Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 16/6/2010

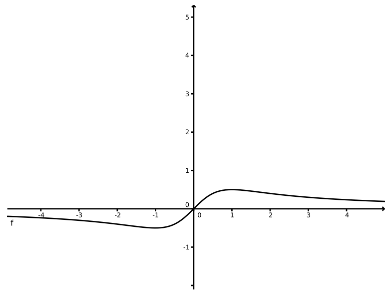
Tipologia A

1.1 Si dia la definizione di integrale improprio di una funzione continua $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ tra 0 e $+\infty$. Si spieghi, in particolare, cosa significa affermare che tale integrale improprio converge, diverge o è indeterminato.

1.2 Sia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e pari (cioè tale che $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-1, 1]$). Allora

- ☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = +\infty$;
- ☒ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{1} f(x)\, dx$;
- ☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 1$;
- ☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$;

1.3 Il grafico in figura rappresenta la derivata prima di una funzione regolare $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Se ne deduce che



- ☒ f ha uno e un solo punto di minimo;
- ☐ f è concava
- ☐ f è crescente;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

1.4 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte, $x \in \mathbf{R}$ un punto fissato, $x \neq 0$. Allora

- ☒ $\exists c \in \mathbf{R}$ tale che $\frac{f''(c)}{2} = \frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$;
- ☐ vale $\frac{f''(x)}{2} = \frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$;
- ☐ $\forall c \in \mathbf{R}$ vale $\frac{f''(c)}{2} = \frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

1.5 Il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-1}{x}$

- ☐ vale $\log 2$;
- ☐ vale 0;
- ☐ non esiste;
- ☒ vale $+\infty$;

1.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+2x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x) - 3\sin x + 3x - x^2}{\log(1+x^4)}.$$

1.7 Analizzandone eventualmente la derivata, si trovino l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione $g(x) = \cos^2 x - \log|\sin(x)|$, precisando se si tratta di minimo e/o massimo. Si studi poi la funzione $f(x) = \log^2|\sin x|$ e se ne tracci il grafico (il primo punto dell'esercizio può essere utile al fine dello studio della convessità di f).

1.8 Si calcoli l'integrale improprio $\int_0^{\pi/2} \log^2 x \, dx$. Si discuta poi la convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} \log^2|\sin(x)| \, dx.$$

1.9 Si studi la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n \log^{3/2} n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^2(1+nx^2)}.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 16/6/2010

Tipologia B

2.1 Si dia la definizione di integrale improprio di una funzione continua $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ tra 0 e $+\infty$. Si spieghi, in particolare, cosa significa affermare che tale integrale improprio converge, diverge o è indeterminato.

2.2 Sia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e pari (cioè tale che $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-1, 1]$). Allora

- ☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 1$;
- ☒ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{1} f(x)\, dx$;
- ☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = +\infty$;
- ☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$;

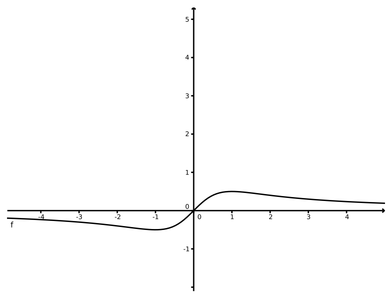
2.3 Il limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x}$

- ☐ non esiste;
- ☐ vale 0;
- ☐ vale $+\infty$;
- ☒ vale $\log 2$;

2.4 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte, $x \in \mathbf{R}$ un punto fissato, $x \neq 0$. Allora

- ☐ $\forall c \in \mathbf{R}$ vale $\frac{f''(c)}{2} = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}$;
- ☒ $\exists c \in \mathbf{R}$ tale che $\frac{f''(c)}{2} = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}$;
- ☐ vale $\frac{f''(x)}{2} = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

2.5 Il grafico in figura rappresenta la derivata seconda di una funzione regolare $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Se ne deduce che



- ☒ f è né concava né convessa;
- ☐ f è concava
- ☐ f ha uno e un solo punto di minimo;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

2.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+3x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x) - 3\sin x + 3x - x^2}{\sin x^4}.$$

2.7 Analizzandone eventualmente la derivata, si trovino l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione $g(x) = \cos^2 x - \log|\sin(x)|$, precisando se si tratta di minimo e/o massimo. Si studi poi la funzione $f(x) = \log^2|\sin x|$ e se ne tracci il grafico (il primo punto dell'esercizio può essere utile al fine dello studio della convessità di f).

2.8 Si calcoli l'integrale improprio $\int_0^{\pi/2} \log^2 x \, dx$. Si discuta poi la convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} \log^2|\sin(x)| \, dx.$$

2.9 Si studi la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n \log^{3/2} n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^2(1+nx^2)}.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 16/6/2010
Tipologia C

3.1 Si dia la definizione di integrale improprio di una funzione continua $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ tra 0 e $+\infty$. Si spieghi, in particolare, cosa significa affermare che tale integrale improprio converge, diverge o è indeterminato.

3.2 Il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-1}{x}$

☐ vale 0;

☐ non esiste;

☐ vale $\log 2$;

☒ vale $+\infty$;

3.3 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte, $x \in \mathbf{R}$ un punto fissato, $x \neq 0$. Allora

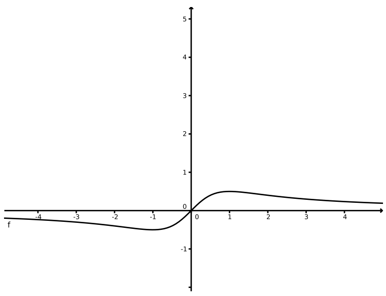
☐ $\forall c \in \mathbf{R}$ vale $\frac{f''(c)}{2} = \frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$;

☐ vale $\frac{f''(x)}{2} = \frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$;

☒ $\exists c \in \mathbf{R}$ tale che $\frac{f''(c)}{2} = \frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$;

☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

3.4 Il grafico in figura rappresenta la derivata prima di una funzione regolare $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Se ne deduce che



☒ f ha uno e un solo punto di minimo;

☐ f è crescente;

☐ f è concava

☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

3.5 Sia $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e pari (cioè tale che $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-1,1]$). Allora

☒ $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$;

☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$;

☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$;

☐ $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = +\infty$;

3.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+4x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x) - 3\sin x + 3x - x^2}{\log(1+x^4)}.$$

3.7 Analizzandone eventualmente la derivata, si trovino l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione $g(x) = \cos^2 x - \log|\sin(x)|$, precisando se si tratta di minimo e/o massimo. Si studi poi la funzione $f(x) = \log^2|\sin x|$ e se ne tracci il grafico (il primo punto dell'esercizio può essere utile al fine dello studio della convessità di f).

3.8 Si calcoli l'integrale improprio $\int_0^{\pi/2} \log^2 x\,dx$. Si discuta poi la convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} \log^2|\sin(x)|\,dx.$$

3.9 Si studi la convergenza delle serie

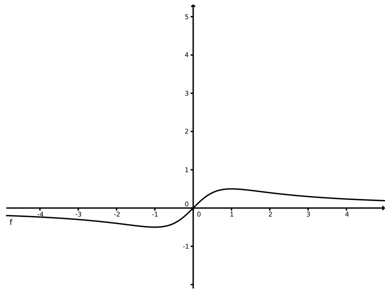
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n\log^{3/2} n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^2(1+nx^2)}.$$

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 16/6/2010
Tipologia D

4.1 Si dia la definizione di integrale improprio di una funzione continua $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ tra 0 e $+\infty$. Si spieghi, in particolare, cosa significa affermare che tale integrale improprio converge, diverge o è indeterminato.

4.2 Il grafico in figura rappresenta la derivata seconda di una funzione regolare $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Se ne deduce che



- ⊠ f non è né concava né convessa;
- □ f ha uno e un solo punto di minimo;
- □ f è concava
- □ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

4.3 Il limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x}$

- ⊠ vale $\log 2$;
- □ vale 0;
- □ vale $+\infty$;
- □ non esiste;

4.4 Sia $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e pari (cioè tale che $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in [-1, 1]$). Allora

- □ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 1$;
- ⊠ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{1} f(x)\, dx$;
- □ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = +\infty$;
- □ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$;

4.5 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte, $x \in \mathbf{R}$ un punto fissato, $x \neq 0$. Allora

- ☒ $\exists c \in \mathbf{R}$ tale che $\frac{f''(c)}{2} = \frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$;
- ☐ $\forall c \in \mathbf{R}$ vale $\frac{f''(c)}{2} = \frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$;
- ☐ vale $\frac{f''(x)}{2} = \frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$;
- ☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

4.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+5x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x) - 3\sin x + 3x - x^2}{\sin x^4}.$$

4.7 Analizzandone eventualmente la derivata, si trovino l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione $g(x) = \cos^2 x - \log|\sin(x)|$, precisando se si tratta di minimo e/o massimo. Si studi poi la funzione $f(x) = \log^2|\sin x|$ e se ne tracci il grafico (il primo punto dell'esercizio può essere utile al fine dello studio della convessità di f).

