Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 9/7/2010
Tipologia A

1.1 Si enunci il criterio di Leibniz per la convergenza delle serie numeriche.

1.2 Supponiamo di sapere che $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ è continua e che $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$. Allora di sicuro

- ☐ esiste $x_0 \in (0,1)$ tale che $f'(x_0) = 0$;
- ☐ l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$ non esiste;
- ☐ f è concava;
- ☒ esiste $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x_0) = \pi - e$;

1.3 Se sappiamo che $f(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$, allora certamente

- ☒ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$;
- ☐ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \infty$;
- ☐ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^5} = 0$;
- ☐ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^5} = \infty$;

1.4 La funzione $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$ ha un dominio costituito da punti isolati. Allora

- ☐ f non è né continua né derivabile nel suo dominio;
- ☒ f è continua ma non derivabile nel suo dominio;
- ☐ f è continua e derivabile nel suo dominio;
- ☐ f è derivabile ma non continua nel suo dominio;

1.5 L'integrale $\int_{-5}^{5} \sin(x^3)\, dx$

- ☐ vale $1/3$;
- ☐ non esiste;
- ☒ vale 0;
- ☐ vale 1;

1.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x) - x + 1 - \cos x}{\tan^3 x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3(1+e^{\sqrt{\log^2 x+1}})}{\sqrt{2+x^8}}.$$

1.7 Si studi il più dettagliatamente possibile la funzione $f(x) = \tan(1+\log x)$ e se ne tracci un grafico nell'intervallo $(e^{\frac{\pi}{2}-1}, e^{\frac{3\pi}{2}-1})$. Si trovino poi estremo inferiore ed estremo superiore di f sull'intervallo $(0,\delta]$, con $\delta > 0$ fissato.

1.8 Si studi, al variare del parametro reale x, la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n \log^2 n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n})\right)^{2/3} x^n.$$

Soluzioni:

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Per calcolare il primo limite, usiamo gli sviluppi di Taylor di $\sin x$, $\cos x$ e $\log(1+x)$ (arrestati al terzo ordine): troviamo facilmente che $\log(1+\sin x) - x + 1 - \cos x = x^3/6 + o(x^3)$. D'altra parte, $\tan^3 x = x^3 + o(x^3)$. Il limite richiesto vale quindi $1/6$.

Scriviamo il secondo limite nella forma seguente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{2+x^8}} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{e^{\sqrt{\log^2 x+1}}}{x}\right).$$

La frazione di sinistra tende a 1, mentre $1/x$ tende a 0. Il limite richiesto è quindi uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{\log^2 x+1}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{\log^2 x+1}}}{e^{\log x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{\log^2 x+1}-\log x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{1+\log^2 x}+\log x}} = 1.$$

7 Troviamo il dominio di f: innanzitutto deve essere $x > 0$ per l'esistenza del logaritmo. Inoltre dobbiamo avere $1 + \log x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ossia $x \neq e^{\frac{\pi}{2}+k\pi-1}$ (con k intero). Notiamo che questi punti che non fanno parte del dominio si accumulano verso 0 (per $k \to -\infty$) e divergono a $+\infty$ (per $k \to +\infty$). L'intervallo in cui si chiede di studiare la funzione appartiene tutto al dominio. Inoltre, la funzione tende a $-\infty$ per $x \to (e^{\frac{\pi}{2}-1})^+$ e a $+\infty$ per $x \to (e^{\frac{3\pi}{2}-1})^-$.

La stessa identica cosa succede su tutti gli intervalli del tipo $(e^{\frac{pi}{2}+k\pi-1}, e^{\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi-1})$. Questo permette subito di rispondere alla seconda domanda dell'esercizio: l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f in qualunque intervallo del tipo $(0,\delta]$ saranno rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$.

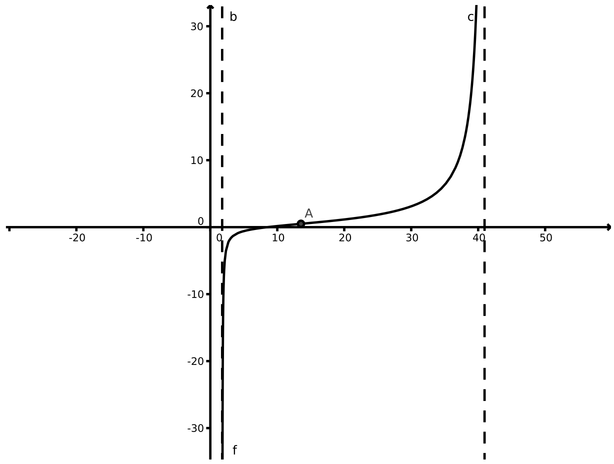
Si ha poi $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(1+\log x)}\frac{1}{x}$, sempre positiva nell'intervallo dato. Dunque f è ivi crescente, come si poteva desumere anche osservando che f è composizione di due funzioni crescenti sull'intevallo di interesse.

Per quanto riguarda la derivata seconda, si ottiene

$$f''(x) = \frac{2\sin(1+\log x) - \cos(1+\log x)}{x^2\cos^3(1+\log x)},$$

che si annulla (nell'intervallo dato) per $x = e^{\arctan(1/2)+\pi-1}$, punto di flesso.

Per completare la discussione, osserviamo infine che la funzione si annulla per $(1 + \log x) = \pi$, ossia per $x = e^{\pi-1}$. Il grafico richiesto è in figura:



8 Per la prima serie usiamo il principio del confronto: $\frac{|\sin x|^n}{n\log^2 n} \leq \frac{1}{n\log^2 n}$. La serie $\sum \frac{1}{n\log^2 n}$ converge grazie al criterio integrale, per cui anche la serie data converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Per la seconda serie, osserviamo preliminarmente che

$$\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

Da questo fatto e dal criterio del rapporto si deduce subito che la serie (di potenze) data ha raggio di convergenza 1. Inoltre, per $x = 1$ la serie è asintoticamente equivalente a $\sum \frac{1}{2n^2}$, che converge. Anche per $x = -1$ si ha quindi convergenza assoluta. In conclusione, la seconda serie converge (assolutamente) per $x \in [-1, 1]$.