Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

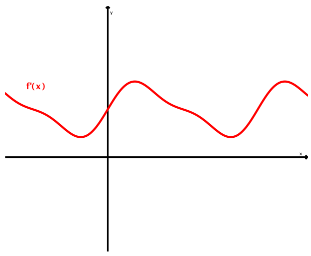
Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 6/9/2010

Tipologia A

1.1 Si definisca il raggio di convergenza di una serie di potenze e si spieghi come esso è legato alle prorietà di convergenza (e di regolarità della somma) della serie stessa.

1.2 Quale delle seguenti affermazioni è corretta se il grafico rappresenta la derivata prima di una certa funzione f?



- ☐ f è convessa sull'intera retta reale;
- ☐ f è decrescente sull'intera retta reale;
- ☒ f è crescente sull'intera retta reale;
- ☐ f é concava sull'intera retta reale;

1.3 Sia $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione continua. Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ e l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$

- ☐ hanno lo stesso comportamento se e soltanto se f è decrescente;
- ☐ non hanno mai lo stesso comportamento;
- ☐ hanno sempre lo stesso comportamento;
- ☒ hanno certamente lo stesso comportamento se sappiamo che f è decrescente;

1.4 Si consideri, sulla semiretta $[1, +\infty)$, la funzione reale di variabile reale $F(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\, dt$

- ☒ è derivabile e $F'(x) = -\frac{\sin x}{x^2}$;
- ☐ non è continua;
- ☐ è derivabile e $F'(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \sin 1$;
- ☐ è continua ma non derivabile;

1.5 Se per ogni $n \in \mathbf{N}$ vale $a_n > e^{-n}$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

- ☐ converge;
- ☐ diverge a $+\infty$;
- ☒ potrebbe convergere o divergere: occorrono altre informazioni;
- ☐ è una serie geometrica;

1.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x^4}\sin(e^{x^3}), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x}{\log(1+x^3)}.$$

1.7 Data la funzione di variabile reale

$$f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2},$$

se ne studi il dominio, la continuità e la derivabilità. Si trovino poi il massimo ed il minimo assoluto di f sull'intervallo $[-\frac{27}{8}, 1]$ e si disegni un grafico il più dettagliato possibile della funzione.

1.8 Si studi la convergenza della serie e dell'integrale improprio seguenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-3\sqrt{n}}, \qquad \int_1^{+\infty} e^{-3\sqrt{x}}\, dx.$$

Soluzioni:

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Per quanto riguarda il primo limite, per $x \to -\infty$ abbiamo $e^{x^3} \to 0$: il limite è nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. D'altra parte, possiamo scrivere

$$e^{x^4} \sin(e^{x^3}) = \frac{\sin(e^{x^3})}{e^{x^3}} \cdot e^{x^4+x^3}.$$

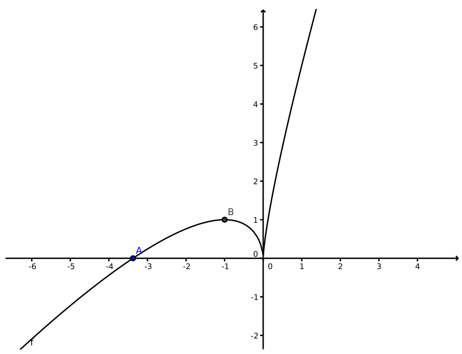
La frazione tende a 1 (limite fondamentale), mentre l'esponenziale di destra tende a $+\infty$: il limite richiesto vale $+\infty$.

Per il secondo limite, utilizziamo i polinomi di ordine 3 del seno: si vede facilmente che il numeratore è $-x^3/3+o(x^3)$. Il denominatore (polinomi di Taylor del logaritmo...) è invece $x^3 + o(x^3)$: il limite richiesto vale $-1/3$.

7 La funzione data è definita per ogni x reale, continua, tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ per $x \to -\infty$. Essa si annulla per $x = 0$ e per $x = -27/8$, è negativa per $x < -27/8$ e ≥ 0 altrove.

Si ha poi $f'(x) = 2+2/\sqrt[3]{x}$: la derivata si annulla per $x = -1$, mentre non esiste (con limiti infiniti) per $x = 0$. Guardando il segno di f', vediamo che $x = -1$ è un punto di massimo relativo, mentre per $x = 0$ abbiamo una cuspide che è anche minimo relativo. In particolare, nell'intervallo richiesto il minimo assoluto è 0, il massimo assoluto è assunto per $x = 1$ e vale 5.

Infine, $f''(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3x^4}}$, sempre negativa: la funzione è concava sulle semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Ecco il grafico richiesto:



8 Siccome la funzione $e^{-3\sqrt{x}}$ è continua, non negativa e decrescente sulla semiretta $[1, +\infty$, la serie e l'integrale hanno lo stesso comportamento (criterio integrale di convergenza per le serie). Studiamo il comportamento dell'integrale con il criterio del confronto: per x abbastanza grande si ha $e^{-3\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$ (per $x \to +\infty$ abbiamo infatti $\frac{e^{3\sqrt{x}}}{x^2} \to +\infty$). L'integrale dato è dunque convergente come $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$.