4.8 Si calcoli l'integrale improprio $\int_0^{\pi/2} \log^2 x \, dx$. Si discuta poi la convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} \log^2|\sin(x)| \, dx.$$

4.9 Si studi la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n \log^{3/2} n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^2(1+nx^2)}.$$

Soluzioni:

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

Per gli esercizi successivi, ci limitiamo a risolvere quelli del compito di tipologia A: per le altre tipologie le modifiche sono minime e cambiano solo il risultato numerico.

6 Vediamo il primo limite. La funzione può essere riscritta come segue:

$$\frac{\log(e^x(e^{-x}+1))}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}} = \frac{x+\log(e^{-x}+1)}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}} = \frac{1+\frac{\log(e^{-x}+1)}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+2}} \to 1/\sqrt{2} \text{ per } x \to +\infty.$$

Il calcolo del limite è pressoché immediato anche usando il teorema di l'Hôpital.

Per il secondo limite conviene usare gli sviluppi di Taylor: il denominatore è $x^4+o(x^4)$ (la cosa rimane vera anche per i compiti delle altre tipologie). Il numeratore invece, usando gli sviluppi di Taylor noti e semplificando, si vede essere uguale a $x^4/3+o(x^4)$: il limite vale dunque $1/3$.

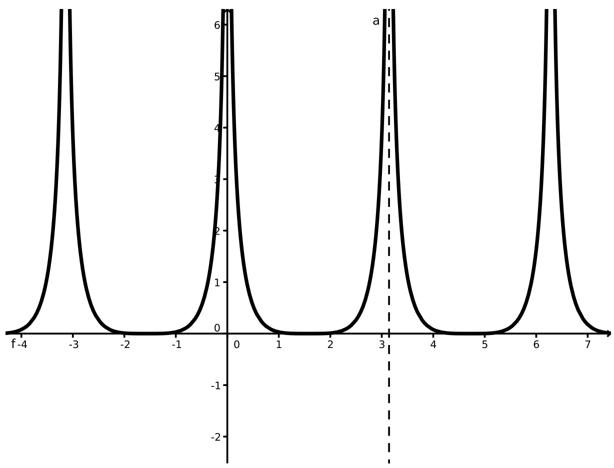
7 La funzione g è π-periodica (per cui la studiamo sull'intervallo $(0,\pi)$) e tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e per $x \to \pi^-$: l'estremo superiore è evidentemente $+\infty$ (e non cè massimo). La derivata prima è $g'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}(2\sin^2 x + 1)$. Siccome il fattore tra parentesi tonde è positivo e lo è anche il denominatore (sull'intervallo $(0,\pi)$ in esame), il segno della derivata è quello di $-\cos x$: cè un punto di minimo (assoluto) per $x = \pi/2$, di valore 0. Quindi $\inf g = \min g = 0$.

Veniamo allo studio della funzione f: anche questa è π-periodica, per cui la studiamo su $(0,\pi)$ (volendo, possiamo anche notare che è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi/2$). Inoltre f è non negativa e $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$, $x \to \pi^-$.

Si ha poi $f'(x) = 2\log|\sin x|\frac{\cos x}{\sin x}$. Sull'intervallo $(0,\pi)$ il logaritmo è ≤ 0, mentre $\sin x > 0$: il segno della derivata è quello di $-\cos x$ e si ha minimo per $x = \pi/2$, di valore 0.

Infine, $f''(x) = \frac{2}{\sin^2 x}(\cos^2 x - \log|\sin x|)$: grazie allo studio della funzione g fatto sopra, questa funzione è sempre ≥ 0 per cui f è convessa sull'intervallo $(0,\pi)$.

In conclusione, possiamo disegnare il grafico in figura:



8 Una primitiva di $\log^2 x$ si calcola facilmente integrando per parti due volte: risulta $x\log^2 x - 2x\log x + 2x$. L'integrale improprio è allora convergente e vale $\pi/2\log^2(\pi/2) - \pi\log(\pi/2) + \pi$. Il secondo integrale improprio è convergente perché per $x \to 0^+$ l'integranda è asintoticamente equivalente a $\log^2 x$.

9 La prima serie è una serie di potenze con raggio di convergenza 1/2 (lo si vede, ad esempio, con il cirterio del rapporto). Per $x = 1/2$ il termine generale della serie diventa $\frac{1}{n\log^{3/2} n}$. La relativa serie è convergente, come si vede usando il criterio integrale: l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log^{3/2} x}$ è infatti convergente (una primitiva è $-\frac{2}{\log^{1/2} x}$). Per $x = -1/2$ la serie converge assolutamente per lo stesso motivo. In conclusione, la prima serie converge per $x \in [-1/2, 1/2]$ e non converge al di fuori di questo intervallo.

Per quanto riguarda la seconda serie, basta osservare che il termine generale (non negativo) è maggiorato da $1/n^2$: la serie data converge per ogni $x \in \mathbf{R}$.