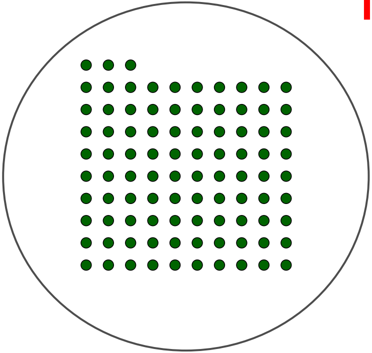
Cantor, l'albergo di Hilbert e i paradossi dell'infinito

S. Baldo

Università di Verona

Corso Tandem Matematica di Base 2020

Le molte facce di un numero naturale. . .



novantatre

QUATREVINGT-TREIZE

nonante − trois

Dreiundneunzig

ninety-three

93

$5\mathrm{D}_{16}$

XCIII

$\mathbf{01011101_2}$

Ma i numeri naturali non ci bastano...

Oltre a contare vogliamo misurare!

93

$\sqrt{2}$

$1,41421356\ldots$

$\frac{1}{5}$ 0,2 $0,\overline{0011}_2$

$0,\overline{6}$

$\frac{2}{3}$ $0,\overline{10}_2$ $\frac{4}{6}$

π

$3,13159265358979\ldots$

-5

Insiemi numerici sempre più grandi...

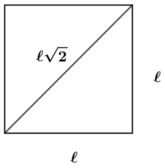
Nel corso della storia è sorta più volte l'esigenza di allargare l'insieme dei numeri comunemente accettati:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & \subset & \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset \\ ? & & \sim 2000 \text{ a.C.} & & \sim 2000 \text{ a.C.} & \\ & & \textit{Babilonia} & & \textit{Antico Egitto}\ldots & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \subset & \mathbb{R} & \subset & \mathbb{C} \\ & \sim 500 \text{ a.C.} & & \text{XVI sec.} \\ & \text{Ippaso di Metaponto?} & & \text{Del Ferro, Tartaglia,Cardano} \\ & \textit{Bolzano, Dedekind (XIX sec.)} & & \end{array}$$

La scoperta dei numeri irrazionali: Ippaso(?)

Una conseguenza *devastante* del teorema di Pitagora (e del teorema di fattorizzazione unica dei numeri naturali):
Se usiamo il lato come unità di misura, non esiste un numero razionale che misuri esattamente la diagonale del quadrato



Più precisamente, non esiste nessun numero razionale il cui quadrato sia 2...
Conseguenza: sulla retta cartesiana ci sono punti la cui ascissa non è razionale.

Quanto costa l'operazione di allargare la retta?

Aggiungere alla retta i punti di ascissa irrazionale non è certo un'operazione indolore:

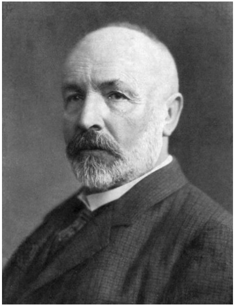
- ora abbiamo molti più numeri con cui lavorare. . .
- . . . e quindi fare i conti diventa molto più complicato!

Ma quanti sono i numeri irrazionali che abbiamo aggiunto? Sono di più o di meno dei numeri razionali che avevamo prima?

Domanda provocatoria: quanti numeri irrazionali conoscete?

Georg Cantor: come confrontare insiemi infiniti!

Negli anni '70 del XIX sec., il matematico tedesco (ma nato in Russia) Georg Cantor fondò la moderna teoria degli insiemi e si pose il problema di confrontare insiemi infiniti.



Le rivoluzionarie scoperte di Cantor destarono grande sensazione della comunità matematica (e qualche polemica, famose quelle con L. Kronecker) a causa dei risultati inaspettati ed apparentemente paradossali che ottenne.

L'albergo infinito di Hilbert

Il grande matematico tedesco David Hilbert, in una serie di lezioni divulgative degli anni '20 del XX secolo, escogitò una maniera molto suggestiva per spiegare la teoria delle cardinalità di Cantor.

Si tratta della celebre storia del Grand Hotel infinito di Hilbert, resa popolare da un libro di G. Gamow del 1947.

L'albergo di Hilbert: un nuovo ospite

- Immaginiamo di avere un albergo con infinite stanze, numerate con i numeri naturali $0, 1, 2, 3, 4, \dots$
- L'albergo è pieno, ma a un certo punto arriva un nuovo ospite che chiede una stanza. Come può essere accontentato?

L'albergo di Hilbert: un nuovo ospite

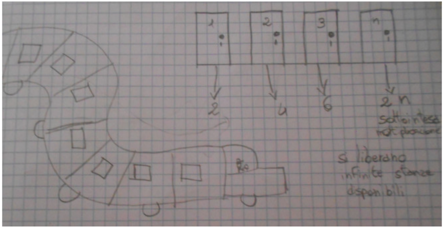
- Immaginiamo di avere un albergo con infinite stanze, numerate con i numeri naturali $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
- L'albergo è pieno, ma a un certo punto arriva un nuovo ospite che chiede una stanza. Come può essere accontentato?
- L'albergatore non si scompone: chiede a ciascuno degli ospiti di spostarti nella stanza successiva (cioè l'ospite nella stanza 0 si trasferisce nella 1, quello nella 1 va nella 2 e così via: in generale, l'ospite nella stanza n si trasferisce nella stanza $n + 1$). In questo modo, si libera la stanza 0 per il nuovo ospite!

L'albergo di Hilbert: infiniti nuovi ospiti

- In seguito (l'albergo è sempre pieno!) arriva un pullman con infiniti nuovi ospiti (numerati con i numeri interi negativi $-1, -2, -3, \ldots$). Come possono essere sistemati?

L'albergo di Hilbert: infiniti nuovi ospiti

- In seguito (l'albergo è sempre pieno!) arriva un pullman con infiniti nuovi ospiti (numerati con i numeri interi negativi $-1, -2, -3, \ldots$). Come possono essere sistemati?
- L'albergatore chiede ai vecchi ospiti di spostarsi nella stanza di numero doppio (0 va in 0, 1 va in 2, 2 va in 4,. . . , n va in $2n$). In questo modo, si liberano tutte le stanze dispari dove possono essere sistemati i nuovi ospiti: -1 va in 1, -2 va in 3, -3 va in 5,. . . , $-n$ va in $2n-1$. . .



L'albergo di Hilbert: insiemi numerabili

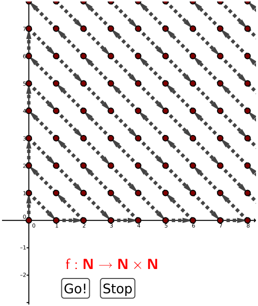
In un certo senso, questo ci dice che gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ "contengono lo stesso numero di elementi". Si dice che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità e si scrive $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. Il caso precedente, di un solo nuovo viaggiatore, ci dice che l'insieme $\mathbb{N}$ ha "lo stesso numero di elementi" (la stessa cardinalità) di $\mathbb{N} \cup \{a\}$, ove a è un nuovo oggetto qualunque.
Inoltre, abbiamo anche visto che i numeri pari (sottinsieme proprio di $\mathbb{N}$) hanno la stessa cardinalità di tutto $\mathbb{N}$: le stanze pari sono sufficienti a "sistemare" tutti i numeri naturali!
Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di N si chiamano insiemi numerabili, perché in un certo senso possono essere contati (usiamo a questo fine il numero della stanza in cui l'albergatore di Hilbert li ha sistemati!).

L'albergo di Hilbert: infiniti pullman con infiniti ospiti!

- Che succede se all'albergo già pieno arrivano infiniti pullman, numerati $1, 2, 3, \ldots$, ciascuno con infiniti posti numerati $0, 1, 2, 3, \ldots$? Riuscirà l'albergatore a sistemare tutti gli infiniti viaggiatori degli infiniti pullman?
- Ci riuscirà, anche se è un po' più complicato! Ciascun viaggiatore da sistemare può essere identificato da una coppia di numeri naturali (n, m), ove n è il numero del pullman e m il posto occupato dal viaggiatore sul pullman stesso. Identifichiamo invece l'ospite che già occupa la stanza numero n dell'albergo con la coppia $(0, n)$ (cioè facciamo finta che l'albergo sia il pullman numero 0). Le coppie che ci interessano possono essere interpretate come coordinate di punti nel piano cartesiano: esse formano un reticolo quadrato nel primo quadrante con spaziatura $1 \ldots$

L'albergo di Hilbert: infiniti pullman con infiniti ospiti!

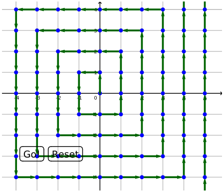
- Per attribuire a ciascun ospite una stanza dell'Hotel, percorriamo il nostro reticolo seguendo il percorso a zigzag in figura: in numero di stanza e' dato dal numero di passi che abbiamo percorso per arrivare al punto che corrisponde all'ospite.



Per vedere una versione animata della costruzione, che ho realizzato con GeoGebra, si clicchi sulla figura o si vada a
`https://www.geogebra.org/m/rzwjajpy`

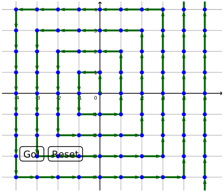
L'albergo di Hilbert: l'invasione dei razionali!

- Abbiamo fatto vedere che $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$: l'insieme dei punti del piano con coordinate naturali è numerabile.
  Analogamente, possiamo far vedere che $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$:

  anche l'insieme dei punti del piano con coordinate intere è numerabile.

- Abbiamo fatto vedere che $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$: l'insieme dei punti del piano con coordinate naturali è numerabile.
  Analogamente, possiamo far vedere che $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$:

  anche l'insieme dei punti del piano con coordinate intere è numerabile.
- Ma cosa succede se all'albergo (che questa volta supponiamo vuoto) arrivano tutti i numeri razionali a chiedere una stanza? La cosa sembra complicata, perchè i razionali sono molti più degli interi... Inoltre sono densi nella retta reale: tra due qualsiasi numeri reali distinti, vicini quanto si vuole, esistono lo stesso infiniti numeri razionali!

L'albergo di Hilbert: l'invasione dei razionali!

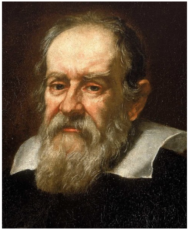
- Possiamo sistemare anche i numeri razionali: infatti, ogni numero razionale q può essere scritto come frazione m/n, ove m è un numero intero e $n \neq 0$ è un numero naturale. Tale scrittura diventa unica se supponiamo che m e n non abbiano divisori in comune diversi da 1 (cioè che la frazione sia ridotta ai minimi termini). Quindi possiamo far corrispondere ad ogni numero razionale una coppia $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (e a numeri razionali diversi corrispondono coppie diverse). Tutte queste coppie trovano posto nell'albergo perché abbiamo visto che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile!

L'albergo di Hilbert: l'invasione dei razionali!

- Si osservi che in questo modo non si ottengono nemmeno tutte le copppie: per esempio, non troveremo mai la coppia $(2, 4)$ che corrisponderebbe ad una frazione semplificabile, né la coppia $(2, 0)$ che corrisponde ad una frazione con denominatore 0, né la coppia $(-2, -3)$ perché abbiamo deciso che il denominatore deve essere positivo... In un certo senso, abbiamo dimostrato che i razionali sono meno dei naturali. Ma sono anche di più perché i razionali contengono i numeri naturali! Se ne deduce che hanno la stessa cardinalità *(Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein)*.

Galileo e gli insiemi numerabili. . .

Un anticipatore di questo tipo di ragionamento è stato nientemeno che Galileo Galilei!



Con i "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze" (1638), Galileo non solo scrive una pietra miliare nella storia della scienza moderna, ma trova anche il modo di inserire il seguente bellissimo dialogo sugli insiemi infiniti (dalla Giornata Prima).

Galileo e gli insiemi numerabili. . .

SALV. (. . .) Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.
SIMP. So benissimo che il numero quadrato è quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in se medesimo: e così il quattro, il nove, etc., son numeri quadrati, nascendo quello dal dua, e questo dal tre, in se medesimi moltiplicati.
SALV. Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si multiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri multiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?
SIMP. Non si può dir altrimenti.

