^{\sigma(x/a)}=\alpha^{\sigma(x/t^\sigma)}=\alpha(x/t)^\sigma$. Insomma se una formula è vera per ogni interpretazione di una variabile è vera anche la formula ottenuta mediante sostituzione di un termine a quella variabile, cioè se qualche affermazione è vera per tutti è vera anche per un certo individuo. Certo che la formula $\alpha(x/t)$ dice molto meno della formula $\forall x\alpha$, ma la sua soddisfacibilità segue dalla soddisfacibilità della seconda. Ciò giustifica l'introduzione di una quarta modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule cui appartiene una formula del tipo $\forall x\alpha$ e t è un termine qualsiasi, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\alpha(x/t)\}$. Anche se l'analisi esposta è corretta, se ne potrebbe suggerire un'altra che colga maggiormente quanto segue dalla soddisfacibilità di $\forall x\alpha$, e cioè la modalità d'analisi che fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\alpha(x/t)$: t è un termine di $\mathcal{L}\}$ dove $\mathcal{L}$ è il linguaggio di Γ. Tuttavia neppure così si coglie appieno quanto comporta la soddisfacibilità di $\forall x\alpha$ poiché non è detto che ogni elemento dell'universo di σ sia l'interpretazione di un termine. Di più, come si è visto al punto 2c), c'è la necessità di considerare simboli per costante mai utilizzati prima, sicché l'insieme dei termini non potrà essere definitivo dal momento che il linguaggio potrà essere successivamente arricchito.

Rimane il caso 2d). In questo caso si suppone che una formula del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ appartenga all'insieme soddisfacibile di formule Γ. Ora l'analisi della soddisfacibilità di questa formula porta a due situazioni diverse. Infatti, se la formula $\neg\wedge\alpha\beta$ è vera in una realizzazione σ, nella stessa realizzazione o è vera $\neg\alpha$ o è vera $\neg\beta$ (eventualmente entrambe), ma non si può dire a priori quale delle due, cioè la soddisfacibilità della formula $\neg\wedge\alpha\beta$ implica anche o quella della formula $\neg\alpha$, o quella della formula $\neg\beta$. Così si dovrà proseguire l'analisi considerando separatamente le due possibilità. Ciò giustifica l'introduzione di una quinta modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule cui appartiene una formula del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ a due insiemi $\Gamma'=\Gamma\cup\{\neg\alpha\}$ e $\Gamma''= \Gamma\cup\{\neg\beta\}$ per ciascuno dei quali l'analisi proseguirà separatamente. Questa è l'unica modalità d'analisi che porta alla considerazione separata di più di un insieme di formule.

Si noti che le formule, che sono state via via aggiunte per analizzare un insieme di formule dato, sono o sottoformule proprie o negazioni di sottoformule proprie delle formule dell'insieme. Si denomineranno **sottoformule generalizzate** di una formula φ sia le sottoformule proprie che le negazioni di sottoformule proprie di φ. La **profondi-**

tà di una formula è definita per induzione come segue: la profondità d una formula atomica è 0; la profondità della negazione di una formula è 1 più la profondità della formula; la profondità della congiunzione di due formule è 1 più il massimo della profondità delle due formule; la profondità di una formula quantificata è 1 più la profondità della formula. Si noti che ciascuna delle sottoformule generalizzate che sono state via via aggiunte per analizzare un insieme di formule hanno profondità minore di quella della formula che analizzano.

Poiché si sta considerando un linguaggio in cui l'uguaglianza è un simbolo logico, non solo la presenza in un insieme di formule di una formula e della sua negazione non è accettabile se si vuole che l'insieme dato sia soddisfacibile, ma neppure di una singola formula del tipo $\neg t=t$. Invece di formulare un nuovo criterio di non accettabilità di un insieme di formule come soddisfacibile, ci si può ricondurre al criterio di rifiuto già espresso (la presenza di una formula e della sua negazione) aggiungendo ad un insieme di formule Γ le formule del tipo $t=t$. Di fatto, se un insieme di formule Γ è soddisfacibile, allora lo è anche l'insieme di formule $\Gamma\cup\{t=t\}$, mentre, se in Γ c'è la formula $\neg t=t$, allora in $\Gamma\cup\{t=t\}$ c'è una formula e la sua negazione. Ciò giustifica l'introduzione di una sesta modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule e t un termine, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{t=t\}$.

C'è una ulteriore situazione da considerare nel caso di linguaggi in cui l'uguaglianza è un simbolo logico. Può succedere che in un insieme di formule, pur non occorrendo alcuna formula assieme alla sua negazione, occorrano sia una formula del tipo $t_1=t_2$ che le formule $\alpha(x/t_1)$ e $\neg\alpha(x/t_1/t_2)$ (con questa ultima scrittura si vuol significare che alcune (da nessuna a tutte) occorrenze libere della variabile x in α sono state sostituite dal termine t_1 mentre le altre sono state sostituite dal termine t_2, le sostituzioni di ciascuno dei due termini non deve provocare catture di variabili). Anche in questa situazione l'insieme di formule non è soddisfacibile, anche se non ci sono una formula e la sua negazione. Ancora ci si può ricondurre alla presenza di una formula e della sua negazione se si conviene di aggiungere la formula $\alpha(x/t_1/t_2)$ all'insieme di formule dato. Si noti che se in un insieme soddisfacibile di formule Γ occorrono sia la formula $t_1=t_2$ che la formula $\alpha(x/t_1)$ allora anche l'insieme $\Gamma\cup\alpha(x/t_1/t_2)$ è soddisfacibile. Ciò giustifica l'introduzione di una settima modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule in cui occorrono sia la formula $t_1=t_2$ che la formula $\alpha(x/t_1)$, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\alpha(x/t_1/t_2)\}$.

Di fatto, il più delle volte, in un insieme Γ di formule non compare una sola formula, e tutte vanno analizzate. Il voler analizzare tante formule assieme comporta delle ulteriori difficoltà per l'analisi di certi tipi di formule.

Si è già visto che per le formule del tipo $\neg\forall x\alpha$ ci si deve inventare un nuovo nome, ma, se le formule di questo tipo sono molte, bisogna inventarne di diversi per ciascuna formula analizzata per rispettare il fatto che, dal punto di vista semantico, gli elementi dell'universo, in cui interpretare le variabili quantificate esistenzialmente perché le varie formule siano vere in una realizzazione, possono essere tutti diversi, e diversi dovranno essere i loro nomi.

