Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 13/11/2009
Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema di derivazione di funzioni composte.

1.2 Il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\log n}}{n}$

- ☒ vale 0;
- ☐ non esiste;
- ☐ vale 1;
- ☐ vale $+\infty$;

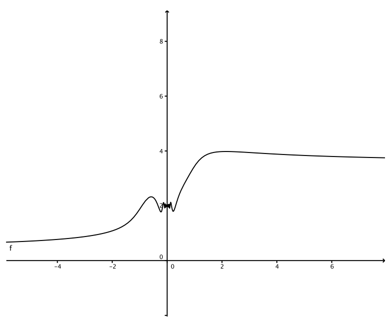
1.3 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, convessa e tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Allora

- ☐ f possiede uno ed un solo punto di minimo;
- ☐ f potrebbe non avere massimo né minimo in $\mathbf{R}$;
- ☐ f possiede uno ed un solo punto di massimo;
- ☒ f possiede almeno un punto di minimo, ma potrebbe averne molti;

1.4 Quale delle seguenti ipotesi implica che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è crescente in un intorno di x_0?

- ☒ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$ e f' continua in x_0;
- ☐ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$;
- ☐ f derivabile in x_0 con $f'(x_0) > 0$;
- ☐ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$ e f continua in un intorno di x_0;

1.5 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- $\square$ è decrescente;
- $\square$ ha un unico punto di massimo;
- $\square$ ha un unico punto di minimo;
- $\boxtimes$ è crescente;

1.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)\log x, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}\log x} + x\sin x}{3x^2+5x+e^{-x}}.$$

1.7 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{1+|\log|x||}{1+\log|x|},$$

e se ne disegni un grafico il più possibile dettagliato. *(SUGG.: Studiare dapprima la funzione* $g(x) = \frac{1+|\log x|}{1+\log x}\ldots$*)*.È possibile definire $f(0)$ in modo da ottenere una funzione continua e/o derivabile in 0?

1.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si consideri la funzione $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{se } x \leq 0, \\ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} & \textit{se } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \ n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Si discuta la continuità e la derivabilità di f in 0. *(SUGGERIMENTO: può essere utile mostrare che per* $x \in [0,1]$ *si ha* $\frac{x(1+2x)}{(1+x)^2} \leq f(x) \leq x + x^2$*.)*
ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 13/11/2009
Tipologia B

2.1 Si enunci il teorema di derivazione di funzioni composte.

2.2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, convessa e tale che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Allora

- ☐ f possiede uno ed un solo punto di minimo;
- ☐ f possiede uno ed un solo punto di massimo;
- ☐ f possiede almeno un punto di minimo, ma potrebbe averne molti;
- ☒ f potrebbe non avere massimo né minimo in $\mathbf{R}$;

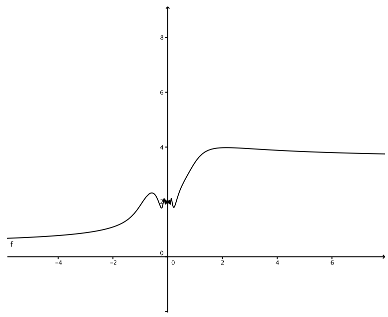
2.3 Il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{2^{\log n}}{n}$

- ☐ vale $+\infty$;
- ☐ non esiste;
- ☐ vale 1;
- ☒ vale 0;

2.4 Quale delle seguenti ipotesi implica che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è crescente in un intorno di x_0?

- ☐ f derivabile in x_0 con $f'(x_0) > 0$;
- ☒ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$ e f' continua in x_0;
- ☐ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$ e f continua in un intorno di x_0;
- ☐ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$;

2.5 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- $\square$ ha due flessi;
- $\boxtimes$ è convessa;
- $\square$ è concava;
- $\square$ ha un unico flesso;

2.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)}{x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \log\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)\log x, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{3}{2}\log x}+x\sin x}{3x^2+5x+e^{-x}}.$$

2.7 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{2+|\log|x||}{1+\log|x|},$$

e se ne disegni un grafico il più possibile dettagliato. *(SUGG.: Studiare dapprima la funzione* $g(x) = \frac{2+|\log x|}{1+\log x}\ldots$*)*.È possibile definire $f(0)$ in modo da ottenere una funzione continua e/o derivabile in 0?

2.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si consideri la funzione $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{se } x \leq 0, \\ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} & \textit{se } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\ n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Si discuta la continuità e la derivabilità di f in 0. *(SUGGERIMENTO: può essere utile mostrare che per* $x \in [0,1]$ *si ha* $\frac{x(1+2x)}{(1+x)^2} \leq f(x) \leq x + x^2$*.)*

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 13/11/2009

Tipologia C

3.1 Si enunci il teorema di derivazione di funzioni composte.

3.2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, convessa e tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Allora

☐ f potrebbe non avere massimo né minimo in $\mathbf{R}$;

☐ f possiede uno ed un solo punto di minimo;

☒ f possiede almeno un punto di minimo, ma potrebbe averne molti;

☐ f possiede uno ed un solo punto di massimo;

3.3 Il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\log n}}{n}$

☐ vale 1;

☐ vale $+\infty$;

☐ non esiste;

☒ vale 0;

3.4 Quale delle seguenti ipotesi implica che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è crescente in un intorno di x_0?

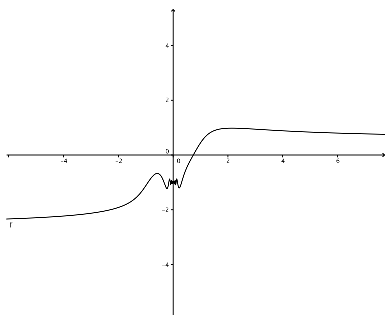
☐ f derivabile in x_0 con $f'(x_0) > 0$;

☐ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$;

☐ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$ e f continua in un intorno di x_0;

☒ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$ e f' continua in x_0;

3.5 La seguente figura mostra la derivata prima di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- $\square$ è decrescente;
- $\square$ ha un unico punto di massimo;
- $\boxtimes$ ha un unico punto di minimo;
- $\square$ è crescente;

3.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\right)}{x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \log\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\right)\log x, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2\log x}+x\sin x}{3x^2+5x+e^{-x}}.$$

3.7 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{1+|\log|x||}{1-\log|x|},$$

e se ne disegni un grafico il più possibile dettagliato. *(SUGG.: Studiare dapprima la funzione* $g(x) = \frac{1+|\log x|}{1-\log x}\ldots$).È possibile definire $f(0)$ in modo da ottenere una funzione continua e/o derivabile in 0?

3.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si consideri la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{se } x \le 0, \\ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} & \textit{se } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Si discuta la continuità e la derivabilità di f in 0. *(SUGGERIMENTO: può essere utile mostrare che per* $x \in [0, 1]$ *si ha* $\frac{x(1+2x)}{(1+x)^2} \le f(x) \le x + x^2$.)

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 13/11/2009
Tipologia D

4.1 Si enunci il teorema di derivazione di funzioni composte.

4.2 Quale delle seguenti ipotesi implica che $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è crescente in un intorno di x_0?

☐ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$;

☐ f derivabile in x_0 con $f'(x_0) > 0$;

☒ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$ e f' continua in x_0;

☐ f derivabile in un intorno di x_0 con $f'(x_0) > 0$ e f continua in un intorno di x_0;

4.3 Il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\log n}}{n}$

☒ vale 0;

☐ vale $+\infty$;

☐ non esiste;

☐ vale 1;

4.4 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile, convessa e tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Allora

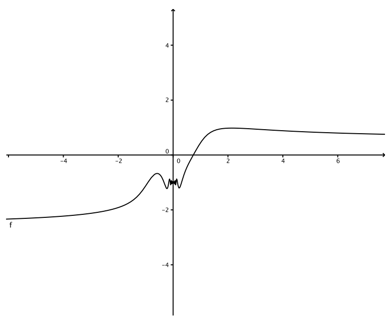
☐ f potrebbe non avere massimo né minimo in $\mathbf{R}$;

☒ f possiede almeno un punto di minimo, ma potrebbe averne molti;

☐ f possiede uno ed un solo punto di massimo;

☐ f possiede uno ed un solo punto di minimo;

4.5 La seguente figura mostra la derivata seconda di una certa funzione f:



La funzione f, nell'intervallo mostrato dal grafico

- ⊠ ha un unico flesso;
- □ è convessa;
- □ ha due flessi;
- □ è concava;

4.6 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}\right)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}\right)\log x, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3\log x}+x\sin x}{3x^2+5x+e^{-x}}.$$

4.7 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{2+|\log|x||}{1-\log|x|},$$

e se ne disegni un grafico il più possibile dettagliato. *(SUGG.: Studiare dapprima la funzione* $g(x) = \frac{2+|\log x|}{1-\log x} \ldots$*).* È possibile definire $f(0)$ in modo da ottenere una funzione continua e/o derivabile in 0?

4.8(ESERCIZIO FACOLTATIVO) Si consideri la funzione $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{se } x \le 0, \\ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} & \textit{se } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}],\ n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Si discuta la continuità e la derivabilità di f in 0. *(SUGGERIMENTO: può essere utile mostrare che per* $x \in [0,1]$ *si ha* $\frac{x(1+2x)}{(1+x)^2} \le f(x) \le x+x^2$*.)*

ATTENZIONE: Il punteggio massimo raggiungibile *senza* svolgere l'esercizio facoltativo è 28/30. Nella correzione, verrà valutata la soluzione dell'esercizio facoltativo, *purché* almeno 3 dei primi 5 esercizi siano corretti.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Il primo limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$: lo si calcola facilmente usando la regola di l'Hôpital, oppure con gli sviluppi di Taylor. Per esempio, usando l'Hôpital:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot \frac{4xe^{2x} - 2(e^{2x}-1)}{4x^2}.$$

La prima frazione tende a 1 per un ben noto limite fondamentale. La seconda si presenta ancora nella forma $0/0$, per cui possiamo riapplicare l'Hôpital: il limite richiesto è allora uguale a

$$\lim_{x\to0^+} \frac{4e^{2x} + 8xe^{2x} - 4e^{2x}}{8x} = 1.$$

Nei compiti di tipologia B,C,D cambiava solo il valore numerico del limite...

Il secondo limite si calcola facilmente utilizzando il primo: la funzione coinvolta è quella del primo limite moltiplicata per $x \log x$. Siccome il primo limite assume un valore finito, mentre $\lim_{x\to0^+} x\log x = 0$, il limite richiesto vale 0.

Anche il terzo limite si calcula facilmente se si osserva che $e^{\frac{1}{2}\log x} = x^{\frac{1}{2}}$: dividendo numeratore e denominatore per x^2 si ottiene subito che il limite voluto vale 0 (si noti che $\frac{\sin x}{x} \to 0$: abbiamo il rapporto tra una funzione limitata ed una funzione che diverge all'infinito). Nei compiti delle tipologie B, C, D il trucco da usare è lo stesso, ma il valore del limite è rispettivamente $0, 1/3, +\infty$.

7 La funzione da studiare è pari, per cui è sufficiente studiarla per $x > 0$: in altre parole, è sufficiente studiare la funzione nel suggerimento! Osservando poi che il logaritmo è negativo nell'intervallo $(0, 1)$, possiamo esplicitare

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\log x}{1+\log x} & se\ 0 < x < 1 \\ 1 & se\ x > 1 \end{cases}$$

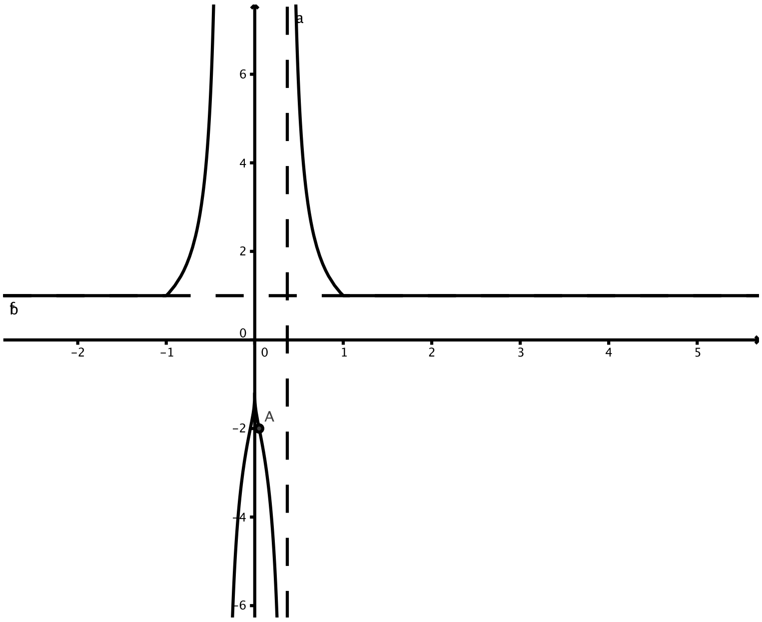
Questa funzione tende a -1 per $x \to 0^+$ mentre tende a $\mp\infty$ per $x \to (1/e)^\pm$ (asintoto verticale). Nell'intervallo $(0, 1)$ si ha $f'(x) = \frac{-2}{x(1+logx)^2}$, sempre negativa. Per $x > 1$, la derivata è ovviamente nulla. 1 è un punto angoloso (si confrontino derivata destra e sinistra), mentre per $x \to 0^+$ la derivata tende a $+\infty$.

Sempre nell'intervallo $(0, 1)$ abbiamo

$$f''(x) = \frac{2}{x^2(1+\log x)^4}(\log^2 x + 4\log x + 3) :$$

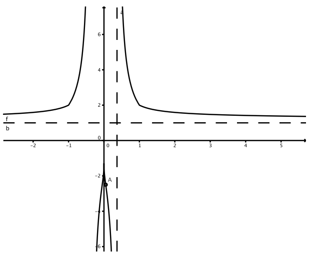
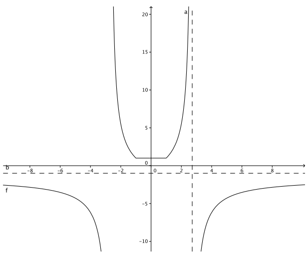
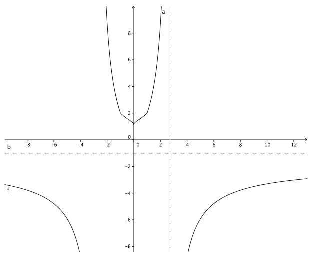
cambia di segno per $x = e^{-3}$ (flesso) e per $x = e^{-1}$ (asintoto verticale).

Il grafico di f è dunque il seguente:



Evidentemente la funzione puó essere prolungata ad una funzione continua in 0, ponendo $f(0) = -1$. Tale funzione non è però derivabile: prima abbiamo fatto il limite della derivata per $x \to 0^+$, e abbiamo visto che viene una cuspide!

Nelle altre versioni del compito le tecniche da usare erano esattamente le stesse, ma la funzione aveva un aspetto nettamente diverso: ecco i grafici!

Si noti che nei compiti di tipologia C si può prolungare f ottenendo una funzione derivabile in 0 (e costante in un intorno di tale punto!).

8 Tra $1/(n+1)$ e la funzione data è costante: il suo grafico è un segmento orizzontale i cui estremi giacciono proprio sui grafici delle funzioni indicate nel suggerimento, che si verifica facilmente sono crescenti. Dunque f, nell'intervallo $[0,1]$, è compresa tra le funzioni $g(x) = \frac{x(1+2x)}{(1+x)^2}$ e $h(x) = x + x^2$: queste due funzioni sono continue e derivabili, e valgono entrambe 0 in 0. Ne deduciamo che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. Anche il limite sinistro vale 0, da cui la continuità di f in 0.

Usando ancora il fatto che $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, si ottiene subito che per $h > 0$ vale

$$\frac{1+2h}{(1+h)^2} \leq \frac{f(h) - f(0)}{h} \leq h + 1.$$

Passando al limite per $h \to 0^+$ otteniamo che la derivata destra di f in 0 vale 1. Anche la derivata sinistra assume ovviamente lo stesso valore, per cui la funzione è derivabile in 0 con derivata 1.

Ecco un grafico approssimato della funzione f: