Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 18/2/2010
Tipologia A

1.1 Si enuncino il principio di Fermat ed il teorema che permette di studiare i massimi e i minimi relativi tramite le derivate successive.

1.2 Sia $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ la relativa funzione integrale. Allora

- ☐ $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$;
- ☒ $F(x)$ è ovunque continua in $[a, b]$;
- ☐ $F(x)$ è ovunque derivabile in $[a, b]$;
- ☐ $F(x)$ potrebbe non essere ben definita;

1.3 L'integrale $\int_0^{10} e^{[x]}\, dx$ (ove $[x]$ denota la parte intera di x) vale

- ☐ $e^{[10]} - 1$;
- ☒ $\frac{e^{10}-1}{e-1}$;
- ☐ $[e^{10} - 1]$;
- ☐ nessuno dei precedenti;

1.4 Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) > 0$. Allora

- ☐ si ha $f(y) > f(x)$ per ogni x, y in un intorno destro di x_0 con $y > x$;
- ☐ si ha $f(x) > f(x_0)$ per ogni x in un intorno sinistro di x_0;
- ☐ si ha $f'(x) > 0$ in un intorno destro di x_0;
- ☒ si ha $f(x) > f(x_0)$ per ogni x in un intorno destro di x_0;

1.5 Si consideri la funzione $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{3^k k}$. Nel punto $x = 1/2$ la funzione f

- ☐ esiste ma non è né continua né derivabile;
- ☐ esiste, è continua ma non derivabile;
- ☒ esiste, è continua e derivabile;
- ☐ non esiste;

1.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x - e^x)^2 + 1 - \cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x}{x^4}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{(1 + \frac{1}{x})^{x^2}}.$$

1.7 Si studi la funzione $f(x) = \sqrt{|\log(\tan x)|}$ e se ne tracci il grafico (non è richiesto lo studio della concavità/convessità, mentre è consigliato uno studio della periodicità e degli eventuali punti di discontinuità o di non derivabilità). Si deduca infine il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{|\log(|\tan x|)|}$

1.8 Si trovi una primitiva della funzione $f(x) = \frac{\arctan x}{x^2}$. Si studi anche, al variare del parametro α, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha}\, dx.$$

1.9 Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n}) \right) (x + 3)^n.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 18/2/2010
Tipologia B

2.1 Si enuncino il principio di Fermat ed il teorema che permette di studiare i massimi e i minimi relativi tramite le derivate successive.

2.2 Sia $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ la relativa funzione integrale. Allora

☐ $F(x)$ potrebbe non essere ben definita;

☐ $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$;

☐ $F(x)$ è ovunque derivabile in $[a, b]$;

☒ $F(x)$ è ovunque continua in $[a, b]$;

2.3 Si consideri la funzione $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{3^k k}$. Nel punto $x = 1$ la funzione f

☒ esiste, è continua e derivabile;

☐ esiste ma non è né continua né derivabile;

☐ non esiste;

☐ esiste, è continua ma non derivabile;

2.4 Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) > 0$. Allora

☐ si ha $f(y) > f(x)$ per ogni x, y in un intorno destro di x_0 con $y > x$;

☐ si ha $f(x) > f(x_0)$ per ogni x in un intorno sinistro di x_0;

☐ si ha $f'(x) > 0$ in un intorno destro di x_0;

☒ si ha $f(x) > f(x_0)$ per ogni x in un intorno destro di x_0;

2.5 L'integrale $\int_0^{10} e^{[x]}\, dx$ (ove $[x]$ denota la parte intera di x) vale

☒ $\frac{e^{10}-1}{e-1}$;

☐ $[e^{10}-1]$;

☐ $e^{[10]}-1$;

☐ nessuno dei precedenti;

2.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x-e^x)^2+1-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x}{x^4}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}.$$

2.7 Si studi la funzione $f(x) = \sqrt{|\log(\tan x)|}$ e se ne tracci il grafico (non è richiesto lo studio della concavità/convessità, mentre è consigliato uno studio della periodicità e degli eventuali punti di discontinuità o di non derivabilità). Si deduca infine il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{|\log(|\tan x|)|}$

2.8 Si trovi una primitiva della funzione $f(x) = \frac{\arctan x}{x^2}$. Si studi anche, al variare del parametro α, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha}\, dx.$$

2.9 Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n})\right)(x+3)^n.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 18/2/2010
Tipologia C

3.1 Si enuncino il principio di Fermat ed il teorema che permette di studiare i massimi e i minimi relativi tramite le derivate successive.

