Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/2/2016

Tipologia A

1.1 Si enunci il criterio del confronto per le serie a termini positivi.

1.2 Sia f una funzione derivabile 5 volte, di cui sappiamo che $f(x) = x^3 + o(x^5)$ per $x \to 0$. Allora di sicuro

☐ $f'''(0) = 1/6$;

☐ $f^{(5)}(0) = 1$;

☐ $f'''(0) = 1$;

☒ $f'''(0) = 6$;

1.3 Se $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$, allora il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x}$$

☐ vale certamente 1;

☐ non possiamo dire quanto vale con le informazioni che abbiamo;

☒ vale certamente 0;

☐ nessuna delle risposte precedenti;

1.4 Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ ogni volta che $0 \leq a < b \leq 1$. Allora possiamo dire che

☒ $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$;

☐ potrebbe esistere $x \in [0,1]$ tale che $f(x) \neq 0$;

☐ $f(x) < 0$ per ogni $x \in [0,1]$;

☐ nessuna delle risposte precedenti è necessariamente vera;

1.5 Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x [t]\, dt$, ove $[t]$ denota la parte intera di t. La funzione F

- ☐ non è ben definita per $x \in \mathbf{Z}$;
- ☒ è continua per ogni $x \in \mathbf{R}$ ma esistono punti di non derivabilità;
- ☐ non è continua per $x \in \mathbf{Z}$;
- ☐ è continua e derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$;

1.6 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3) - \sin^3(x) + \log(1+x^5)}{(e^x - 1)^4}.$$

1.7 Si trovino le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}.$$

1.8 Si studi la convergenza di uno a scelta tra l'integrale improprio e la serie:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2+3)(e^{1/x^2} - 1)\, dx, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{2}} x^n.$$

1.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Sia $f(0,1] \to \mathbf{R}$ la funzione data da

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{se } \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \text{ e } n \text{ è dispari,} \\ -n & \text{se } \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \text{ e } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Mostrare che l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge ma non converge assolutamente.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/2/2016
Tipologia B

2.1 Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann tale che $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ ogni volta che $0 \le a < b \le 1$. Allora possiamo dire che

- ☐ $f(x) < 0$ per ogni $x \in [0,1]$;
- ☒ potrebbe esistere $x \in [0,1]$ tale che $f(x) \neq 0$;
- ☐ $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è necessariamente vera;

2.2 Se $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$, allora il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin^3 x}$$

- ☐ non possiamo dire quanto vale con le informazioni che abbiamo;
- ☐ vale certamente 1;
- ☒ vale certamente 0;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti;

2.3 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3) - \sin^3(x) + \log(1+x^5)}{(e^x - 1)^5}.$$

2.4 Si trovino le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+2\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})}.$$

2.5 Si studi la convergenza di uno a scelta tra l'integrale improprio e la serie:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2+3)(e^{1/x^2} - 1)\,dx, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n+1}{3}} x^n.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/2/2016
Tipologia C

3.1 Si trovino le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+3\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+3\sqrt{x})}.$$

3.2 Si studi la convergenza di uno a scelta tra l'integrale improprio e la serie:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2+3)(e^{1/x^2}-1)\,dx, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{n}{4}}{\binom{n+1}{4}} x^n.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 1/2/2016
Tipologia D

4.1 Se $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$, allora il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin^4 x}$$

- ☐ vale certamente 0;
- ☒ non possiamo dire quanto vale con le informazioni che abbiamo;
- ☐ vale certamente 1;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti;

4.2 Si trovino le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+4\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+4\sqrt{x})}.$$

4.3 Si studi la convergenza di uno a scelta tra l'integrale improprio e la serie:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2+3)(e^{1/x^2}-1)\,dx, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{n}{5}}{\binom{n+1}{5}} x^n.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 1/2/2016

ESERCIZI DI RECUPERO DELLA PRIMA PROVETTA

REGOLE: *Le soluzioni degli esercizi di recupero devono essere consegnate SEPARATAMENTE da quelle degli esercizi relativi alla seconda parta del corso, su fogli completi di nome e numero di matricola. La prima provetta si considera annullata, qualunque ne sia stato l'esito, per chi consegna le soluzioni degli esercizi di recupero.*

RECUPERO.1 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{e^x-1}-1}{\log(1+\sin(e^x-1))}.$$

RECUPERO.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+5x^3\sin x+6}{\sqrt{x^8+3}+5\cos x+3}.$$

RECUPERO.3 Si studi la funzione

$$f(x)=\frac{1-2\log|x|}{x^2}$$

e se ne tracci il grafico.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni. Nel testo, per le tipologie B,C,D sono riportati solo gli esercizi che avevano qualcosa di diverso dalle tipologie precedenti.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**) è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Lo sviluppo di Taylor di ordine 5 del numeratore è: $x^2 + o(x^5) - (x - x^3/6 + o(x^4))^3 + x^5 + o(x^5) = 3/2x^5 + o(x^5)$. Il denominatore invece è $x^4 + o(x^4)$, per cui il limite richiesto vale 0. Nel compito di tipologia B cambia il denominatore $(x^5 + o(x^5))$ e il risultato è 3/2.

7 L'integrale si trova per esempio con la sostituzione $y = log(1 + \sqrt{x})$. Le primitive richieste sono $\log^2(1 + \sqrt{x}) + C$. Nelle altre versioni, il risultato cambia solo per un fattore numerico.

8 Cominciamo dall'integrale improprio: esso convergerebbe su un intervalli illimitati del tipo $(1, +\infty)$, perché l'integranda si maggiora in modulo con $(e^{\frac{1}{x^2}} - 1) \sim \frac{1}{x^2}$.

D'altra parte l'integranda diverge esponenzialmente a $+\infty$ in un intorno destro di 0, per cui l'integrale improprio diverge a $+\infty$ (confrontare per esempio con la funzione $1/x$ in un intorno destro sufficientemente piccolo di 0).

La serie di potenze ha raggio di convergenza 1, come si trova con il criterio del rapporto. Per $x = \pm 1$ non converge perché il termine generale non tende a 0. L'insieme di convergenza è quindi $-1 < x < 1$.

9 La funzione data è costante a tratti (una sorta di funzione a scala con infiniti scalini disgiunti),per cui si vede subito che l'integrale improprio richiesto coincide con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

il cui termine generale rappresenta l'integrale della funzione (costante) sull'n-esimo interallino. La serie converge per Leibniz ma non converge assolutamente.

RECUPERO.1 Posto $t = e^x - 1$, il limite diventa

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{\log(1 + \sin(t))}.$$

Questo limite si vede subito che vale 1 (usando i limiti fondamentali, Taylor o l'Hôpital).

RECUPERO.2 Il limite vale 3, come si vede ad esempio dividendo numeratore e denominatore per x^4.

RECUPERO.3 La funzione è pari e definita per $x \neq 0$: è sufficiente studiarla per $x > 0$. f si annulla per $x = e^{-1}$, tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e a 0 per $x \to +\infty$.

Si ha poi $f'(x) = \frac{4\log x - 4}{x^3}$, per cui abbiamo un punto di minimo per $x = e$. Infine, $f''(x) = \frac{16 - 12\log x}{x^4}$: la funzione è convessa tra 0 e $e^{4/3}$, dopodiché diventa concava. Il grafico è rappresentato nella seguente figura: