Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1 Mod. 1 - 6/9/2010

Tipologia A

1.1 Si enunci il teorema di Taylor con resto di Lagrange.

1.2 Se sappiamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$ allora

☐ $\{a_n\}$ potrebbe essere di Cauchy, ma non è detto;

☒ $\{a_n\}$ è certamente di Cauchy;

☐ $\{a_n\}$ non è certamente di Cauchy;

☐ $\sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\} = 3$;

1.3 Quale delle seguenti affermazioni (relative a due funzioni $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$) è falsa?

☐ Se f e g sono derivabili, allora $f + g$ è derivabile;

☒ Se $(f + g)$ è derivabile, allora f e g sono derivabili;

☐ Se f e g sono derivabili, allora $f \cdot g$ è derivabile;

☐ Se f e g sono derivabili, allora $\sin(f + g)$ è derivabile;

1.4 Se $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ è convessa e derivabile e $f'(0) \geq 0$, allora di sicuro

☒ f è crescente;

☐ f è decrescente;

☐ f è positiva;

☐ f è negativa;

1.5 Se sappimo che $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ allora possiamo dire che

- ☐ $f(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$;
- ☐ $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$;
- ☐ $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0,1]$;
- ☒ nessuna delle risposte precedenti è corretta;

1.6 Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \log(1+x)^{\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \ \log(\cos x + \sin^2 x)}{\sin(\sin x^3)}.$$

[Osservazione: *nelle mie pie intenzioni il primo limite doveva essere il meno banale*

$$\lim_{x\to 0^+} (\log(1+x))^{\sin x} \ldots$$

solo che ho dimenticato le parentesi!]

1.7 Si studi il più dettagliatamente possibile la funzione

$$f(x) = \arctan(1/x) - \arctan(x) + x$$

e se ne disegni il grafico.

1.8 Si studi la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^\pi \frac{sinx}{\sqrt{1+\cos x}}\ dx$ e se ne determini eventualmente il valore.

1.9 Si studi, al variare del parametro reale x, la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^{3n}}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\log(1+e^{n^2})} x^n.$$

Soluzioni:

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Il primo limite, a seguito del mio errore spiegato nel testo, è banalmente $\log(1^0) = 0$.

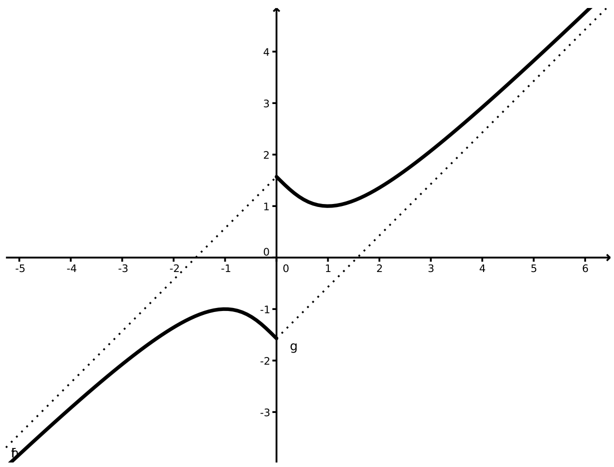
Il secondo limite si calcola facilmente usando gli sviluppi di Taylor: $\sin x = x + o(x)$, $\log(\cos x + \sin^2 x) = \log(1 - x^2/2 + o(x^2) + (x + o(x))^2) = \log(1 + x^2/2 + o(x^2)) = x^2/2 + o(x^2)$, $\sin(\sin x^3) = x^3 + o(x^3)$: il limite dato vale $1/2$.

7 La funzione data è definita per $x \neq 0$ e si ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$.

La derivata prima è $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ per cui si ha un massimo per $x = -1$ e un minimo per $x = 1$. Inoltre, $f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$, per cui f è convessa per $x > 0$, concava per $x < 0$.

Volendo, possiamo anche osservare che per $x \to +\infty$ la funzione si avvicina asintoticamente alla retta $y = x - \pi/2$, per $x \to -\infty$ alla retta $y = x + \pi/2$.

In conclusione, il grafico è come nella seguente figura:



8 L'integranda si presenta nella forma $0/0$ per $x \to \pi^-$. D'altra parte, si vede facilmente che tale limite vale $\sqrt{2}$, per cui la funzione è limitata e continua nell'intervallo considerato e l'integrale improprio converge. Inoltre, una primitiva della funzione integranda è $-2\sqrt{1 + \cos x}$: l'integrale assegnato vale $2\sqrt{2}$.

9 Per la prima serie possiamo usare il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{|\sin x|^{3n}}{n}} \to |\sin x|^{3n},$$

per cui la serie converge assolutamente per $x \neq \pi/2 + k\pi$. Se $x = \pi/2 + 2k\pi$, la serie si riduce alla serie armonica e diverge a $+\infty$. Per $x = 3/2\pi + 2k\pi$, la serie converge per Leibniz (serie armonica a segni alterni). In conclusione, l'insieme di convergenza della serie è $x \neq \pi/2 + 2k\pi$.

La seconda serie è una serie di potenze i cui coefficienti sono asintoticamente equivalenti a $1/n^2$. Studiando quest'ultima serie, si vede subito che l'insieme di convergenza è l'intervallo (chiuso) $[-1, 1]$.