3.2 Si consideri la funzione $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{3^k k}$. Nel punto $x = 2$ la funzione f

- ☐ esiste, è continua ma non derivabile;
- ☐ non esiste;
- ☐ esiste ma non è né continua né derivabile;
- ☒ esiste, è continua e derivabile;

3.3 L'integrale $\int_0^{10} e^{[x]}\,dx$ (ove $[x]$ denota la parte intera di x) vale

- ☐ $[e^{10} - 1]$;
- ☐ $e^{[10]} - 1$;
- ☒ $\frac{e^{10}-1}{e-1}$;
- ☐ nessuno dei precedenti;

3.4 Sia $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la relativa funzione integrale. Allora

- ☐ $F(x)$ è ovunque derivabile in $[a, b]$;
- ☒ $F(x)$ è ovunque continua in $[a, b]$;
- ☐ $F(x)$ potrebbe non essere ben definita;
- ☐ $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$;

3.5 Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) > 0$. Allora

☐ si ha $f(y) > f(x)$ per ogni x, y in un intorno destro di x_0 con $y > x$;

☐ si ha $f(x) > f(x_0)$ per ogni x in un intorno sinistro di x_0;

☐ si ha $f'(x) > 0$ in un intorno destro di x_0;

☒ si ha $f(x) > f(x_0)$ per ogni x in un intorno destro di x_0;

3.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x - e^x)^2 + 1 - \cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x}{x^4}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{(1 + \frac{1}{x})^{x^2}}.$$

3.7 Si studi la funzione $f(x) = \sqrt{|\log(\tan x)|}$ e se ne tracci il grafico (non è richiesto lo studio della concavità/convessità, mentre è consigliato uno studio della periodicità e degli eventuali punti di discontinuità o di non derivabilità). Si deduca infine il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{|\log(|\tan x|)|}$

3.8 Si trovi una primitiva della funzione $f(x) = \frac{\arctan x}{x^2}$. Si studi anche, al variare del parametro α, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha}\, dx.$$

3.9 Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n})\right)(x + 3)^n.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 18/2/2010
Tipologia D

4.1 Si enuncino il principio di Fermat ed il teorema che permette di studiare i massimi e i minimi relativi tramite le derivate successive.

4.2 Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) > 0$. Allora

☐ si ha $f'(x) > 0$ in un intorno destro di x_0;

☐ si ha $f(x) > f(x_0)$ per ogni x in un intorno sinistro di x_0;

☒ si ha $f(x) > f(x_0)$ per ogni x in un intorno destro di x_0;

☐ si ha $f(y) > f(x)$ per ogni x, y in un intorno destro di x_0 con $y > x$;

4.3 Si consideri la funzione $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{3^k k}$. Nel punto $x = 4$ la funzione f

☒ non esiste;

☐ esiste ma non è né continua né derivabile;

☐ esiste, è continua e derivabile;

☐ esiste, è continua ma non derivabile;

4.4 L'integrale $\int_0^{10} e^{[x]}\, dx$ (ove $[x]$ denota la parte intera di x) vale

☐ $[e^{10} - 1]$;

☒ $\frac{e^{10}-1}{e-1}$;

☐ $e^{[10]} - 1$;

☐ nessuno dei precedenti;

4.5 Sia $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ la relativa funzione integrale. Allora

- ☒ $F(x)$ è ovunque continua in $[a,b]$;
- ☐ $F(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$;
- ☐ $F(x)$ potrebbe non essere ben definita;
- ☐ $F(x)$ è ovunque derivabile in $[a,b]$;

4.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x-e^x)^2 + 1 - \cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x}{x^4}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}.$$

4.7 Si studi la funzione $f(x) = \sqrt{|\log(\tan x)|}$ e se ne tracci il grafico (non è richiesto lo studio della concavità/convessità, mentre è consigliato uno studio della periodicità e degli eventuali punti di discontinuità o di non derivabilità). Si deduca infine il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{|\log(|\tan x|)|}$

4.8 Si trovi una primitiva della funzione $f(x) = \frac{\arctan x}{x^2}$. Si studi anche, al variare del parametro α, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha}\, dx.$$

4.9 Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n})\right)(x+3)^n.$$

Soluzioni:

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Usando gli sviluppi di Taylor di esponenziale, coseno e seno, si ricava facilmente che il numeratore del primo limite è $\frac{9}{24}x^4 + o(x^4)$. Il limite vale quindi 3/8.

7 La funzione $f(x)$ è periodica di periodo π, per cui è sufficiente studiarla nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Il dominio di f, intersecato con tale intervallo, è $(0, \pi/2)$ (condizione di esistenza del logaritmo). Agli estremi di tale intervallo aperto la funzione tende a $+\infty$. Inoltre, f è positiva e si annulla solo per $x = \pi/4$.

Notiamo poi che la funzione dentro il modulo è positiva in $(\pi/4, \pi/2)$, negativa in $(0, \pi/4)$. Spezzando la funzione in questi due intervalli, si vede subito che la derivata di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{|\log(\tan x)| \sin 2x}} & \textit{se } 0 < x < \pi/4, \\ \frac{1}{\sqrt{|\log(\tan x)| \sin 2x}} & \textit{se } \pi/4 < x < \pi/2, \end{cases}$$

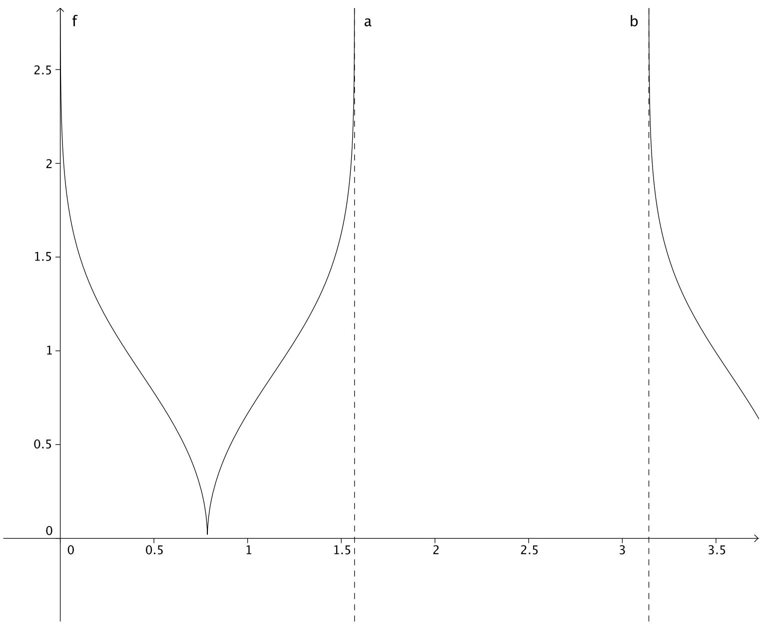
per cui f è decrescente in $(0, \pi/4)$ e crescente in $(\pi/4, \pi/2)$. Inoltre si ha

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^{\pm}} f'(x) = \pm\infty,$$

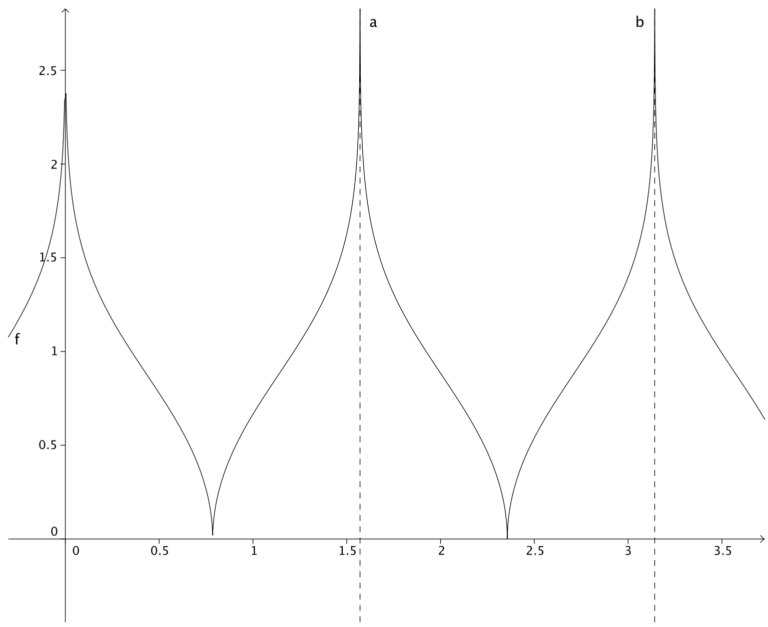
per cui si ha una cuspide in $x = \pi/4$ (punto di non derivabilità). Al contrario, la funzione è continua in tutti i punti del suo dominio.

Osserviamo infine, per fare un grafico più accurato, che $f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi/4$. Si ha infatti $f(x) = f(\pi/2 - x)$ su tutto il dominio (grazie al fatto che $\log(\tan(\pi/2 - x)) = \log(\operatorname{cotan} x) = \log(1/\tan x) = -\log(\tan x)$).

Il grafico di f è quindi come nella figura seguente:



La funzione g è poi π-periodica e pari, e coincide con f in $(0, \pi/2)$: il grafico è quindi come segue



8 Una primitiva di f si calcola facilmente utilizzando la formula di integrazione per parti:

$$\int \frac{\arctan x}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

L'ultimo integrale si calcola poi decomponendo la funzione razionale come segue:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Le primitive della funzione f sono dunque date da

$$-\frac{1}{x} \arctan x + \log \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Per lo studio dell'integrale improprio osserviamo che l'integranda è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ per $x \to 0$: se ne deduce che l'integrale converge per $\alpha < 2$, diverge per $\alpha \geq 2$.

9 Utilizzando lo sviluppo di Taylor del logaritmo si ottiene subito che

$$\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

Applichiamo allora il criterio del rapporto con questa forma semplificata dei coefficienti:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{2(n+1)^2} |x+3|^{n+1}}{\frac{1}{2n^2} |x+3|^n} = |x+3|.$$

La serie (di potenze) data converge allora per $|x+3| < 1$, cioè per $-4 < x < -2$, mentre non converge sulle semirette $x < -4$ e $x > -2$. Per $x = -2$ la serie è asintoticamente equivalente a $\sum \frac{1}{2n^2}$ e converge. Per lo stesso motivo, la serie converge assolutamente per $x = -4$. In conclusione, la serie data converge se e solo se $-4 \le x \le -2$.