Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 4/2/2011
Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema di Taylor con resto di Peano.

1.2 Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt > 0$ per ogni $x \in (a,b]$. Allora di sicuro

- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$;
- ☒ $f(x) > 0$ per qualche punto $x \in [a,b]$;
- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b]$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

1.3 Se $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$, allora il limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(f(x)^2)}{x^6}$

- ☐ non si può calcolare con i dati a disposizione;
- ☒ vale 0;
- ☐ vale 1;
- ☐ vale ∞;

1.4 Sia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi *convergente*, $\{b_n\}$ una successione *limitata* a termini di segno qualunque. Allora la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

- ☐ diverge oppure è indeterminata;
- ☐ è certamente indeterminata;
- ☒ converge di sicuro;
- ☐ potrebbe convergere o divergere;

1.5 Data la funzione $f(x) = |x|$, se ne consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Allora

- ☒ $F(x)$ è ovunque derivabile, ma la derivata seconda non esiste in almeno un punto;
- ☐ $F(x)$ è ovunque continua, ma non è derivabile in almeno un punto;
- ☐ $F(x)$ è discontinua in almeno un punto;
- ☐ $F(x)$ è ovunque derivabile due volte;

1.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - \cos^2 x - x^2}{\sin(3x^4)}$$

1.7 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

1.8 Si studi, al variare del parametro x, la convergenza di almeno una della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}\, x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x + \cos x)^n}{n \log^2 n}.$$

1.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si consideri, sull'intervallo $(0,1)$, la funzione $f(x) = 1/[1/x]$, ove $[t]$ denota la parte intera di t. Si dica, motivando adeguatamente quanto affermato, se la funzione $g(x) = \int_0^x \int_0^t f(s)\, ds$ è ben definita, continua, derivabile, convessa.

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 4/2/2011

Tipologia B

2.1 Si enunci il teorema di Taylor con resto di Peano.

2.2 Data la funzione $f(x) = |x|$, se ne consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Allora

- ☒ $F(x)$ è ovunque derivabile, ma la derivata seconda non esiste in almeno un punto;
- ☐ $F(x)$ è ovunque continua, ma non è derivabile in almeno un punto;
- ☐ $F(x)$ è discontinua in almeno un punto;
- ☐ $F(x)$ è ovunque derivabile due volte;

2.3 Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt > 0$ per ogni $x \in (a, b]$. Allora di sicuro

- ☒ $f(x) > 0$ per qualche punto $x \in [a, b]$;
- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$;
- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b]$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

2.4 Se $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$, allora il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(f(x)^2)}{x^6}$

- ☒ vale 0;
- ☐ vale 1;
- ☐ non si può calcolare con i dati a disposizione;
- ☐ vale ∞;

2.5 Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi *convergente*, $\{b_n\}$ una successione *limitata* a termini di segno qualunque. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

- ☐ diverge oppure è indeterminata;
- ☐ è certamente indeterminata;
- ☒ converge di sicuro;
- ☐ potrebbe convergere o divergere;

2.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - \cos^2 x - x^2}{\sin(2x^4)}$$

2.7 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

2.8 Si studi, al variare del parametro x, la convergenza di almeno una della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}\; x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x + \cos x)^n}{n \log^2 n}.$$

2.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si consideri, sull'intervallo $(0,1)$, la funzione $f(x) = 1/[1/x]$, ove $[t]$ denota la parte intera di t. Si dica, motivando adeguatamente quanto affermato, se la funzione $g(x) = \int_0^x \int_0^t f(s)\, ds$ è ben definita, continua, derivabile, convessa.

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 4/2/2011

Tipologia C

3.1 Si enunci il teorema di Taylor con resto di Peano.

3.2 Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt > 0$ per ogni $x \in (a,b]$. Allora di sicuro

- ☒ $f(x) > 0$ per qualche punto $x \in [a,b]$;
- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$;
- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b]$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

3.3 Se $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$, allora il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(f(x)^2)}{x^6}$

- ☐ vale ∞;
- ☒ vale 0;
- ☐ non si può calcolare con i dati a disposizione;
- ☐ vale 1;

3.4 Data la funzione $f(x) = |x|$, se ne consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Allora

- ☐ $F(x)$ è ovunque derivabile due volte;
- ☒ $F(x)$ è ovunque derivabile, ma la derivata seconda non esiste in almeno un punto;
- ☐ $F(x)$ è discontinua in almeno un punto;
- ☐ $F(x)$ è ovunque continua, ma non è derivabile in almeno un punto;

3.5 Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi *convergente*, $\{b_n\}$ una successione *limitata* a termini di segno qualunque. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

- ☐ è certamente indeterminata;
- ☒ converge di sicuro;
- ☐ diverge oppure è indeterminata;
- ☐ potrebbe convergere o divergere;

3.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - \cos^2 x - x^2}{\sin(4x^4)}$$

3.7 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

3.8 Si studi, al variare del parametro x, la convergenza di almeno una della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}\, x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x + \cos x)^n}{n \log^2 n}.$$

3.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si consideri, sull'intervallo $(0,1)$, la funzione $f(x) = 1/[1/x]$, ove $[t]$ denota la parte intera di t. Si dica, motivando adeguatamente quanto affermato, se la funzione $g(x) = \int_0^x \int_0^t f(s)\, ds$ è ben definita, continua, derivabile, convessa.

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 4/2/2011
Tipologia D

4.1 Si enunci il teorema di Taylor con resto di Peano.

4.2 Se $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$, allora il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(f(x)^2)}{x^6}$

- ☐ vale 1;
- ☐ vale ∞;
- ☒ vale 0;
- ☐ non si può calcolare con i dati a disposizione;

4.3 Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi *convergente*, $\{b_n\}$ una successione *limitata* a termini di segno qualunque. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

- ☐ è certamente indeterminata;
- ☒ converge di sicuro;
- ☐ diverge oppure è indeterminata;
- ☐ potrebbe convergere o divergere;

4.4 Data la funzione $f(x) = |x|$, se ne consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Allora

- ☐ $F(x)$ è ovunque derivabile due volte;
- ☒ $F(x)$ è ovunque continua, ma non è derivabile in almeno un punto;
- ☐ $F(x)$ è discontinua in almeno un punto;
- ☐ $F(x)$ è ovunque derivabile, ma la derivata seconda non esiste in almeno un punto;

4.5 Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt > 0$ per ogni $x \in (a,b]$. Allora di sicuro

- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$;
- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b]$;
- ☒ $f(x) > 0$ per qualche punto $x \in [a,b]$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

4.6 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - \cos^2 x - x^2}{\sin(5x^4)}$$

4.7 Si calcoli l'integrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

4.8 Si studi, al variare del parametro x, la convergenza di almeno una della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}\, x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x + \cos x)^n}{n \log^2 n}.$$

4.9(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si consideri, sull'intervallo $(0,1)$, la funzione $f(x) = 1/[1/x]$, ove $[t]$ denota la parte intera di t. Si dica, motivando adeguatamente quanto affermato, se la funzione $g(x) = \int_0^x \int_0^t f(s)\, ds$ è ben definita, continua, derivabile, convessa.

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 4/2/2011

ESERCIZI DI RECUPERO DELLA PRIMA PROVETTA

REGOLE: *Le soluzioni degli esercizi di recupero devono essere consegnate SEPARATAMENTE da quelle degli esercizi relativi alla seconda parta del corso, su fogli completi di nome e numero di matricola. La prima provetta si considera annullata, qualunque ne sia stato l'esito, per chi consegna le soluzioni degli esercizi di recupero.*

RECUPERO.1 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+\sin x} - \sqrt{x-\sin x}).$$

RECUPERO.2 Si calcoli, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin(2x+3x^2))^{\frac{1}{e^x-1}}.$$

RECUPERO.3 Si consideri la funzione reale di variabile reale $f(x) = xe^{-x^2} + \frac{x}{|x|}$.

1. Si studi $f(x)$ e se ne tracci un grafico il più dettagliato possibile.
2. Si dica, in particolare, se f è prolungabile ad una funzione continua e/o derivabile in $x = 0$.
3. Si trovino, se esistono, il massimo ed il minimo assoluto di f sulla semiretta $(0, +\infty)$.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Si ha $\cos x^2 = 1 - x^4/2 + o(x^6)$, $\cos^2 x = (1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^5))^2 = 1 - x^2 + x^4/12 + x^4/4 + o(x^4)$. Il numeratore è quindi $-\frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$, mentre il denominatore è $3x^4 + o(x^4)$: il limite richiesto vale $-\frac{5}{18}$.
7 Una primitiva dell'integranda si calcola facilmente tramite la sostituzione $\cos x = t$: ci si riduce a calcolare l'integrale della funzione razionale

$$\frac{t^2 - 1}{1 + t^2} = 1 - \frac{2}{1 + t^2},$$

che è immediato. Si trova

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \cos x - 2\arctan(\cos x) + C,$$

e da questa espressione si ottiene immediatamente l'integrale voluto.

7 Per la prima serie, grazie alla formula di Taylor del seno si ottiene subito che $\sqrt{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}$ è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{\sqrt{6}n^{3/2}}$: usando questa espressione si vede subito che la serie di potenze data ha raggio di convergenza 1 e che essa converge assolutamente in entrambi gli estremi dell'intervallo di convergenza. L'insieme di convergenza della serie data è quindi $[-1, 1]$.

La seconda serie è una serie di potenze nella variabile $y = \sin x + \cos x$: si verifica facilmente che il raggio di convergenza è 1. Usando poi il criterio integrale, si vede che tale serie converge assolutamente per $y = \pm 1$.

La condizione di convergenza diventa quindi $|\sin x + \cos x| \leq 1$. Tale disequazione si risolve subito osservando che $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$: si trova così la condizione di convergenza $\pi/2 + k\pi \leq x \leq \pi + k\pi$.

8 Osserviamo che $[\frac{1}{x}] = n$ se $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$: la funzione data vale dunque $1/n$ sull'intervallo $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Si tratta di una funzione costante a tratti (una "funzione a scala" con infiniti scalini, che tende a 0 per $x \to 0^+$): in particolare, f è non negativa e integrabile secondo Riemann, per cui la funzione $h(x) = \int_0^x f(s)\, ds$ è ben definita e crescente. È poi continua: infatti $0 \leq f(x) \leq 1$, per cui per $\delta > 0$ vale $h(x + \delta) - h(x) \leq \delta$ (da cui $h(x + \delta) \to h(x)$ per $\delta \to 0^+$).

La funzione $g(x)$ è la funzione integrale della funzione continua $h(x)$: è quindi ovunque derivabile (e a maggior ragione continua). È poi convessa perché abbiamo appena osservato che la sua derivata $h(x)$ è crescente.

RECUPERO.1 Moltiplichiamo e dividiamo la frazione per $\sqrt{x + \sin x} + \sqrt{x - \sin x}$ e semplifichiamo poi $\sqrt{x}$: la funzione data diventa

$$\frac{2\sin x}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x}} + \sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}}},$$

che chiaramente non ammette limite per $x \to +\infty$ (il denominatore tende a 2, mentre il numeratore oscilla infinite volte tra -2 e 2).

RECUPERO.2 Scriviamo la funzione di cui si deve calcolare il limite come esponenziale:

$$e^{\frac{\log(1+\sin(2x+3x^2))}{e^x-1}}.$$

Usando i limiti fondamentali o gli sviluppi di Taylor, si vede subito che l'esponente tende a 2: il limite richiesto vale e^2.

RECUPERO.3 La funzione data è definita per $x \neq 0$ ed è dispari: sarà quindi sufficiente studiarla per $x > 0$. Notiamo anche che per $x > 0$ si ha $f(x) = xe^{-x^2} + 1$, che per $x \to 0^+$ la funzione tende a 1 e che per $x \to +\infty$ la funzione tende a 1.

Si ha poi $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$, da cui si ottiene che la funzione è crescente in $(0, \sqrt{2}/2)$ e decrescente in $(\sqrt{2}/2, +\infty)$. La derivata seconda vale $f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$, per cui la funzione è concava in $(0, \sqrt{3/2})$ e convessa in $(\sqrt{3/2}, +\infty)$.

La funzione non è prolungabile ad una funzione continua (né tantomeno derivabile) in $x = 0$, perchè il limite destro ed il limite sinistro valgono rispettivamente $+1$ e -1.

Il massimo sulla semiretta $(0, +\infty)$ è $f(\sqrt{2}/2)$, mentre il minimo non esiste (l'estremo inferiore è 1 e la funzione vi tende per $x \to 0^+$ o per $x \to +\infty$).

Ecco un grafico della funzione: