Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 20/2/2014

Tipologia A

1.1 Si dia la definizione di funzione a scala su un intervallo $[a, b]$ e del suo integrale.

1.2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile e tale che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Allora di sicuro

☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste finito;

☐ f è decrescente;

☐ f è crescente;

☒ nessuna delle risposte precedenti è necessariamente vera;

1.3 Se per $x \to 0$ abbiamo $f(x) = o(x)$, allora di sicuro

☒ $f^2(x^3) = o(x^6)$;

☐ $f^2(x^3) = o(x^7)$;

☐ potrebbe non essere vero che $f^2(x^2) = o(x)$;

☐ nessuna delle risposte precedenti;

1.4 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile e convessa. Allora di sicuro

☒ $f'(e) \leq f'(\pi)$;

☐ $f(e) > f(\pi)$;

☐ $f'(0) > f'(1)$;

☐ $f(0) \leq f(1)$;

1.5 Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, possiamo dedurre che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$

☐ diverge a $+\infty$;

☐ converge, ma potrebbe non convergere assolutamente;

☒ converge assolutamente;

☐ nessuna delle risposte precedenti;

1.6 Si calcoli, se esiste, almeno uno dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - \sin(x^2)}{\sin^2(x)\log(\cos x)} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\log\sqrt{e^{2x}+1}}$$

1.7 Si studi la seguente funzione e se ne disegni il grafico: $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.

1.8 Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\sin(2x)\, dx.$$

1.9 Si studi la convergenza di almeno uno tra la serie e l'integrale improprio:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+e\right)^n} x^n, \qquad \int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}}\, dx.$$

Soluzioni:

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Per calcolare il primo limite utilizziamo gli sviluppi di Taylor: si vede subito che il denominatore è

$$(x^2 + o(x^2)) \log(1 - x^2/2 + o(x^3)) = -x^4/2 + o(x^4)$$

Analogamente, il numeratore è

$$(x - x^3/6 + o(x^4))^2 - x^2 + o(x^4) = -x^4/3 + o(x^4).$$

Se ne deduce subito che il limite richiesto vale 2/3.

Scriviamo la funzione del secondo limite (forma indeterminata 1^∞) come esponenziale:

$$e^{\log\sqrt{e^{2x}+1}\log(1+\sin(1/x))}.$$

Calcoliamo il limite dell'esponente! Siccome si intuisce che il primo logaritmo "si comporta come x" quando $x \to +\infty$, lo scriviamo come

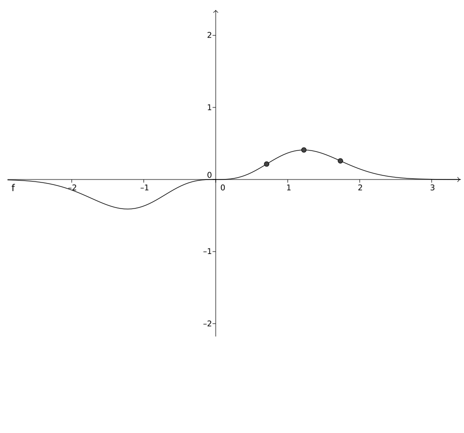
$$\frac{\log\sqrt{e^{2x}+1}}{x} \cdot \frac{\log(1+\sin(1/x))}{\sin(1/x)} \cdot \frac{\sin(1/x)}{1/x}.$$

Tutte e tre le frazioni tendono a 1 (per la prima si usi l'Hôpital o si scriva $x = \log(e^x) = \log\sqrt{e^{2x}}\ldots$), quindi l'esponente tende a 1 ed il limite richiesto tende a e.

7 Si tratta di una funzione definita sull'intera retta reale, dispari (e quindi basta studiarla su $[0, +\infty)$ e che tende a 0 per $x \to \pm\infty$. La derivata prima è $f'(x) = x^2\, e^{-x^2}(3-2x^2)$, che si annulla per $x = 0$ e per $x = \sqrt{3/2}$. Il primo è un punto di flesso a tangente orizzontale, il secondo un punto di massimo.

La derivata seconda è $f''(x) = xe^{-x^2}(6 - 14x^2 + 4x^4)$: si trovano altri due punti di flesso in $x = \sqrt{2}/2$ e in $x = \sqrt{3}$.

Il grafico richiesto è quindi:



8 Per calcolare l'integrale si scriva $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ e si operi il cambio di variabile $\sin x = t$. L'integrale diventa, con un'integrazione per parti:

$$2\int_0^1 te^t\,dt = [2e^t t - 2e^t]_0^1 = 2.$$

9 Con il criterio della radice si trova subito che il raggio di convergenza è $e/3$. Verifichiamo se c'è convergenza per $x = e/3$: il termine generale della serie diventa

$$\frac{e^n}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+e\right)^n} = \frac{1}{n^2\left(1+\frac{1}{en^2}\right)^n} \sim \frac{1}{n^2}$$

e la serie converge perché asintoticamente equivalente ad una serie armonica generalizzata convergente. Lo stesso ragionamento dice che converge (assolutamente) anche per $x = -e/3$: l'intervallo di convergenza è $[-\frac{e}{3}, \frac{e}{3}]$.

L'integranda dell'integrale improprio diverge per $x \to 1^-$: è vicino a quel punto che dobbiamo fare le nostre considerazioni. Per $x \to 1^-$ si ha

$$\frac{1}{(1-x^2)^{1/4}} = \frac{1}{(1-x)^{1/4}(1+x)^{1/4}} \sim \frac{1}{2^{1/4}(1-x)^{1/4}}$$

e l'integrale converge perché asintoticamente equivalente ad un'altro che evidentemente converge!