Galileo e gli insiemi numerabili. . .

SALV. Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.
SIMP. Così sta.
SALV. Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati.

Galileo e gli insiemi numerabili. . .

E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto dire la decima parte esser quadrati; in dieci mila solo la centesima parte sono quadrati, in un millione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire, tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.
SAGR. Che dunque si ha da determinare in questa occasione?
SALV. Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, nè la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, nè questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate.

Galileo e gli insiemi numerabili. . .

Galileo dimostra, per bocca di Salviati, che l'insieme dei quadrati perfetti, apparentemente molto più piccolo di $\mathbb{N}$, ha però tanti elementi quanti quelli di $\mathbb{N}$.
Trovandosi più di duecento anni in anticipo su tempi, non ha il coraggio accettare questo apparente paradosso! Subito prima del passaggio riportato, fa infatti dire a Salviati:
Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro.

Cantor mostra che Salviati-Galileo si sbagliava!

La storia dell'albergo di Hilbert potrebbe farci pensare che qualunque insieme infinito di “viaggiatori” possa essere alloggiato nelle stanze (e cioè che ogni insieme infinito sia numerabile): potrebbe forse essere interpretata così l'affermazione che Galileo mette in bocca a Salviati nel passaggio riportato!
In realtà non è così: se all'albergo arrivassero tutti i numeri reali, le stanze non sarebbero sufficienti a contenerli. Non c'è modo di riempire le stanze dell'hotel senza lasciare all'addiaccio una parte (in realtà maggioritaria) dei numeri reali!
Vediamo l'ingegnosa dimostrazione di Cantor (mantenendo la metafora dell'albergo)!

Cantor mostra che Salviati-Galileo si sbagliava!

Supponiamo che tutte le stanze dell'albergo di Hilbert ospitino dei numeri reali e mostriamo che qualcuno è rimasto fuori (indipendentemente dal metodo usato per riempire l'albergo).
Anzi, mostriamo che di sicuro è rimasto fuori un numero reale compreso tra 0 e 1 (cioè un numero che si scrive come "0 virgola una coda infinita di cifre decimali, non necessariamente periodica"). Osserviamo che ogni numero reale tra 0 e 1 si scrive in modo unico in quel modo, purché si convenga di evitare scritture che terminino con 9 periodico.
Nel registro dell'albergo avremo una colonna infinita di numeri reali: nella prima riga avremo l'ospite nella stanza 0, nella seconda l'ospite nella stanza 1 e così via...
Cancelliamo tutte le righe che non corrispondono a numeri reali tra 0 e 1: ci rimarrà la lista dei soli "ospiti" di quel tipo.
Se la lista rimasta è finita, vuol dire che infiniti numeri reali tra 0 e 1 sono rimasti fuori (perché ce ne sono infiniti)!

Cantor mostra che Salviati-Galileo si sbagliava!

Supponiamo al contrario che la lista dei numeri reali compresi tra 0 e 1 ospitati nell'albergo sia infinita: essa sarà del tipo

$$0, a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$
$$0, b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$$
$$0, c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots$$
$$0, d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots$$
$$0, e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 \dots$$
$$\dots$$

Costruiamo un nuovo numero decimale $x_0 = 0, \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots$ in cui le cifre sono scelte in modo che α_k sia *diversa* dalla k-esima cifra del k-esimo numero della lista e da 9: per esempio, se la k-esima cifra del k-esimo numero è pari, scegliamo $\alpha_k = 5$, se questa è dispari scegliamo $\alpha_k = 2$.

Cantor mostra che Salviati-Galileo si sbagliava!

Il numero x_0 che abbiamo costruito è un numero reale compreso tra 0 e 1 e non appartiene alla nostra lista (e quindi non è ospitato nell'albergo) perché per come è stato costruito differisce da tutti i numeri nella lista stessa: differisce infatti da ciascuno di essi per almeno una cifra...quella che abbiamo cambiato!
Questo magnifico trucco è noto come procedimento diagonale di Cantor: in realtà, ci dice che (in qualunque possibile situazione) i numeri reali che restano fuori dall'hotel sono più di quelli che possono essere ospitati (perché?).