Le formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$, che chiameremo disgiunzioni, sono le uniche che portano a due insiemi da analizzare, uno con l'aggiunta di una alternativa $(\neg\alpha)$, l'altro con l'altra $(\neg\beta)$, sicché sarà naturale considerare questa analisi separatamente dalle altre. Se in un insieme Γ ci sono più formule di questo tipo, ma in numero finito, ad esempio due

$\neg\wedge\alpha_1\beta_1$ e $\neg\wedge\alpha_2\beta_2$, potrebbero essere analizzate in successione portando al seguente sviluppo: dall'insieme Γ a due insiemi $\Gamma'=\Gamma\cup\{\neg\alpha_1\}$ e $\Gamma''=\Gamma\cup\{\neg\beta_1\}$ e poi da ciascuno di questi ai quattro insiemi $\Gamma'_a=\Gamma'\cup\{\neg\alpha_2\}=\Gamma\cup\{\neg\alpha_1,\neg\alpha_2\}$, $\Gamma'_b=\Gamma'\cup\{\neg\beta_2\}=\Gamma\cup\{\neg\alpha_1,\neg\beta_2\}$, $\Gamma''_a=\Gamma''\cup\{\neg\alpha_2\}=\Gamma\cup\{\neg\beta_1, \neg\alpha_2\}$ e $\Gamma''_b=\Gamma'\cup\{\neg\beta_2\}= \Gamma\cup\{\neg\beta_1,\neg\beta_2\}$. Si vede che i quattro insiemi sono ottenuti in corrispondenza ai modi di scegliere l'una o l'altra alternativa da ciascuna delle due formule considerate. Così per analizzare tutte le formule di un insieme di formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ bisognerà considerare tutti gli insiemi che si ottengono aggiungendo in tutti i vari modi possibili o l'una o l'altra alternativa per ciascuna delle formule considerate. I vari modi possibili di scegliere o una alternativa o l'altra nelle disgiunzioni di un insieme di formula corrispondono alle varie funazioni che ad ogni disgiunzione dell'insieme fanno corrispondere o l'una o l'altra alternativa,
Allora diventa naturale introdurre le due seguenti regole sintattiche, che riassumono tutte le precedenti modalità d'analisi.

Regola 1 (n)

Sia Γ un insieme di formule. L'applicazione della regola 1 a Γ, relativamente ad un numero naturale n, brevemente la regola $R_{1,n}$, dà un nuovo insieme Γ' di formule così definito:
$\Gamma'=\Gamma\cup\{\varphi\colon \neg\neg\varphi\in\Gamma\}\cup\{\varphi_1,\varphi_2\colon \wedge\varphi_1\varphi_2\in\Gamma\}\cup\{\varphi(x/t)\colon \forall x\varphi\in\Gamma$ e t è un termine che occorre in qualche formula di Γ (anche come sottotermine di un termine)$\}\cup\{\neg\varphi(x/c_{\neg\forall x\varphi})\colon \neg\forall x\varphi\in\Gamma\}\cup\{\varphi(x/t_1/t_2)\colon \varphi(x/t_1)\in\Gamma$ e $t_1=t_2\in\Gamma\}\cup\{t=t\colon$ t è un termine con simboli di costante e simboli di funzione occorrenti in Γ, variabili entro v_n, e profondità al più n$\}$, dove, per ogni formula del tipo $\neg\forall x\varphi$ occorrente in Γ, $c_{\neg\forall x\varphi}$ è un simbolo di costante non occorrente in Γ (a meno che la formula $\neg\varphi(x/c_{\neg\forall x\varphi})$ occorra già in Γ) e tali simboli per costanti sono tutti tra loro a due a due diversi (detto altrimenti c'è una biiettività tra le formule del tipo $\neg\forall x\varphi$ occorrenti in Γ e i nuovi simboli per costante $c_{\neg\forall x\varphi}$).

Qui con $\varphi(x/t_1/t_2)$ si intende, come già detto, la sostituzione in $\varphi(x)$ a volte del termine t_1 e a volte del termine t_2 al posto delle occorrenze libere della variabile x.
Si osservi inoltre che, se $\mathcal{L}$ è il linguaggio di Γ, il linguaggio $\mathcal{L}'$ di Γ' si ottiene da $\mathcal{L}$ aggiungendo i nuovi simboli per constante $c_{\neg\forall x\varphi}$, uno per ciascuna formula del tipo $\neg\forall x\varphi$ di Γ.
Si noti che se Γ è finito, allora anche Γ' è finito, poiché, essendo le formule di lunghezza finita, sono finiti sia il numero dei simboli che quello dei termini che occorrono nelle formule dell'insieme. Appunto per ottenere questo risultato sono state introdotte le limitazioni precisate sui termini delle formule del tipo t=t aggiunte dalla regola, che, per questo, dipende da n. Infatti, se Γ è finito, saranno finiti pure sia il numero di simboli di costante, che il numero di simboli di funzione in esso contenuti, che il numero delle variabili se queste si fermano all'n-esima; tuttavia il numero dei termini costruibili con questi simboli, in numero finito, sarebbe infinito se non ci fosse l'ulteriore limitazione sulla profondità dei termini. La **profondità di un termine** è definita per induzione sulla costruzione del termine come segue: se il termine è un simbolo di costante o una variabile la sua profondità è zero, altrimenti il termine è del tipo un simbolo di funzione m-ario seguito da m termini e la sua profondità è uno più del massimo delle profondità dei termini che seguono il simbolo di funzione. La profondità coglie il numero di iterazioni del passo induttivo nella costruzione di un termine. I termini costruiti con un numero finito di simboli iterando il passaggio induttivo della

costruzione dei termini un numero finito di volte sono in numero finito; e ciò completa la giustificazione dell'osservazione che la regola $R_{1,n}$ preserva la finitezza.

Regola 2

Sia Γ un insieme di formule. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni che ad ogni formula del tipo $\neg\wedge\varphi_1\varphi_2$ in Γ associano o $\neg\varphi_1$ o $\neg\varphi_2$. L'applicazione della regola 2, brevemente R_2, a Γ dà tanti insiemi di formule Γ_f quante sono le funzioni $f\in\mathcal{F}$ così definiti:
$\Gamma_f = \Gamma\cup\{f(\neg\wedge\varphi_1\varphi_2): \neg\wedge\varphi_1\varphi_2\in\Gamma\}$.

Si osservi che se Γ è finito allora anche $\mathcal{F}$ è finito, come pure ciascun Γ_f.

