Università degli Studi di Verona
CdL in Matematica Applicata /
Master's Degree in Mathematics

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

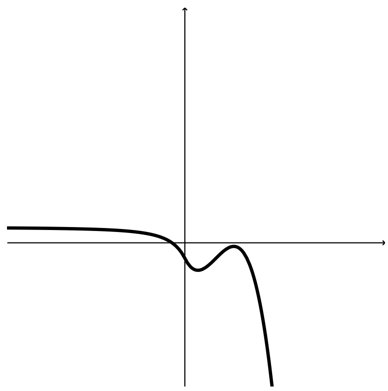
Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/12/2014
Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema di derivazione di funzione composta.

1.2 Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : \nexists\ \tan(x)\ e\ x \in \mathbf{Q}\}$. Si ha

- ☐ $\nexists\ \sup A$;
- ☐ $\sup A = 0$;
- ☒ $\sup A = -\infty$;
- ☐ $\sup A = +\infty$;

1.3 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



Possiamo dedurne che la funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ è decrescente;
- ☒ ha esattamente un punto di massimo;
- ☐ ha esattamente un punto di flesso;
- ☐ è concava;

1.4 Il limite $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^3}$

- ☒ vale 0;
- ☐ vale 1;
- ☐ vale $-\infty$;
- ☐ vale $+\infty$;

1.5 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile e strettamente crescente,

$$A = \{x \in \mathbf{R} : \ f'(x) = 0\}.$$

Allora

- $\square$ $A = \emptyset$;
- $\boxtimes$ A non può contenere intervalli non banali;
- $\square$ A ha solo punti isolati;
- $\square$ A contiene al più un punto;

1.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin^2(e^x) + e^x}{\log(1 + e^{2x})}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x + \sin x}{\sqrt{x^6 + 3x + 2}}.$$

1.7 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + 1}}.$$

1.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si studi la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \ \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) & \text{se } \sin x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

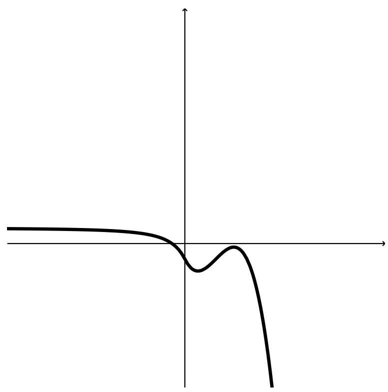
ATTENZIONE: Tempo a disposizione 2 ore. Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
CdL in Matematica Applicata / Master's Degree in Mathematics

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/12/2014
Tipologia B

2.1 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



Possiamo dedurne che la funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ ha esattamente un punto di massimo;
- ☐ è decrescente;
- ☒ ha esattamente un punto di flesso;
- ☐ è concava;

2.2 Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} : \nexists\ \tan(x)\}$. Si ha

- ☐ $\nexists\ \sup A$;
- ☐ $\sup A = 0$;
- ☐ $\sup A = -\infty$;
- ☒ $\sup A = +\infty$;

2.3 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin^2(e^x) + e^{2x}}{\log(1+e^{2x})}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 2x + x\sin x}{\sqrt{x^6 + 3x + 2}}.$$

2.4 Si studi la funzione

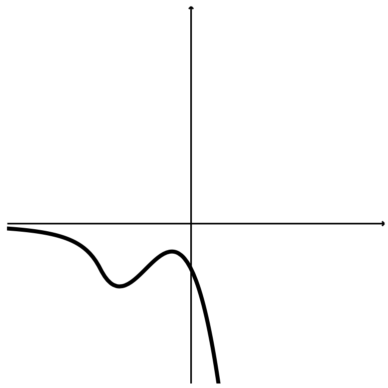
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + 2}}.$$

Università degli Studi di Verona
CdL in Matematica Applicata /
Master's Degree in Mathematics

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/12/2014
Tipologia C

3.1 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



Possiamo dedurne che la funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ ha esattamente un punto di flesso;
- ☒ è decrescente;
- ☐ ha esattamente un punto di massimo;
- ☐ è concava;

3.2 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin^2(e^x)+e^{3x}}{\log(1+e^{2x})}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x+x^2\sin x}{\sqrt{x^6+3x+2}}.$$

3.3 Si studi la funzione

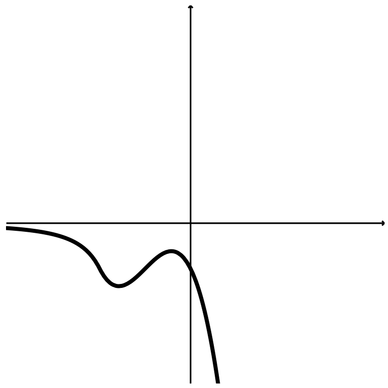
$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+3}}.$$

Università degli Studi di Verona
CdL in Matematica Applicata / Master's Degree in Mathematics

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/12/2014
Tipologia D

4.1 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



Possiamo dedurne che la funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ☐ ha esattamente un punto di flesso;
- ☐ ha esattamente un punto di massimo;
- ☒ è concava;
- ☐ è decrescente;

4.2 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin^2(e^x)+e^{4x}}{\log(1+e^{2x})}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x+x^3\sin x}{\sqrt{x^6+3x+2}}.$$

4.3 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+4}}.$$

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambia nelle altre versioni. Per le tipologie B,C,D, sono riportati solo gli esercizi che differiscono dalle versioni precedenti.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**) è già indicata nel testo con una crocetta.

6. Per calcolare il primo limite, si ponga $t = e^x$. Occorre calcolare il limite per $t \to 0^+$ di

$$\frac{\sin^2 t + t}{\log(1+t^2)} = \frac{\frac{\sin^2 t}{t^2} + \frac{1}{t}}{\frac{\log(1+t^2)}{t^2}} \to +\infty.$$

Nelle versioni B,C,D del compito, il trucco da usare è lo stesso. Si trova che il limite è $2, 1, 1$ rispettivamente.

Per calcolare il secondo limite, si divida numeratore e denominatore per x^3: si trova subito che il limite richiesto vale 1. Lo stesso risultato si ottiene nelle versioni B, C del compito, mentre nella versione D il limite richiesto non esiste: dopo aver diviso per x^3, l'espressione data diventa

$$\frac{1 + \frac{2}{x^2} + \sin x}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^5} + \frac{2}{x^6}}},$$

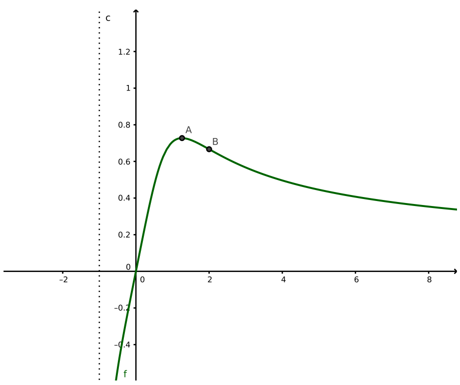
nella quale il denominatore tende a 0 mentre il numeroatore oscilla infinite volte tra valori vicini a 0 e 2...

7. La funzione è definita per $x > -1$, tende a $-\infty$ per $x \to -1^+$ e a 0 per $x \to +\infty$. Inoltre, è positiva se e solo se $x > 0$ (e si annulla solo in 0. Si ha poi $f'(x) = \frac{2-x^3}{2(x^3+1)^{3/2}}$, per cui il punto $x = 2^{1/3}$ è di massimo assoluto. Si ha poi

$$f''(x) = \frac{3x^2(x^3-8)}{4(x^3+1)^{5/2}},$$

per cui vi è un unico punto di flesso per $x = 2$.

Il grafico qualitativo della funzione è quindi come in figura:



Nelle altre versioni del compito, il comportamento qualitativo della funione è lo stesso: cambiano solo la posizione dell'asintoto verticale, del massimo e del flesso.

8. La funzione data è derivabile (e quindi continua) in tutti i punti in cui il seno non si annulla. I soli punti "dubbi" sono quindi quelli del tipo $x = k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$. Siccome la funzione è 2π-periodica e dispari, basta studiare la continuità e la derivabilità in $x = 0$ e $x = \pi$. Siccome si ha $-\sin^2 x \leq f(x) \leq \sin^2 x$, la funzione è continua in questi due punti (teorema dei carabinieri). Per quanto riguarda la derivabilitá, i rapporti incrementali in $x = 0$ e in $x = \pi$ sono

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sin^2 h}{h} \sin\left(\frac{1}{\sin h}\right)$$
$$\frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = -\frac{\sin^2 h}{h} \sin\left(\frac{1}{\sin h}\right)$$

I moduli di entrambe queste funzioni sono maggiorati $\frac{\sin^2 h}{|h|}$, funzione che tende a 0 per $h \to 0$: f è quindi derivabile anche in tutti i punti del tipo $x = k\pi$, con derivata nulla.