

Diario del Corso di Matematica di base I

Corso TANDEM

Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso Tandem di Matematica di Base I vuole essere un riassunto abbastanza stringato di quello che è stato detto in aula (senza la parte più euristica e alcune delle chiacchiere...), e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione.

Ci si riferisca alle ottime dispense di Enrico Gregorio e Francesca Mantese:

*<http://profs.sci.univr.it/~gregorio/MatematicaDiBase.pdf>,
che contengono anche parecchi esercizi!*

Dalla Home Page di Enrico Gregorio potete scaricare anche degli esempi di compiti d'esame degli anni precedenti... ai quali fatalmente ci ispireremo per preparare il vostro esame!

Indice

- 1 Lezione del 5/2/2015** **3**
Funzioni tra due insiemi: dominio, codominio, insieme di definizione, immagine. Funzioni totali, iniettive, suriettive, biettive. Funzione composta. Esercizi sulle funzioni.
- 2 Lezione del 12/2/2015** **6**
Funzione inversa. Cardinalità finite e infinite. Alcuni insiemi numerabili. Insiemi infiniti hanno cardinalità almeno numerabile.
- 3 Lezione del 19/2/2015** **10**
Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein. Cardinalità della retta reale. Teorema di Cantor: per qualunque insieme A , l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità strettamente maggiore di quella di A . Esercizi.
- 4 Lezione del 26/2/2015** **15**
Relazioni d'equivalenza, relazioni d'ordine stretto e largo, esercizi.

1 Lezione del 5/2/2015

Nelle lezioni precedenti, svolte a scuola, abbiamo imparato cosa è una *relazione* tra due insiemi A e B : si tratta semplicemente di un sottinsieme $\mathcal{R} \subset A \times B$ del prodotto cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

In altre parole, \mathcal{R} è un insieme di *coppie ordinate*, il primo elemento delle quali appartiene ad A ed il secondo a B . Si dice che gli elementi $a \in A$ e $b \in B$ *sono in relazione* o *si corrispondono* secondo \mathcal{R} se e soltanto se $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Ricordiamo anche che A si chiama *dominio* e B *codominio* della relazione. Dentro A e B , possiamo individuare i seguenti due importanti sottinsiemi, che si chiamano rispettivamente *insieme di definizione* e *immagine* della relazione:

$$\begin{aligned}\text{Def}(\mathcal{R}) &= \{a \in A : \text{esiste } b \in B \text{ t.c. } (a, b) \in \mathcal{R}\}. \\ \text{Im}(\mathcal{R}) &= \{b \in B : \text{esiste } a \in A \text{ t.c. } (a, b) \in \mathcal{R}\}.\end{aligned}$$

Abbiamo anche imparato che vi sono classi importanti e significative di relazioni, come le relazioni di equivalenza e le relazioni d'ordine (largo e stretto). Oggi vogliamo però occuparci di un'altra classe di relazioni che riveste particolare interesse, quella delle *funzioni*:

DEFINIZIONE: Dati due insiemi A e B , una *funzione* tra A e B è una relazione $f \subset A \times B$ che gode della seguente proprietà (detta *univocità*): se $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$ allora $b = c$.

In altre parole, ad ogni elemento a dell'insieme di definizione $\text{Def}(f)$ della funzione, la relazione f fa corrispondere *esattamente un elemento* del codominio B : quest'unico elemento del codominio si indica con $f(a)$

Per indicare che f è una funzione tra A e B scriviamo anche $f : A \rightarrow B$, mentre per dire che $b = f(a)$ scriviamo anche $a \mapsto f(a)$.

Per esempio, si considerino le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}f &= \{(0, 1), (4, 5), (5, 1)\} \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N} \\ g &= \{(0, 1), (3, 4), (3, 6)\} \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N} \\ h &= \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y = \sin x\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ k &= \{(x, y) : y \in \mathbf{R}, x = y^2\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}\end{aligned}$$

Abbiamo che f e h sono funzioni (rispettivamente, $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, mentre g e k non lo sono (a g appartengono le coppie $(3, 4)$ e $(3, 6)$, che

hanno uguale il primo elemento e diverso il secondo e analogamente a k appartengono le coppie $(1, 1)$ e $(1, -1)$).

Abbiamo osservato che nel caso di relazioni tra \mathbf{R} e \mathbf{R} , possiamo attribuire un ovvio significato geometrico alla definizione di funzione. Infatti, gli elementi del prodotto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ possono essere interpretati come le *coordinate cartesiane di punti del piano euclideo* (in cui, ovviamente, dobbiamo aver scelto l'origine, i due assi cartesiani ortogonali x e y e l'unità di misura!). A questo punto, un sottinsieme f del piano cartesiano (cioè una relazione tra \mathbf{R} e \mathbf{R}) è una funzione se e solo se *ogni retta parallela all'asse delle y incontra f al più in un punto*.

Tra gli esempi visti sopra, la sinusoidale h ha questa proprietà, mentre la parabola con asse orizzontale k non ce l'ha!

Alcune importanti definizioni sono le seguenti:

DEFINIZIONE: Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice *totale* se $\text{Def}(f) = A$, ossia è *definita su tutto* A ¹.

Si dice *iniettiva* o *uno a uno* se ogni volta che $(a, c) \in f$, $(b, c) \in f$ si ha $a = b$. Questo significa che in punti distinti del suo insieme di definizione la funzione assume valori distinti...ovvero che ogni valore assunto da f viene assunto esattamente una volta.

Si dice *suriettiva* se $\text{Im}(f) = B$, ossia se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $b = f(a)$.

Infine, f si dice *biiettiva* se è totale, iniettiva e suriettiva. Questo significa che a *ogni elemento di* A la funzione f associa *uno ed un solo* elemento di B . Una funzione biiettiva tra A e B si chiama anche *corrispondenza biunivoca* tra A e B .

Si noti che per funzioni da \mathbf{R} in \mathbf{R} , l'iniettività ha una semplice interpretazione geometrica: una funzione è iniettiva se e solo se ogni retta orizzontale taglia la funzione al più in un punto!

Per concludere questa lezione forse un po' tecnica (ma vi ho promesso qualcosa di più divertente per il prossimo incontro: ci occuperemo infatti di cardinalità!), vogliamo parlare un istante di funzione composta.

¹A questo proposito, è importante che vi riveli un triste fatto della vita: a volte, persino i matematici usano notazioni in parziale disaccordo tra di loro! In effetti, nella grande maggioranza dei testi di matematica (comprese, ahimè, le mie dispense di Analisi I, Analisi II, Analisi Funzionale...), la scrittura $f : A \rightarrow B$ significa che l'insieme di definizione di f coincide con A : una funzione è *totale per definizione*, e non c'è distinzione tra dominio ed insieme di definizione. Leggendo un testo, è quindi importante capire quale convenzione adotta l'autore... In questo corso, ci atterremo però religiosamente alle definizioni che vi ho dato, che sono quelle della dispensa di Enrico Gregorio e Francesca Mantese!

Date due funzioni f, g , con $g \circ f$ vogliamo indicare la funzione che si ottiene applicando prima f e poi g : $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Abbiamo fatto già qualcosa di simile componendo una funzione iniettiva con la sua funzione inversa!

Più precisamente

DEFINIZIONE: Siano $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$, la funzione composta

$$g \circ f : A \rightarrow D$$

è definita dalla regola che $(a, d) \in g \circ f$ se e solo se esiste $c \in C$ tale che $(a, c) \in f$ e $(c, d) \in g$.

Ovviamente, $g \circ f$ avrà insieme di definizione non vuoto se e solo se l'intersezione tra l'immagine di f e l'insieme di definizione di g è non vuoto.

La lezione si è conclusa svolgendo un po' di esercizi, tratti dai compiti d'esame dell'anno scorso.

2 Lezione del 12/2/2015

Per concludere i discorsi della volta scorsa, veniamo al concetto di *funzione inversa*. Data una funzione $f : A \rightarrow B$, consideriamo la relazione tra B e A

$$f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\}$$

che si ottiene “scambiando i ruoli di dominio e codominio”.

In generale, la relazione f^{-1} non è più una funzione: ad esempio se $f = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x \in \mathbf{R}, y = x^2\}$ allora f^{-1} è la parabola con asse orizzontale vista sopra, che non è una funzione!

Quando possiamo dire che f^{-1} è una funzione? Se ripensiamo alla sostanziale simmetria dei ruoli giocati da dominio e codominio nella *definizione di funzione* e in quella di *funzione iniettiva*... capiamo subito che f^{-1} è una funzione se e soltanto se f è iniettiva.

DEFINIZIONE: Se $f : A \rightarrow B$ è una *funzione iniettiva*, la sua *funzione inversa* $f^{-1} : B \rightarrow A$ è la relazione sopra definita.

In soldoni, data una funzione iniettiva f la funzione inversa f^{-1} associa ad ogni $b \in \text{Im}(f)$ l'unico elemento $a \in \text{Def}(f)$ tale che $f(a) = b$. Abbiamo quindi, per ogni $a \in \text{Def}(f)$, che $f^{-1}(f(a)) = a$... e analogamente per ogni $b \in \text{Im}(f)$ si ha $b = f(f^{-1}(b))$.

A questo punto è facile convincersi che $\text{Def}(f^{-1}) = \text{Im}(f)$ e $\text{Im}(f^{-1}) = \text{Def}(f)$: in particolare f^{-1} è *totale* se e solo se f è *suriettiva*, è *suriettiva* se e solo se f è *totale*. Invece, f^{-1} è sempre iniettiva... perché f è una funzione e quindi gode della proprietà di univocità.

In particolare, f è biiettiva se e solo se lo è f^{-1} .

Ovviamente, se $f : A \rightarrow B$ non è iniettiva, la relazione inversa f^{-1} non è una funzione e non è possibile *invertire* f . Per farlo, possiamo però restringere artificialmente il dominio di f ad un suo sottinsieme su cui la funzione sia iniettiva. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$ (modo stenografico per scrivere $f = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}, y = x^2\}$) non è iniettiva se la consideriamo come funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, mentre lo è come funzione $f : \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}$. Addirittura, diventa biiettiva come funzione $f : \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$: la sua funzione inversa $f^{-1} : \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ è... ben nota ed è data da $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Analogamente, la funzione esponenziale $f(x) = 10^x$ è una funzione totale e iniettiva di \mathbf{R} in \mathbf{R} , con $\text{Im}(f) = \mathbf{R}_{>0}$. La sua inversa è una funzione biiettiva $f^{-1} : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}$ ed è data da $f^{-1}(y) = \log_{10}(y)$.

Infine, la funzione periodica $f(x) = \sin x$ è... “assai poco iniettiva” come funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R} , essendo 2π -periodica. È però biiettiva se la consideriamo

come funzione $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$. La sua inversa $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ è la funzione *arcoseno*: $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$.

!!! WARNING!!!! DANGER!!! Da quanto appena discusso, dovrete avere ormai capito che con la notazione $f^{-1}(x)$ si denota la *funzione inversa*, che è cosa *ben diversa dal reciproco di $f(x)$* , ossia $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$!!!!

Cominciamo ora a occuparci di qualcosa di più divertente: come possiamo contare quanti elementi contiene un insieme *infinito*?

Se A e B sono insiemi *finiti* con lo stesso numero n di elementi, allora esiste una funzione biettiva da A in B . Infatti, se A ha n elementi esiste una funzione biettiva f tra l'insieme $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ e A (la funzione che “conta” gli elementi di A). Analogamente, se B ha n elementi c'è una biiezione $g : \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow B$. Ma allora la funzione $g \circ f^{-1} : A \rightarrow B$ è una biiezione.

Viceversa, se due insiemi finiti sono in biiezione, allora hanno lo stesso numero di elementi: supponiamo che A e B siano in biiezione tramite f e che A abbia n elementi. C'è quindi una funzione biettiva $g : \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow A$. Ma allora $f \circ g : \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow B$ è una biiezione e anche g ha n elementi.

Possiamo usare la stessa idea per “confrontare” insiemi infiniti:

DEFINIZIONE: Diremo che due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità (e scriveremo $|A| = |B|$) se e soltanto se esiste una funzione biettiva $f : A \rightarrow B$.

La relazione di “stessa cardinalità” è evidentemente riflessiva e transitiva (anche se purtroppo non sarebbe del tutto esatto dire che è una relazione di equivalenza perché non esiste “l'insieme di tutti gli insiemi”...). In ogni caso, è certamente vero che se $|A| = |B|$ e $|B| = |C|$, allora $|A| = |C|$.

Per gli insiemi finiti, avere la stessa cardinalità è la stessa cosa che avere lo stesso numero di elementi: in particolare, nessun insieme finito può essere in biiezione con un suo sottinsieme proprio.

Questo non è più vero per gli insiemi infiniti! A questo proposito, vi ho raccontato la simpatica storiella dell'*albergo di Hilbert*, che può essere distillata come segue: i seguenti 4 insiemi, che diventano sempre più piccoli da sinistra a destra, hanno tutti la stessa cardinalità

$$|\mathbf{Z}| = |\mathbf{N}| = |\mathbf{N} \setminus \{0\}| = |2\mathbf{N}|$$

(con $2\mathbf{N} = \{2n : n \in \mathbf{N}\}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali pari). Una biiezione tra \mathbf{N} e $\mathbf{N} \setminus \{0\}$ è data da $n \mapsto n+1$, una tra \mathbf{N} e $2\mathbf{N}$ è data da $n \mapsto 2n$. Infine, una biiezione tra \mathbf{Z} e \mathbf{N} è data da

$$n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{se } n \geq 0, \\ -2n - 1 & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di \mathbf{N} si dicono *numerabili* (in quanto una biiezione $f : \mathbf{N} \rightarrow A$ non fa altro che “contare” o “enumerare” gli elementi di A). Sono numerabili gli insiemi scritti sopra, ma vedremo presto che lo sono anche insiemi apparentemente molto più grossi come \mathbf{Q} !

Abbiamo visto (si pensi all'albergo di Hilbert) che \mathbf{N} ha la stessa cardinalità di diversi suoi sottinsiemi propri. Questo fatto caratterizza gli insiemi infiniti (numerabili e non):

PROPOSIZIONE: Un insieme A è infinito se e soltanto se esiste un suo sottinsieme proprio B tale che $|B| = |A|$.

DIM.: Abbiamo già visto che se A è finito allora non c'è alcun sottinsieme proprio con tale proprietà.

Se invece A è infinito, è possibile costruire una funzione $f : \mathbf{N} \rightarrow A$ totale e iniettiva.

Per farlo, scegliamo $x_0 \in A$ (c'è perché A , essendo infinito, non è vuoto). Scegliamo poi $x_1 \in A \setminus \{x_0\}$ (c'è perché altrimenti A avrebbe 1 elemento). Segliamo poi $x_2 \in A \setminus \{x_0, x_1\}$, $x_3 \in A \setminus \{x_0, x_1, x_2\}, \dots$. Questo processo non si arresta perché togliendo ad A un numero finito di elementi rimane sempre qualcosa! La funzione $f : \mathbf{N} \rightarrow A$ data da $n \mapsto x_n$ è chiaramente totale e iniettiva.

Sia $B = A \setminus \{x_0\}$ e costruiamo la seguente biiezione $h : A \rightarrow B$

$$h(a) = \begin{cases} a & \text{se } a \notin \text{Im}(f), \\ x_{n+1} & \text{se } a = x_n \text{ per un } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

In sostanza, la funzione h lascia fermi gli elementi di A che non appartengono alla successione x_n , mentre sposta ogni elemento di questa in quello che lo segue: si tratta di un trucco alla “albergo di Hilbert” che libera il punto x_0 ! Q.E.D.

Nella dimostrazione del teorema precedente, per costruire la funzione f abbiamo scelto un sottinsieme numerabile $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ dell'insieme infinito A : in qualche modo, questo ci dice che gli insiemi infiniti hanno “come minimo” cardinalità numerabile.

Per formalizzare questa intuizione diamo la seguente

DEFINIZIONE: Scriviamo $|A| \leq |B|$ se e soltanto se esiste una funzione totale e iniettiva $f : A \rightarrow B$.

In effetti, notiamo subito che se $C \subset B$, allora $|C| \leq |B|$: la cardinalità di un sottinsieme è sempre più piccola di quella dell'insieme di partenza (basta prendere la funzione totale e iniettiva $c \mapsto c$). Inoltre, una funzione

3 Lezione del 19/2/2015

Torniamo alla disuguaglianza tra cardinalità: ricordo che, per definizione, $|A| \leq |B|$ se e solo se esiste una funzione totale e iniettiva $f : A \rightarrow B$.

Siccome la composizione di due funzioni totali e iniettive $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ è totale e iniettiva, abbiamo subito la proprietà transitiva: $|A| \leq |B|$, $|B| \leq |C|$ implica $|A| \leq |C|$. Meno ovvio è che valga la proprietà antisimmetrica: è la tesi del seguente teorema...grazie al quale la nostra disuguaglianza tra cardinalità gode di tutte le proprietà che ci attendiamo!

TEOREMA (Cantor-Schröder-Bernstein): Siano A, B due insiemi tali che $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$. Allora $|A| = |B|$.

DIM.: Abbiamo due funzioni totali e iniettive $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$. Dobbiamo usarle per costruire una funzione biiettiva! L'idea consiste nel seguire la...genealogia degli elementi di A e B : dato $b \in B$, diciamo che $a \in A$ è il suo *genitore* se $b = f(a)$. Il genitore potrebbe non esserci (cioè b potrebbe essere orfano), altrimenti è unico perché f è iniettiva.

Analogamente, se $a \in A$, diremo che un elemento $b \in B$ è il suo genitore se $a = g(b)$: anche stavolta, se c'è un genitore esso è unico!

Dato $a \in A$, andiamo ad analizzare la sua genealogia: potrebbe avere un genitore in B , che a sua volta potrebbe essere orfano oppure avere un genitore in A , che a sua volta potrebbe essere orfano o avere un genitore in B ... Questo processo di "ricerca degli antenati" potrebbe continuare all'infinito, oppure fermarsi in un elemento orfano (che chiamiamo il *capostipite* di a). Suddividiamo dunque A in tre insiemi due a due disgiunti

- A_0 è costituito dagli elementi di A che hanno una successione infinita di antenati.
- A_A è costituito dagli elementi di A che hanno un capostipite in A .
- A_B è costituito dagli elementi di A che hanno un capostipite in B .

In maniera del tutto analoga, andando ad analizzare gli antenati degli elementi di B , riusciamo a partizionare B nei tre sottinsiemi B_0 , B_A e B_B definiti analogamente a prima.

Consideriamo la funzione $f : A_0 \rightarrow B_0$. Essa è ovviamente totale e iniettiva. È anche suriettiva: se $b \in B_0$, esso per definizione non è orfano, ed il suo genitore appartiene ad A_0 . Quindi f è una biiezione tra A_0 e B_0 . Anche $f : A_A \rightarrow B_A$ è una biiezione: è totale e iniettiva, inoltre il genitore di qualunque $b \in B_A$ deve necessariamente appartenere ad A_A . Infine, per l'analogo motivo $g : B_B \rightarrow A_B$ è una biiezione.

Possiamo quindi definire una biiezione da $h : A \rightarrow B$ nel modo seguente: sugli elementi di A_0 e A_A , h coincide con f , mentre sugli elementi di A_B essa coincide con g^{-1} . Q.E.D.

Il teorema di Cantor-Schröder Bernstein (dovuto essenzialmente a Cantor nonostante i 3 nomi...) è un risultato piuttosto profondo: si provi per esempio a costruire “a mano” una biiezione tra gli intervalli $[0, 1] = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ e $(0, 1) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x \leq 1\}$. Vedrete che non è facilissimo (se non ci riuscite posso dirvi come fare...).

Invece, con il teorema di Cantor Schröder Bernstein, si vede subito che la cardinalità dei due intervalli è la stessa. Infatti, $|(0, 1)| \leq |[0, 1]|$ perché il primo intervallo è un sottinsieme del secondo. Invece, una funzione totale e iniettiva da $[0, 1]$ in $(0, 1)$ è data per esempio da $x \mapsto x/2$, da cui $|[0, 1]| \leq |(0, 1)|$.

Un'altra applicazione quasi immediata è la seguente:

PROPOSIZIONE: L'insieme dei numeri razionali è numerabile

DIM.: Si ha ovviamente $|\mathbf{N}| \leq |\mathbf{Q}|$, perché i numeri naturali sono un sottinsieme dei razionali.

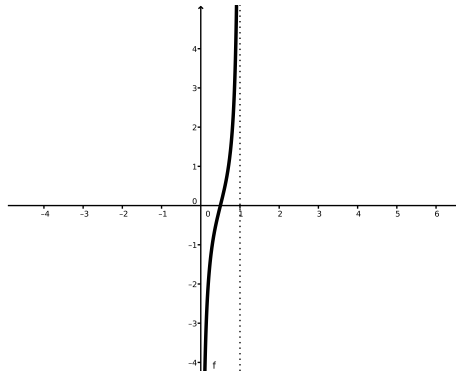
D'altra parte, possiamo costruire una funzione totale e iniettiva g da \mathbf{Q} in $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ nel modo seguente: se $q \in \mathbf{Q}$, possiamo scrivere in modo unico $q = m/n$ ove $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}_{>0}$ e $MCD(m, n) = 1$ (ossia la frazione è ridotta ai minimi termini). Poniamo allora $g(q) = (m, n)$. Ne segue che $|\mathbf{Q}| \leq |\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}| = |\mathbf{N}|$ e grazie al teorema di Cantor-Schröder-Bernstein $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{N}|$. Q.E.D.

Ci sono però anche insiemi di cardinalità strettamente maggiore del numerabile.

Dimostriamo subito che, anche nel senso delle cardinalità infinite, i numeri reali sono *più* dei numeri naturali!

PROPOSIZIONE: $|\mathbf{N}| < |\mathbf{R}|$ (ossia $|\mathbf{N}| \leq |\mathbf{R}|$ e i due insiemi non hanno la stessa cardinalità).

DIM.: Innanzitutto osserviamo che l'intervallo $(0, 1)$ ha la stessa cardinalità di \mathbf{R} : una biiezione tra questi due insiemi è data per esempio da $x \mapsto \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$ o da $x \mapsto \frac{x - \frac{1}{2}}{x(1-x)}$. Ecco il grafico della seconda di queste due funzioni:



Per far vedere che $(0, 1)$ non ha la stessa cardinalità di \mathbf{N} , basta far vedere che una *qualunque* funzione totale $f : \mathbf{N} \rightarrow (0, 1)$ non può essere suriettiva.

Sia dunque f una tale funzione: scriviamo i numeri reali $f(0), f(1), f(2), \dots$ come *numeri decimali* con infinite cifre dopo la virgola. Per rendere unica la scrittura, conveniamo di evitare le scritture che terminano con una “coda” di infiniti 9: grazie a questo accorgimento, due numeri decimali sono uguali se e solo se tutte le loro cifre coincidono!

Avremo dunque

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots \\ f(1) &= 0, b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots \\ f(2) &= 0, c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots \\ f(3) &= 0, d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots \\ f(4) &= 0, e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 \dots \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

Costruiamo un nuovo numero decimale $x_0 = 0, \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \dots$ in cui le cifre sono scelte in modo che α_k sia *diversa* dalla k -esima cifra di $f(k)$ e da 9: per esempio, se la k -esima cifra di $f(k)$ è pari, scegliamo $\alpha_k = 5$, se la k -esima cifra di $f(k)$ è dispari scegliamo $\alpha_k = 2$.

x_0 è un numero reale compreso tra 0 e 1 che non appartiene ad $\text{Im}(f)$ perché per come è stato costruito differisce da tutti gli $f(k)$. Q.E.D.

Si può dimostrare in maniera abbastanza semplice che la cardinalità di \mathbf{R} è uguale a quella dell’*insieme delle parti* di \mathbf{N} , ossia a quella dell’insieme $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ di tutti i sottinsiemi di \mathbf{N} (in classe non abbiamo visto la dimostrazione):

PROPOSIZIONE: *Esiste una funzione biiettiva da \mathbf{R} a $\mathcal{P}(\mathbf{N})$.*

DIM.: Grazie al teorema di Cantor-Schröder-Bernstein, ci basta costruire due funzioni totali e iniettive $f : [0, 1) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{N})$ e $g : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \rightarrow [0, 1)$. Al posto di \mathbf{R} , usiamo l'intervallo $[0, 1)$ che tanto ha la stessa cardinalità².

Osserviamo preliminarmente che i numeri reali tra 0 e 1 si possono rappresentare come *decimali binari* o *numeri decimali in base 2* ossia con una scrittura del tipo $x = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$, ove le cifre a_i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$) possono essere soltanto 0 o 1. Questa scrittura va letta nel modo seguente:

$$x = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \dots + \frac{a_k}{2^{k+1}} + \dots,$$

in perfetta analogia con l'usuale interpretazione dei numeri decimali in base 10. Come per i decimali in base 10, ci sono dei casi in cui la scrittura decimale binaria non è unica: questo succede precisamente per i numeri razionali che a denominatore hanno una potenza di due, che si possono scrivere usando un numero finito di cifre binarie diverse da 0, oppure con una coda infinita di tutti 1... In questi casi, conveniamo di scegliere la rappresentazione che *non* termina con una coda di infiniti 1.

A questo punto, dato $x \in [0, 1)$, lo rappresentiamo come sopra come decimale binario e definiamo

$$f(x) = \{n \in \mathbf{N} : a_n = 1\}$$

(ossia $f(x)$ è l'insieme dei numeri naturali che corrispondono al numero d'ordine delle cifre binarie diverse da 0 di x). La funzione f è evidentemente totale e iniettiva da $[0, 1)$ in $\mathcal{P}(\mathbf{N})$. L'iniettività viene proprio dalla nostra convenzione che ci ha permesso di eliminare ogni ambiguità nella rappresentazione decimale binaria.

Non è purtroppo suriettiva: non contiene nessun sottinsieme di \mathbf{N} che contenga tutti i numeri naturali "da un certo punto in poi", per esempio non contiene \mathbf{N} stesso.

Poco male: definiamo $g : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \rightarrow [0, 1)$ totale e iniettiva come segue. Dato $A \subset \mathbf{N}$, prendiamo il numero decimale binario $f(A) = 0, b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$ tale che ha *tutte le cifre di posto dispari pari a 0*, mentre per le cifre pari scegliamo $b_{2k} = 1$ se $k \in A$, 0 altrimenti ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$). Q.E.D.

Che l'insieme delle parti sia "più grosso" dell'insieme di partenza è un fatto del tutto generale: dato un qualunque insieme A , l'insieme $\mathcal{P}(A)$ dei suoi sottinsiemi (detto insieme delle parti di A) ha cardinalità strettamente

²Abbiamo visto esplicitamente che $[0, 1]$ e $(0, 1]$ hanno la stessa cardinalità... In maniera del tutto analoga si dimostra che $[0, 1)$ e $(0, 1)$ hanno la stessa cardinalità e sappiamo già che l'intervallo aperto ha la stessa cardinalità di \mathbf{R} ! Si mostri più in generale per esercizio che tutti gli intervalli non banali di \mathbf{R} hanno cardinalità uguale a quella di \mathbf{R} .

maggiore di quella di A . In particolare, esistono cardinalità infinite arbitrariamente grandi!

TEOREMA (Cantor): Se A è un insieme e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme di tutti i suoi sottinsiemi, allora $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

DIM.: La dimostrazione usa un metodo diagonale che generalizza (in maniera un pochino più astratta) quello che abbiamo usato per mostrare che \mathbf{R} non è numerabile.

Innanzitutto, notiamo che la funzione $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ definita da $a \mapsto \{a\}$ è totale e iniettiva, per cui $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

Mostriamo che una qualsiasi data funzione $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ non può essere suriettiva, per cui vale la disuguaglianza stretta. È sufficiente considerare il seguente insieme $B \in \mathcal{P}(A)$:

$$B = \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

Dico che non esiste alcun $a \in A$ tale che $g(a) = B$. Infatti, o $a \in B$ o $a \notin B$. Se $a \in B$ allora per definizione $a \notin g(a)$ e quindi $B \neq g(a)$. Viceversa, se $a \notin B$ allora $a \in g(a)$ e abbiamo ancora $B \neq g(a)$. Q.E.D.

Abbiamo concluso la lezione svolgendo gli esercizi sulle cardinalità infinite dei due compiti d'esame dell'anno scorso.

4 Lezione del 26/2/2015

In quest'ultima lezione universitaria del corso tandem, abbiamo ripreso le relazioni di equivalenza e le relazioni d'ordine a abbiamo svolto un bel po' di esercizi "tipo esame".

Riassumo le principali definizioni che abbiamo usato (vedere le già citate dispense di Enrico e Francesca!).

DEFINIZIONI: Sia $R \subset X \times X$ una relazione su un insieme X .

- R si dice *riflessiva* se $\forall x \in X$ si ha $(x, x) \in R$.
- R si dice *simmetrica* se $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \in R$.
- R si dice *transitiva* se $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R$ implica $(x, z) \in R$.
- Se R è riflessiva, simmetrica e transitiva, allora si dice *relazione d'equivalenza*.
- R si dice *antiriflessiva* se $\forall x \in X$ si ha $(x, x) \notin R$.
- Se R è antiriflessiva e transitiva, allora si dice *relazione d'ordine stretto*. Si usa la notazione $x \prec y \Leftrightarrow (x, y) \in R$.
- R si dice *antisimmetrica* se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ implica $x = y$.
- Se R è transitiva, antisimmetrica e riflessiva, allora si dice *relazione d'ordine largo*. Si usa la notazione $x \preceq y \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

ESEMPI: Cominciamo con alcuni esempi di relazioni d'equivalenza.

- $R = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$, ove X è un insieme fissato.
- $R = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : x, y \text{ hanno lo stesso resto della divisione per } n\}$ ove $n \in \mathbf{N}$ è fissato.
- $R = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x - y = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- $R = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x - y \in \mathbf{Q}\}$.

Alcuni esempi di relazioni d'ordine stretto:

- $R = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x < y\}$.
- $R = \{(A, B) : A, B \subset X, A \subsetneq B\}$, X un insieme fissato.
- $R = \{(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : m \text{ divide } n, m \neq n\}$.

Alcuni esempi di relazioni d'ordine largo:

- $R = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x \leq y\}$.
- $R = \{(A, B) : A, B \subset X, A \subset B\}$, X insieme fissato.
- $R = \{(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : m \text{ divide } n\}$.

DEFINIZIONI: Sia \prec una relazione d'ordine stretto su un insieme X , $S \subset X$.

- $y \in X$ si dice *maggiorante* per S se per ogni $x \in S$ si ha $x = y$ oppure $x \prec y$: y è confrontabile con tutti gli elementi di S ed è “più grande” di tutti questi. Analogamente si definiscono i *minoranti* di S sono elementi $y \in X$ tali che per ogni $x \in S$ si ha $y = x$ oppure $y \prec x$. Maggioranti e minoranti possono non esistere, oppure possono essercene tanti!
- $y \in S$ si dice *massimo* di S se per ogni $x \in S$ si ha $x = y$ oppure $x \prec y$. Analogamente si definisce il *minimo* di un sottinsieme di X : è l'elemento $y \in S$ tale che per ogni $x \in S$ si ha $x = y$ oppure $y \prec x$. Massimo e minimo possono non esistere, se ci sono sono unici.
- $y \in X$ è l'*estremo superiore* di S se è il *minimo* dei maggioranti di S . Analogamente, $z \in X$ è l'*estremo inferiore* di S se è il *massimo* dei *minoranti* di S . Potrebbero non esistere. Se uno di essi c'è, è anche unico! Se per caso uno di essi appartiene a S , ne è rispettivamente massimo o minimo.
- $y \in S$ è un elemento *massimale* di S se per ogni $x \in S$ si ha $y = x$ oppure $(y, x) \notin S$: y è più grande di tutti gli elementi di S con cui è confrontabile. Analogamente $y \in S$ si dice *minimale* di S se per ogni $x \in S$ si ha $y = x$ oppure $(y, x) \in S$: y è più piccolo di tutti gli elementi di S con cui è confrontabile. Gli elementi massimali e minimali, in generale, possono non esistere o non essere unici.