Lemma 1. Se Γ è soddisfacibile, allora lo è anche l'insieme Γ' ottenuto da Γ applicandogli la regola $R_{1,n}$ qualunque sia il numero naturale n.
Dimostrazione. Sia σ una realizzazione che rende vere le formule di Γ. Sia C l'insieme dei simboli di costante $c_{\neg\forall x\varphi}$ non nel linguaggio $\mathcal{L}$ dell'insieme dato, ma nel linguaggio, diciamo $\mathcal{L}'$, di Γ'. La regola $R_{1,n}$ introduce questi simboli per costante $c_{\neg\forall x\varphi}$ nelle formule $\neg\varphi(x/c_{\neg\forall x\varphi})$ di Γ' in corrispondenza delle formule $\neg\forall x\varphi$ di Γ. Si espanda la $\mathcal{L}$-realizzazione σ interpretando ciascun nuovo simbolo di costante $c_{\neg\forall x\varphi}$ occorrente in Γ' in una formula del tipo $\neg\varphi(x/c_{\neg\forall x\varphi})$ in un elemento $a_{\neg\forall x\varphi}$ dell'universo di σ tale che la formula $\neg\varphi$ sia vera nella realizzazione $\sigma(x/a_{\neg\forall x\varphi})$ (per ciascuna formula del tipo $\neg\forall x\varphi$ in Γ tale elemento deve esistere poiché ciascuna formula $\neg\forall x\varphi$ è vera nella realizzazione σ). Questa nuova $\mathcal{L}'$-realizzazione, chiamiamola σ', rende vere le formula di Γ'. Infatti quelle in cui non occorrono nuovi simboli di costanti sono vere nella realizzazione σ' se e solo se sono vere nella realizzazione σ, e ciò segue dal fatto che in σ sono vere le formule di Γ ed anche quelle ulteriori di Γ' senza nuovi simboli per costante, come si è già visto considerando la modalità d'analisi con l'aggiunta di una sola formula nei vari casi previsti dalla regola $R_{1,n}$. Inoltre σ' è stata ottenuta espandendo σ proprio in modo che siano vere le formule di Γ' con nuovi simboli per costante, come si è appena visto.

Lemma 2. Se Γ è soddisfacibile, allora esiste una funzione f, appartenente ad f, tale che il particolare insieme Γ_f, ottenuto da Γ applicandogli la regola R_2 utilizzando la funzione f, è soddisfacibile.
Dimostrazione. Sia σ una realizzazione che rende vere le formule di Γ. In particolare σ rende vere le formule di Γ del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$. Pertanto, o $\neg\alpha^\sigma$=V o $\neg\beta^\sigma$=V. Si consideri ora la funzione g con dominio l'insieme delle formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ occorrenti in Γ tale che $g(\neg\wedge\alpha\beta)=\neg\alpha$ se $\neg\alpha^\sigma$=V e $g(\neg\wedge\alpha\beta)=\neg\beta$ altrimenti (in questo caso $\neg\beta^\sigma$=V). La funzione g è una di quelle che la regola R_2 usa per individuare gli insiemi che si ottengono applicando la regola all'insieme Γ. Tutte le formule dell'insieme Γ_g che la regola R_2 fa ottenere quando applicata all'insieme Γ in corrispondenza della funzione g sono vere nella realizzazione σ. Così almeno uno degli insiemi Γ_f è soddisfacibile (almeno quello che si ottiene prendendo come indice f la funzione g prima definita).

Un insieme di formule Γ si dice **chiuso** se contiene una formula e la sua negazione, altrimenti si dice **aperto**.

Dopo aver introdotto delle regole che fanno passare dall'analisi di certi insiemi di formule ad insiemi di formule con in più formule meno complesse di quelle originariamente date (loro sottoformule generalizzate), bisogna stabilire un modo di proseguire l'analisi della soddisfacibilità di un certo insieme di formule stabilendo come e fino a quando iterare il processo avviato. Per descrivere questa costruzione si farà uso della nozione matematica di albero.

Un **albero** è una struttura costituita da un insieme non vuoto, i cui elementi vengono detti **nodi**, e da una relazione d'ordine su questo (si usa dire che è un insieme ordinato) (l'ordine in generale sarà parziale), che ha le seguenti proprietà:

a) esiste un unico nodo, detto **radice** dell'albero, che non ha predecessori, mentre ogni altro nodo ha esattamente un predecessore immediato;

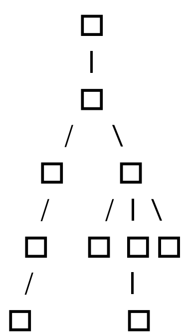
b) ad ogni nodo è associata una **profondità** del nodo, che è un numero naturale e precisamente 0 per la sola radice e n+1 per gli immediati successori di un nodo di profondità n.

Si dirà **foglia** di un albero un nodo senza successori, **ramo** un sottinsieme massimale totalmente ordinato (ogni ramo include la radice), e lunghezza di un ramo il numero di nodi nel ramo, che è la profondità della foglia più uno se il ramo termina con una foglia, altrimenti è l'estremo superiore delle profondità più uno dei nodi.

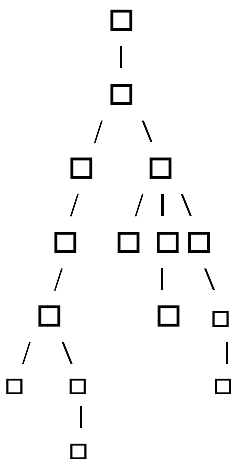
Si dirà **profondità di un albero** l'estremo superiore delle profondità più uno delle foglie dell'albero se tutti i rami hanno una foglia. Si noti che non sempre questo estremo superiore è un numero naturale, ma, a volte, è l'estremo superiore dell'insieme dei numeri naturali (che non è un numero naturale) che è il più piccolo cardinale infinito, indicato con $\aleph_0$. Se l'albero ha dei rami senza foglia, la profondità dell'albero sarà l'estremo superiore delle profondità più uno dei nodi dell'albero, che sarà ancora $\aleph_0$. Il motivo per cui si è aggiunto uno alle profondità è che queste partono da zero per la radice che è già un nodo che deve essere contato tra i nodi del ramo.

Si avrà occasione di considerare vari alberi che sono uno **estensione finale** di un altro. Dicendo che un albero T" è estensione finale di un altro albero T' si intende dire che T" contiene T' (nel senso che i nodi di T" sono anche nodi di T'), che la relazione d'ordine su T" estende la relazione d'ordine su T', e che i nodi di T" che non sono in T' seguono, nell'ordine di T", i nodi che erano foglie in T'.

Un albero può essere rappresentato graficamente nel modo seguente, dove ogni trattino verso il basso indica il passaggio ad un nodo, sotto il trattino, immediato successore del nodo sopra il trattino. I nodi vengono indicati con quadratini.



Ed ecco una rappresentazione grafica di un altro albero che è estensione finale del precedente, in cui i nodi aggiunti sono indicati da quadrati di dimensione più piccola.



Gli alberi che si considereranno avranno come nodi insiemi di formule, e saranno detti anche **alberi di confutazione** perché mirano ad esaminare in modo sintattico se un insieme di formule non è soddisfacibile (è confutabile) o meno.
Esplicitato il concetto di albero, si può proseguire nell'organizzazione dell'analisi della soddisfacibilità di un insieme di formule che sarà precisata nella seguente

STRATEGIA
Sia dato un insieme di formule Γ in un linguaggio $\mathcal{L}$.
Si costruisce una successione di alberi $T_0, T_1, ..., T_n, ...$ nel modo seguente:
a) T_0 è l'albero con la sola radice costituita dall'insieme Γ.
b) Se n è pari, l'albero T_{n+1} si ottiene dall'albero T_n aggiungendo come immediato successore di ciascuna foglia aperta ν di T_n un nuovo nodo ottenuto da ν applicandogli la regola 1 (n/2).
c) Se n è dispari, l'albero T_{n+1} si ottiene dall'albero T_n aggiungendo come immediati successori di ciascuna foglia aperta ν di T_n i nuovi nodi ottenuti da ν applicandogli la regola 2.

Si noti che, se l'albero T_i, con i numero naturale, ha almeno una foglia aperta, allora la sua profondità è esattamente i, altrimenti è minore od uguale ad i. Infatti, nel passare da un albero al prossimo, la profondità dell'albero aumenta esattamente di uno, se ci sono foglie aperte, altrimenti non aumenta.
Si noti ancora che, quando n è pari e si applica la regola 1,(n/2) per passare dall'albero T_n all'albero T_{n+1}, il linguaggio può essere arricchito per l'introduzione di nuovi simboli per costante, ma questi sono al più tanti quanti le formule del tipo $\neg\forall$ nel linguaggio, lo si chiami $\mathcal{L}_{n/2}$, dell'albero T_n. Poiché le formule sono tante quante la cardinalità del loro linguaggio, il linguaggio $\mathcal{L}_{n/2+1}$ ottenuto per l'albero T_{n+1} avrà cardinalità uguale a $|\mathcal{L}_{n/2}+\{c_{\neg\forall x\varphi}: \neg\forall x\varphi$ occorre in una foglia aperta di $T_n\}| = |\mathcal{L}_{n/2}|$ che sarà uguale a $|\mathcal{L}|$ dal momento che la cardinalità dei linguaggi non cambia dal passare da un albero all'altro.

18. CARATTERISTICHE DEL METODO DEGLI ALBERI DI CONFUTAZIONE.

E' qui opportuno fermarsi a riflettere su quanto abbiamo ottenuto.

Anzitutto le regole appena introdotte sono regole puramente sintattiche, nel senso che, se si trovano certe scritture, si è autorizzati ad aggiungere altre scritture di un certo tipo, indipendentemente dal significato che hanno. Ma sono anche regole buone nel senso che, se sono state applicate ad un albero per estenderlo ad un altro e se il primo ha una foglia soddisfacibile, allora anche il secondo ha almeno una foglia soddisfacibile che segue immediatamente quella dell'albero precedente. Così, se un primo insieme di formule era soddisfacibile, anche quelli che le regole autorizzano a scrivere successivamente lungo almeno un ramo saranno soddisfacibili. Sono regole non pensate a caso ma che ricalcano e che vanno ad analizzare di volta in volta il significato dei connettivi o dei quantificatori o dell'uguale. Usando queste regole si costruiscono degli alberi. Può darsi che tutte le foglie di un certo albero della successione siano chiuse, ma, a volte, non succede così.

Se tutte le foglie di un albero sono chiuse, l'insieme di formule analizzato non è soddisfacibile perché, come si è visto, le regole 1 e 2 preservano la soddisfacibilità. Infatti, se il nodo iniziale fosse stato soddisfacibile, ossia tutte le sue formule fossero interpretate in vero in qualche realizzazione, sarebbe soddisfacibile anche l'insieme di tutte le formule (via via introdotte) di almeno un ramo. Se in ogni foglia di un albero della successione compaiono una formula e la sua negazione, ogni foglia non può essere soddisfatta, e la contraddizione raggiunta mostra che non è soddisfacibile l'insieme di formule iniziale.

Si può ricapitolare quanto osservato nel seguente

Teorema di validità (prima forma). Se l'insieme di formule Γ è soddisfacibile allora tutti gli alberi ottenuti da esso applicando le regole $R_{1,n}$ e R_2 (anche indipendentemente dalla strategia) hanno almeno un ramo aperto. Equivalentemente, in forma contronominale, se un albero ottenuto da un insieme di formule Γ applicando le regole $R_{1,n}$ e R_2 è chiuso allora l'insieme di formule Γ non è soddisfacibile.

E se nessun albero della successione si chiude, cioè se ognuno ha foglie che non sono chiuse?

In tal caso gli alberi sono estensioni finali (proprie almeno agli stadi pari) degli alberi precedenti (giustificare il perché di questa affermazione). Così si può considerare l'albero T^∞ unione della successione di alberi T_i, con i numero naturale, $T^\infty=\cup\{T_i$: i e' un numero naturale$\}$. Le formule occorrenti in T^∞ saranno tutte nel linguaggio, chiamiamolo $\mathcal{L}^\infty$, unione dei linguaggi dei vari alberi della successione, e, poiché tutti questi linguaggi hanno la cardinalità del linguaggio della radice, anche $\mathcal{L}^\infty$ avrà tale cardinalità.

T^∞ sarà un albero con nodi di profondità maggiore di ogni numero naturale prefissato. Inoltre se l'insieme Γ da cui si parte per la costruzione della successione degli alberi è soddisfacibile, proprio in virtù dei lemmi dimostrati affermanti che le regole 1 e 2 preservano la soddisfacibilità, T^∞ avrà un ramo infinito costituito da nodi tutti soddisfacibili. Quindi tutti i nodi di quel ramo saranno aperti, non solo ma anche l'insieme di tutte le formule occorrenti nei nodi di quel ramo sarà aperto: altrimenti tale insieme conterrebbe una formula e la sua negazione, e una di queste sarebbe in un nodo e l'altra in un altro nodo e uno dei due nodi conterrebbe l'altro (essendo nello stesso ramo) sicché uno dei due sarebbe già chiuso, contro l'ipotesi di aver considerato un ramo i cui nodi sono tutti soddisfacibili.

Così si è pervenuti al seguente risultato centrale:

Teorema di validità. Se l'insieme di formule Γ è soddisfacibile, l'albero T^∞ costruito a partire da Γ ha almeno un ramo infinito aperto. Equivalentemente (forma contronominale), se T^∞ ha tutti i rami chiusi (e dunque finiti) allora Γ non è soddisfacibile.

Si noti che i rami chiusi devono essere finiti perché, come si è visto, i rami infiniti (che devono essere fatti di nodi aperti altrimenti non si proseguirebbe nella loro costruzione) sono aperti.

Si noti che, anche se T^∞ ha tutti i rami chiusi (e finiti), per quanto si può dire al momento, potrebbe essere che, per ogni numero naturale i, l'albero T_i fosse aperto. Infatti i vari rami chiusi e finiti di T^∞ potrebbero essere in quantità infinita e l'insieme delle loro lunghezze potrebbe non avere per estremo superiore un numero naturale (la profondità di T^∞ sarebbe $\aleph_0$), come invece dovrebbe avere se T_i fosse chiuso (la profondità di T_i è al più i) per un numero naturale opportuno i. Ciò che succederebbe è che, fissato comunque un numero naturale i, qualche ramo chiuso di T^∞ avrebbe lunghezza maggiore di i, e troncato a livello i sarebbe aperto, sicché T_i non sarebbe chiuso, e questo per ogni numero naturale i.

Nel caso che T^∞ abbia almeno un ramo che non contiene alcuna formula con la sua negazione si vorrebbe mostrare che l'insieme delle formule di partenza e delle sottoformule introdotte nell'analisi è soddisfacibile. Per fare ciò bisogna esibire una realizzazione in cui le formule dell'insieme sono vere.

Prima di esibire una tale interpretazione, cerchiamo di cogliere alcuni aspetti dell'insieme delle formule che occorrono in un ramo aperto di T^∞.

Ovviamente in tale insieme non possono esserci una formula e la sua negazione, altrimenti, come si è già visto, una occorrerebbe in un nodo e l'altra in un altro nodo e uno dei due nodi contiene l'altro, sicché un nodo sarebbe chiuso, contro l'ipotesi che il ramo sia aperto.

Inoltre se nel ramo c'è una formula né atomica né negazione di atomica, essa occorrerà in un certo nodo, e in un nodo successivo, ma sempre nel ramo, occorrerà l'analisi di quella formula secondo le regole che abbiamo già visto. Così l'insieme delle formule di un ramo aperto di T^∞ sarà chiuso rispetto all'operazione di contenere anche le sottoformule generalizzate di una formula dell'insieme, sottoformule generalizzate precisate dalle regole indicate. Così un tale insieme di formule rispetta le clausole esplicitate nella seguente definizione di insieme di Hintikka.

Un insieme Σ di formule è detto un insieme di Hintikka se soddisfa le seguenti condizioni:

0) per ogni formula φ, o $\varphi\notin\Sigma$ o $\neg\varphi\notin\Sigma$;

1) se $\neg\neg\varphi\in\Sigma$ allora $\varphi\in\Sigma$;

2) se $\wedge\varphi_1\varphi_2\in\Sigma$ allora sia $\varphi_1\in\Sigma$ che $\varphi_2\in\Sigma$;

3) se $\neg\wedge\varphi_1\varphi_2\in\Sigma$ allora o $\neg\varphi_1\in\Sigma$ o $\neg\varphi_2\in\Sigma$;

4) se $\forall x\varphi\in\Sigma$ allora per ogni termine t del linguaggio $\varphi(x/t)\in\Sigma$;

5) se $\neg\forall x\varphi\in\Sigma$ allora c'è un termine t del linguaggio per cui $\neg\varphi(x/t)\in\Sigma$;

6) per ogni termine t del linguaggio minimo di Σ, $t=t\in\Sigma$; (per linguaggio minimo di un insieme di formule si intende il linguaggio che ha per simboli propri solo simboli che occorrono nell'insieme di formule)

7) se $t_1=t_2\in\Sigma$ e $\alpha(x/t_1)\in\Sigma$ allora anche $\alpha(x/t_1/t_2)\in\Sigma$, con questa scrittura si vuol indicare la formula ottenuta sostituendo alcune (da nessuna a tutte) occorrenze libere della variabile x in α con il termine t_1 mentre le altre sono state sostituite dal termine t_2; le sostituzioni di entrambi i termini non devono provocare catture di variabili

Evidentemente risulta che un ramo aperto (e quindi infinito) di un albero T^∞ costruito nel modo descritto è un insieme di Hintikka. Di fatto la verifica che l'insieme delle formule di un ramo aperto di T^∞ rispetta le condizioni 0), 1), 2), 3), 5), 7) è immediata e lasciata per esercizio. Un'attenzione appena maggiore richiede la verifica del rispetto della condizione 6). Così sia t un termine qualsiasi del linguaggio $\mathcal{L}^\infty$ del ramo infinito; esso è una successione finita di simboli, sicché le variabili che occorrono in t hanno un indice massimo, che indichiamo con $\underline{m}$, ciascuno dei simboli per funzione e dei simboli per costante che occorrono in t dovrà essere in un dei linguaggi $\mathcal{L}_n$ l'unione dei quali è $\mathcal{L}^\infty$, e, ancora, ci sarà un indice massimo, indichiamolo con $\underline{n}$, di tali linguaggi corrispondenti ai simboli occorrenti in t, ed infine t avrà una profondità, indichiamola con k. Sia h il massimo tra i numeri $\underline{m}$, $\underline{n}$ e k. Applicando la regola $R_{1,h}$, nell'insieme che si ottiene sarà presente la formula t=t esattamente con il termine t considerato. Così nel ramo infinito ci sarà questa formula introdotta nelle foglie dell'albero T_{2h+1} della successione di alberi la cui unione è T^∞. A questo punto è facile controllare che l'ineime delle formule di un ramo aperto di T^∞ rispetta anche la condizione 4), notando che se una formula del tipo $\forall x\varphi$ occorre in un ramo aperto di T^∞ allora sarà in un suo nodo, ed anche un qualsiasi fissato termine t occorrerà in un certo nodo dello stesso ramo, per quanto appena visto, sicché quando si applicherà la prima regola dopo questi due nodi nel ramo sarà introdotta anche la formula $\varphi(x/t)$.

A questo punto abbiamo esplicitato con l'analisi ciò che era implicito nell'insieme di formule Γ ottenendo un albero che abbiamo indicato con T^∞. Inoltre, nell'ipotesi che T^∞ abbia un ramo aperto, abbiamo visto che le formule che occorrono in quel ramo costituiscono un insieme di Hintikka. Avendo già visto che se tutti i rami di T^∞ sono chiusi allora Γ non è soddisfacibile, per ottenere il risultato sperato, e cioè che l'analisi sintattica proposta (ovvero il controllare se T^∞ ha o meno rami aperti) sappia riconoscere esattamente quando l'insieme di formule Γ è soddisfacibile, non rimane che mostrare che se in T^∞ c'è un ramo aperto, che è un insieme di Hintikka, allora l'insieme delle formule di quel ramo (e anche Γ) è soddisfacibile. Questo risultato seguirebbe ovviamente dall'affermazione che ogni insieme di Hintikka è soddisfacibile.

Per mostrare che un insieme di formule è soddisfacibile, bisogna esibire una realizzazione che renda vere tutte le formule dell'insieme; e per esibire una realizzazione bisogna indicare quali sono l'universo, le relazioni, le funzioni e le costanti della struttura su cui si appoggia, oltre l'attribuzione di valori alle variabili della realizzazione.

Non avendo a disposizione alcuna ulteriore informazione sulla realizzazione da scegliere per mostrare che un insieme di Hintikka è soddisfacibile, e seguendo l'idea che dal racconto udito uno cerca di farsi un'idea del mondo descritto, si può sostanzialmente identificare l'interpretazione di un termine con il termine stesso e l'interpretazione di un predicato con l'insieme delle n-uple (n arietà del predicato) ordinate di individui (cioè di termini) che l'insieme di Hintikka dichiara in relazione in virtù delle presenza in esso della formula atomica asserente ciò, cioè della formula atomica iniziante con quel predicato seguito da quei termini che verranno interpretati in se stessi. In sintesi, si cerca una interpretazione costruita a partire dal linguaggio e da quanto dicono le formule dell'insieme di Hintikka dato. Poiché intendiamo usare linguaggi in cui = sia un simbolo logico, non è sufficiente l'interpretazione di un termine in se stesso, ma nella classe di termini che l'insieme di formule dichiarerà essere uguali, cioè metteremo nella stessa classe i termini t_1 e t_2 se e solo se la formula $t_1=t_2$ appartiene all'insieme di Hintikka dato.

19. SODDISFACIBILITA' DEGLI INSIEMI DI HINTIKKA

Vogliamo sintetizzare quanto preannunciato nel seguente

TEOREMA. Se Σ è un insieme di formule che è un insieme di Hintikka allora Σ è soddisfacibile.
DIMOSTRAZIONE. Più precisamente dimostreremo che tutte le formule di un insieme di Hintikka sono vere nella realizzazione legata al linguaggio cui prima si faceva cenno.
Iniziamo con il precisare tale realizzazione.
Sia $\mathcal{L}$ il linguaggio delle formule dell'insieme di Hintikka Σ.
Diremo che due termini t_1 e t_2 sono nella relazione ~ tra termini, e scriveremo $t_1{\sim}t_2$, se la formula $t_1=t_2$ appartiene a Σ.
Anzitutto dimostriamo che ~ è una relazione di equivalenza.
Sicuramente ~ è una relazione riflessiva poiché, per la clausola 6) della definizione di insieme di Hintikka, per ogni termine t la formula t=t appartiene a Σ. Inoltre se $t_1{\sim}t_2$ e $t_2{\sim}t_3$, cioè se $t_1=t_2$ e $t_2=t_3$ appartengono a Σ, allora, per la clausola 7) della definizione di insieme di Hintikka, considerando $t_1=t_2$ come $\alpha(x/t_2)$, e l'uguaglianza $t_2=t_3$, formule appartenenti entrambe a Σ, si ha che anche $\alpha(x/t_2/t_3)$, cioè $t_1=t_3$, appartiene a Σ, sicché $t_1{\sim}t_3$ e la relazione ~ è transitiva. Infine se $t_1{\sim}t_2$, cioè se $t_1=t_2$ appartiene a Σ, allora, ancora per la clausola 7) della definizione di insieme di Hintikka, considerando $t_1=t_1$ come $\alpha(x/t_1)$, e l'uguaglianza $t_1=t_2$, formule appartenenti entrambe a Σ (la prima a causa della clausola 6)), si ha che anche $t_2=t_1$, che è del tipo $\alpha(x/t_1/t_2)$, appartiene a Σ, sicché $t_2{\sim}t_1$ e la relazione ~ è simmetrica.

Si noti che la clausola 6) non è strettamente necessaria: essa serve per mostrare la riflessività della relazione ~; tuttavia se ne può fare a meno se la relazione tra termini viene definita in un modo leggermente diverso, e precisamente dichiarando che due termini t_1 e t_2 sono nella relazione ~ non solo quando la formula $t_1=t_2$ è nell'insieme di Hintikka, ma anche quando t_1 e t_2 sono occorrenze dello stesso termine.

Dopo aver dimostrato che ~ è una relazione di equivalenza, per ogni termine t del linguaggio si può considerare la classe di equivalenza $t{\sim}=\{t': t'$ è un termine e $t{\sim}t'\}$. Si definisce come universo della struttura che si utilizzerà per definire la realizzazione che interessa, l'insieme $A=\{t{\sim}: t$ è un termine$\}$.
Ora si cercherà di interpretare ogni predicato e ogni simbolo di funzione di $\mathcal{L}$ in una opportuna relazione o funzione, rispettivamente, sull'insieme A della dovuta arietà.
Sia P un predicato n-ario di $\mathcal{L}$. Si definisca la corrispondente relazione R_P nel modo seguente: $R_P=\{(t_1{\sim},...,t_n{\sim}): Pt_1...t_n$ appartiene a $\Sigma\}$. Bisogna far vedere che questa è una buona definizione nel senso che è indipendente dalla scelta di ciascuno dei $t_1...t_n$ nelle corrispondenti classi $t_1{\sim},...,t_n{\sim}$. Di fatto se $t'_1...t'_n$ sono termini che pure appar-

tengono rispettivamente alle classi $t_1\sim$,..., $t_n\sim$, cioè se $t_1=t'_1$ e ... e $t_n=t'_n$ sono formule di Σ, e se $Pt_1...t_n$ appartiene a Σ, allora anche $Pt'_1...t'_n$ appartiene a Σ, come si vede facilmente applicando n volte quanto previsto dalla clausola 7) della definizione di insieme di Hintikka a partire dalla formula $Pt_1...t_n$ di Σ. Così la definizione di Rp non dipende dai rappresentanti scelti nelle singole classi $t_1\sim...t_n\sim$ e la definizione è buona.

Analogamente sia f un simbolo di funzione n-ario di $\mathcal{L}$. Si definisca la corrispondente funzione F_f nel modo seguente: $F_f(t_1\sim...t_n\sim)=(ft_1...t_n)\sim$. Ancora bisogna far vedere che questa è una buona definizione nel senso che è indipendente dalla scelta di ciascuno dei $t_1...t_n$ nelle corrispondenti classi $t_1\sim$,...,$t_n\sim$.Di fatto se $t'_1...t'_n$ sono termini che pure appartengono rispettivamente alle classi $t_1\sim$,..., $t_n\sim$, cioè se $t_1=t'_1$ e ... e $t_n=t'_n$ sono formule di Σ, allora anche la formula $ft_1...t_n=ft'_1...t'_n$ appartiene a Σ, come si vede facilmente applicando n volte quanto previsto dalla clausola 7) della definizione di insieme di Hintikka a partire dalla formula $ft_1...t_n=ft_1...t_n$ che appartiene a Σ. Così la definizione di F_f non dipende dai rappresentanti scelti nelle singole classi $t_1\sim...t_n\sim$ e la definizione è buona.

Per completare la definizione della struttura, per ogni simbolo di costante c, sia $c\sim$ la corrispondente costante.

Ora indichiamo con $\mathfrak{A}$ la struttura definita così: $\mathfrak{A}$=(A, {R_P: P è un predicato di $\mathcal{L}$}, {F_f: f è un simbolo di funzione di $\mathcal{L}$}, {$c\sim$: c è un simbolo di costante di $\mathcal{L}$})

Per definire una realizzazione bisogna anche precisare i valori attribuiti alle variabili: così $\underline{a}$ sia la funzione tale che $\underline{a}(v_i)=v_i\sim$.

Sia ora σ la realizzazione ($\mathfrak{A}$,$\underline{a}$) che dipende da $\mathfrak{A}$ e $\underline{a}$.

Si noti che questa realizzazione σ ha cardinalità minore od uguale alla cardinalità del linguaggio $\mathcal{L}$ poiché il suo universo è costituito da classi di equivalenza di termini.

Per arrivare a dimostrare che tutte le formule di Σ sono vere nell'interpretazione σ, si inizia col far vedere, per induzione sulla costruzione dei termini, che $t^\sigma=t\sim$. Viste le definizioni, l'affermazione è banale per le variabili e per i simboli di costante. Se poi il termine t è del tipo $ft_1...t_n$, allora $t^\sigma=(ft_1...t_n)^\sigma=f^\sigma(t_1{}^\sigma...t_n{}^\sigma)=F_f(t_1{}^\sigma...t_n{}^\sigma)$ = (per induzione) $F_f(t_1\sim...t_n\sim)$= (per definizione di F_f) $(ft_1...t_n)\sim=t\sim$.

Infine si dimostra che tutte le formule di Σ sono vere nell'interpretazione σ come conseguenza dell'affermazione seguente: se $\alpha\in\Sigma$ allora α^σ=V e se $\neg\alpha\in\Sigma$ allora α^σ=F. L'ultima affermazione si dimostra per induzione sulla costruzione delle formule.

Se α è atomica allora α è del tipo $Pt_1...t_n$. In questo caso se $\alpha\in\Sigma$, cioè se $Pt_1...t_n\in\Sigma$, allora $(t_1\sim...t_n\sim)\in R_P$, cioè, per quanto prima dimostrato, $(t_1{}^\sigma...t_n{}^\sigma)\in R_P$, ossia α^σ=V. Se poi $\neg\alpha\in\Sigma$ allora, per la clausola 0) della definizione di insieme di Hintikka, $Pt_1...t_n\notin\Sigma$, sicché $(t_1\sim...t_n\sim)\notin R_P$, ed anche $(t_1{}^\sigma...t_n{}^\sigma)\notin R_P$, così α^σ=F.

Se α è del tipo $\neg\beta$, e $\alpha\in\Sigma$, allora $\neg\beta\in\Sigma$ e, per ipotesi induttiva, β^σ= F, sicché α^σ=V. Se invece, sempre con α di tipo $\neg\beta$, $\neg\alpha\in\Sigma$, allora $\neg\neg\beta\in\Sigma$ e, per la clausola 1) della definizione di insieme di Hintikka, anche $\beta\in\Sigma$; sicché, per ipotesi induttiva, β^σ=V, donde α^σ= F.

Se α è del tipo $\wedge\beta\gamma$ e $\alpha\in\Sigma$, allora, per la clausola 2) della definizione di insieme di Hintikka, sia $\beta\in\Sigma$ che $\gamma\in\Sigma$; così, per ipotesi induttiva, sia β^σ=V che γ^σ=V, donde α^σ=V. Se invece, sempre con α di tipo $\wedge\beta\gamma$, $\neg\alpha\in\Sigma$, allora o $\neg\beta\in\Sigma$ o $\neg\gamma\in\Sigma$, per la clausola 3) della definizione di insieme di Hintikka, così, per ipotesi induttiva, o β^σ=F o γ^σ=F, sicché α^σ=F.

Se, infine, α è del tipo $\forall x\beta$ e $\alpha\in\Sigma$, allora, per la clausola 4) della definizione di insieme di Hintikka, per ogni termine t, $\beta(x/t)\in\Sigma$, e, per ipotesi induttiva, per ogni t, $\beta(x/t)^{\sigma}$=V, ma ciò equivale a $\beta^{\sigma(x/t^{\sigma})}$=V per ogni termine t, cioè $\beta^{\sigma(x/t^{\sim})}$=V per ogni elemento t~ dell'universo, e perciò $\forall x\beta^{\sigma}$=V, cioè α^{σ}=V. Se invece, sempre con α di tipo $\forall x\beta$, $\neg\alpha\in\Sigma$, allora esiste un termine t tale che $\neg\beta(x/t)\in\Sigma$, e, per ipotesi induttiva, per quel t, $\beta(x/t)^{\sigma}$ =F, cioè $\beta^{\sigma(x/t^{\sigma})}$=F per quel t, ed anche $\beta^{\sigma(x/t^{\sim})}$=F per un elemento t~ dell'universo, sicché $\forall x\beta^{\sigma}$=F, cioè α^{σ}=F.

Ciò completa la dimostrazione dell'affermazione ed anche quella del teorema.

20. LA COMPLETEZZA DEL METODO DEGLI ALBERI DI CONFUTAZIONE A BLOCCHI.

Si chiama metodo degli alberi di confutazione a blocchi il metodo visto degli alberi di confutazione costruiti usando le regole $R_{1,n}$ e R_2, secondo la strategia introdotta, in quanto dette regole fanno aggiungere molte formule ad ogni loro applicazione, anzi insiemi di formule di certi tipi, che possiamo chiamare blocchi di formule.

Abbiamo già visto che se l'albero T^{∞}, costruito a partire da un insieme Γ di formule, è chiuso, allora, come conseguenza del teorema di validità, l'insieme Γ è non soddisfacibile. D'altra parte abbiamo visto che se invece l'albero T^{∞} ha un ramo aperto, allora l'insieme delle formule occorrenti nel ramo costituiscono un insieme di Hintikka che sarà soddisfacibile, per quanto appena dimostrato. Sicché nel caso in cui l'analisi non porta a dichiarare la non soddisfacibilità di un insieme Γ di formule di partenza, poiché l'albero T^{∞} non è chiuso, si può concludere che l'insieme Γ è soddisfacibile perché sottinsieme dell'insieme delle formule di un ramo aperto che è soddisfacibile.

Così si è dimostrato il:

TEOREMA DI COMPLETEZZA Un insieme di formule Γ è soddisfacibile se e solo se l'albero T^{∞} unione degli alberi T_n della successione costruita a partire da Γ è aperto.

Si noti che questo risultato mette in completa corrispondenza la soddisfacibilità di un insieme di formule con il controllo sintattico di detta soddisfacibilità effettuato mediante il metodo degli alberi di confutazione a blocchi.

21. IL PROBLEMA DELLA DECIDIBILITA' DEL METODO DEGLI ALBERI DI CONFUTAZIONE A BLOCCHI.

Ma si deve lamentare che questo metodo, per quanto se ne sa ora, fornisce un controllo che deve considerare un albero unione di un insieme infinito di alberi, cioè bisogna eseguire ulteriori operazioni dopo aver sviluppato un'infinità numerabile di passi prima di dare risposta sia in positivo che in negativo. Sicché quanto ottenuto è ancora lontano dal controllo sintattico effettivo della soddisfacibilità a cui si voleva pervenire.

Ci si può chiedere la ragione di un tale successo molto parziale, e non pare troppo azzardato ipotizzare che esso dipenda dal voler analizzare insiemi infiniti di formule. Dal momento che, come si è visto, le regole preservano la finitezza se applicate ad

insiemi finiti, se tutti gli alberi della successione fossero finiti, forse si potrebbe controllare in modo più effettivo il loro comportamento.
Di fatto, se si vuole analizzare la soddisfacibilità o meno di un insieme finito di formule, si ottengono dei risultati più lusinghieri, come ci si accinge a vedere.

Si supponga, dunque, che Γ sia un insieme finito di formule e si proceda all'analisi della sua soddisfacibilità o meno adottando il metodo dell'analisi a blocchi illustrato.
Se si parte da un insieme finito di formule, poiché le regole 1 e 2 fanno passare da insiemi finiti di formule ad insiemi finiti, si preserva la finitezza degli insiemi di formule introdotti nelle foglie dei successivi alberi che si costruiscono. Non solo, ma è finito anche il numero di funzioni che dalle formule di tipo $\neg\wedge\alpha\beta$, presenti in una foglia, scelgono o $\neg\alpha$ o $\neg\beta$, funzioni che individuano gli immediati successori della foglia nel nuovo albero voluto dalla regola 2.
Così se si parte da un insieme finito di formule, gli alberi della successione sono tutti finiti e con nodi finiti. In tale situazione gli immediati successori di un nodo sono in numero finito e si è nelle ipotesi del seguente:
Lemma di König. Se un albero, in cui ogni nodo ha un numero finito di successori immediati, ha infiniti nodi allora in esso c'è anche un ramo infinito.
DIMOSTRAZIONE. Si dia il nome di ricco ad un nodo che ha un numero infinito di successori. Nelle ipotesi fatte, la radice è un nodo ricco, ed anche ogni nodo ricco ν ha un successore immediato che è ricco, perché, altrimenti, tutti gli immediati successori, che sono in numero finito, avrebbero un numero finito di successori e lo stesso accadrebbe per il nodo ν (poiché l'unione di un numero finito di insiemi finiti è finita) contro l'ipotesi che ν fosse ricco. Si consideri l'operazione di scegliere un nodo ricco tra gli immediati successori di un nodo ricco (che sono in numero finito): questa operazione è sempre possibile. Si può allora partire dalla radice ed iterare l'applicazione di questa operazione ottenendo via via nodi diversi dai precedenti in ordine totale ciascuno immediato successore del precedente: si è individuato così un ramo infinito nell'albero dato, come volevasi.

Così, se il nodo iniziale è finito (e di conseguenza l'albero generato è tale che ogni nodo ha un numero finito di successori immediati), allora, grazie al lemma di König, si dimostra che l'albero unione T^∞ è chiuso se e solo se c'è un albero T_n della successione che è chiuso.
Infatti una direzione della doppia implicazione è banale: se un albero T_n della successione è chiuso allora anche l'albero T^∞ è chiuso essendo questo uguale all'altro in base alla definizione della successione degli alberi. Per l'altra direzione facciamo vedere la contronominale: se nessun albero T_n della successione è chiuso allora T^∞ non è chiuso. In effetti, se ciascun albero T_n della successione non è chiuso allora l'albero T_{n+1}, lo estende propriamente con nodi a livello più profondo; sicché l'albero T^∞ deve avere infiniti nodi. Ma, se T^∞ ha infiniti nodi, per il lemma di König, applicabile alla situazione presente perchè i successori immediati di un nodo sono in numero finito, deve avere un ramo infinito che non può essere chiuso, altrimenti conterrebbe una formula φ in un nodo del ramo, diciamo l'i-esimo, e la sua negazione $\neg\varphi$ in un altro, diciamo il j-esimo, e il ramo si chiuderebbe a profondità max(i,j) e sarebbe finito.

Dunque se si parte da un insieme finito di formule l'analisi con questo metodo è semidecidibile. Dicendo che questo metodo è semidecidibile si intende che in almeno una direzione il metodo permette di giungere ad una decisione effettiva, cioè conseguita in un numero finito di passi. Infatti l'analisi della soddisfacibilità di un insieme finito Γ di formule con il metodo introdotto ha portato alle conclusione che Γ è non soddisfacibile se e solo se esiste un albero T_n della successione che è chiuso: così, se Γ è non soddisfacibile, ce se ne accorgerà dopo un numero finito di passaggi quando si giungerà ad un albero chiuso e si potrà decidere effettivamente che Γ era non soddisfacibile, mentre nel caso che Γ sia soddisfacibile per rendersene conto bisognerà proseguire l'analisi fino ad ottenere tutti gli alberi aperti della successione poiché, al momento, non abbiamo alcun criterio generale che ci permetta di dire che tutti gli alberi della successione costruita a partire da Γ sono aperti senza averli costruiti ad uno ad uno.

Visto che nel caso dell'analisi di insiemi finiti di formule il metodo degli alberi di confutazione a blocchi fornisce risultati soddisfacenti, si può cercare di vedere se l'analisi di insiemi infiniti di formule può ricondursi al caso degli insiemi finiti per ottenere anche nel caso più generale i buoni risultati conseguiti nel caso di insiemi finiti. L'analisi di un insieme infinito di formule si potrebbe ricondurre a quella di un insieme finito se ci fosse un legame tra la soddisfacibilità di un insieme infinito e la soddisfacibilità dei suoi sottinsiemi finiti.

E' ovvio che se un insieme è soddisfacibile lo sono anche tutti i suoi sottinsiemi, in particolare quelli finiti. Ma il viceversa non è assolutamente banale. Infatti anche se i sottinsiemi finiti di un insieme infinito fossero tutti soddisfacibili può succedere che le formule di ciascun sottinsieme finito siano vere in una realizzazione diversa da quella che rende vere le formule di un altro sottinsieme finito, sicché non si può garantire a priori l'esistenza di un'unica realizzazione che renda vere tutte le formule dell'insieme infinito.

Ma guardando alla contronominale del risultato auspicato, e cioè all'affermazione che un insieme infinito di formule è non soddisfacibile se esiste un suo sottinsieme finito non soddisfacibile, si potrebbe nutrire qualche speranza di successo nel dimostrare quanto affermato in base all'osservazione che, per poter concludere con la non soddisfacibilità di un insieme, si cerca di ricondursi alla presenza, in un opportuna estensione di quel insieme, di una formula e della sua negazione, che costituiscono un sottinsieme certamente finito e non soddisfacibile. Così ci proponiamo di dimostrare che se ogni sottinsieme finito di un insieme (infinito) di formule è soddisfacibile allora anche l'insieme stesso è soddisfacibile. Questo risultato va sotto il nome di teorema di compattezza.

Per sviluppare questo tentativo dovremmo considerare insiemi che hanno ciascun loro sottinsieme finito soddisfacibile. Pertanto introduciamo la seguente

Definizione. Un insieme di formule è detto **finitamente soddisfacibile** se ogni suo sottinsieme finito è soddisfacibile.

(Attenzione che nella letteratura si usa la dizione "finitamente soddisfacibile" anche per indicare un insieme di formule che ha modelli finiti, nozione totalmente diversa da quella che qui si considera, e da non confondere con questa.)