Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 5/2/2014
Tipologia A

1.1 Si dia la definizione di serie di potenze e se ne caratterizzi l'insieme di convergenza.

1.2 Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente, allora di sicuro

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n \sin(1/n)$$

☐ diverge a $+\infty$;

☐ ha somma 0;

☒ converge;

☐ nessuna delle risposte precedenti è necessariamente vera;

1.3 Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione crescente, non necessariamente continua. Allora la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

☐ potrebbe non esistere in qualche punto $x \in [0,1]$;

☐ è certamente derivabile per ogni $x \in (0,1)$;

☒ è ben definita per ogni $x \in [0,1]$;

☐ nessuna delle risposte precedenti è necessariamente vera;

1.4 Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e dispari, allora l'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

☒ vale 0;

☐ non esiste;

☐ vale $2\int_0^1 f(x)\, dx$.

☐ è calcolabile solo se le primitive di f sono esprimibili in termini di funzioni elementari;

1.5 Se $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$, allora il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$$

- $\square$ vale $+\infty$;
- $\square$ vale 0;
- $\square$ vale 1;
- $\boxtimes$ non è calcolabile con le sole informazioni fornite;

1.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sin x - \log(1-x) - 1}{\log(1+x)(1-\cos(2x))}.$$

1.7 Trovare le primitive della funzione $f(x) = (x+1)^2 \log(1+x)$.

1.8 Discutere la convergenza di almeno uno tra serie e integrale improprio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} x^n, \qquad \int_0^1 \frac{\log(1+x^{1/2})}{\tan x}\, dx.$$

1.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{4}[4\sin x]$, ove $[\cdot]$ denota la parte intera. Si dica, motivando adeguatamente le risposte, se la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

è ben definita, periodica, continua, derivabile.

ATTENZIONE: Tempo a disposizione 2 ore. Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 5/2/2014
Tipologia B

2.1 Se $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$, allora il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$$

- ☐ vale 0;
- ☐ vale 1;
- ☒ non è calcolabile con le sole informazioni fornite;
- ☐ vale $+\infty$;

2.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sin x - \log(1-x) - 1}{\log(1+x)(1-\cos(3x))}.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 5/2/2014
Tipologia C

3.1 Se $f(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$, allora il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$$

☐ non è calcolabile con le sole informazioni fornite;

☒ vale 0;

☐ vale $+\infty$;

☐ vale 1;

3.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sin x - \log(1-x) - 1}{\log(1+x)(1-\cos(4x))}.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 5/2/2014
Tipologia D

4.1 Se $f(x) = o(x^5)$ per $x \to 0$, allora il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$$

- ☐ vale $+\infty$;
- ☐ vale 1;
- ☐ non è calcolabile con le sole informazioni fornite;
- ☒ vale 0;

4.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sin x - \log(1-x) - 1}{\log(1+x)(1-\cos(5x))}.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 5/2/2014

ESERCIZI DI RECUPERO DELLA PRIMA PROVETTA

REGOLE: *Le soluzioni degli esercizi di recupero devono essere consegnate SEPARATAMENTE da quelle degli esercizi relativi alla seconda parta del corso, su fogli completi di nome e numero di matricola. La prima provetta si considera annullata, qualunque ne sia stato l'esito, per chi consegna le soluzioni degli esercizi di recupero.*

RECUPERO.1 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x^2)}{\sqrt{1-\cos x}(e^x-1)}.$$

RECUPERO.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x+\sin x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}.$$

RECUPERO.3 Si studi la funzione $f(x) = xe^{-x^3}$ e se ne tracci il grafico.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Del resto, i testi che precedono riportano solo gli esercizi dei compiti di tipologia B, C, D che differiscono *in qualcosa* da quelli delle versioni precedenti.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Lo sviluppo di Taylor di ordine 3 del numeratore è:

$$1 - x^2/2 + o(x^3) - x + x^3/6 - (-x - x^2/2 - x^3/3) - 1 = x^3/2 + o(x^3),$$

mentre il denominatore è:

$$(x + o(x))(1 - 1 + 2x^2 + o(x^3)) = 2x^3 + o(x^3).$$

Il limite richiesto vale dunque 1/4. Nelle altre versioni del compito cambiava solo un fattore numerico a denominatore...

7 L'integrale richiesto si calcola subito per parti: si ottiene

$$\frac{(x+1)^3}{3}\log(x+1) - \frac{(x+1)^3}{9} + C.$$

8 Applichiamo il criterio della radice: abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^3}{n}} = e^{-1},$$

per cui il raggio di convergenza della serie è e. Per $x = \pm e$, il termine generale della serie tende a 1, per cui non vi può essere convergenza. Ne concludiamo che la serie converge per $-e < x < e$.

Passiamo all'integrale improprio: l'integranda è asintoticamente equivalente a $\frac{x^{1/k}}{x} = \frac{1}{x^{1-1/k}}$. L'integrale improprio dell'ultima funzione è convergente (l'esponente è minore di 1), per cui lo è anche quello proposto.

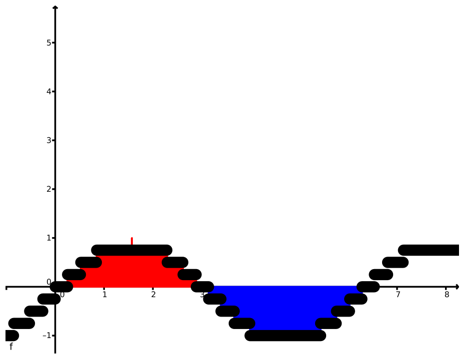
9 La funzione $f(x)$ è costante a tratti (è una funzione a scala su ogni intervallo limitato), per cui $F(x)$ è ben definita.

È anche continua: infatti $|f(x)| \leq 1$ per ogni x, da cui

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \left|\int_x^{x+h} |f(t)|\, dt\right| \leq |h| \to 0 \quad \text{quando } h \to 0.$$

$F(x)$ non è invece derivabile nei punti di discontinuità di $f(x)$, dove presenta dei punti angolosi.

Infine, $F(x)$ *non* è periodica pur essendolo $f(x)$: infatti, non è difficile convincersi che $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt$ è *strettamente negativo* a causa dell'asimmetria della funzione parte intera (vedi figura).



RECUPERO.1 Usando i limiti fondamentali oppure gli sviluppi di Taylor si ottiene subito che il limite richiesto vale $-\sqrt{2}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x^2)}{\sqrt{1-\cos x}(e^x-1)} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x^2)}{-x^2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} \cdot \frac{x}{e^x-1} =$$
$$-1 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = -\sqrt{2}.$$

RECUPERO.2 Si divida numeratore e denominatore per il termine più veloce, ossia $e^{x^2/2}$: si vede subito che il limite richiesto vale 0.

RECUPERO.3 La funzione è definita sull'intera retta reale, tende a 0 per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ per $x \to -\infty$. Inoltre, è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Abbiamo poi $f'(x) = e^{-x^3}(1-3x^3)$, per cui f è crescente per $x < (1/3)^{1/3}$ e decrescente per $x > (1/3)^{1/3}$. La derivata seconda è $f''(x) = e^{-x^3}x^2(-12+9x^3)$: c'è un punto di flesso in $x = (4/3)^{1/3}$ nel quale la funzione passa da concava a convessa. Il grafico è quindi quello in figura: