PROVE PARZIALI DEL CORSO DI ANALISI FUNZIONALE
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2009 - 2010

SISTO BALDO, GIANDOMENICO ORLANDI E ANTONIO MARIGONDA

1. Prima prova parziale

Esercizio 1. Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente di insiemi misurabili secondo Lebesgue, cioè $E_{n+1} \subset E_n$. Si provi che se E_1 ha misura finita, allora $m(\bigcap E_n) = \lim m(E_n)$. Mostrare con un esempio che l'enunciato può essere falso quando $m(E_1) = \infty$.

Esercizio 2. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile secondo Lebesgue, g funzione continua definita su $\mathbb{R}$. Dimostrare che:

(1) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ è misurabile.
(2) $g \circ f$ è misurabile.

Esercizio 3. Dimostrare che un insieme E è misurabile secondo Lebesgue se e solo se la sua funzione caratteristica χ_E è misurabile.

Esercizio 4. Si provi il *Lemma di Riemann-Lebesgue*: data $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\alpha t}\,dt = 0.$$

Esercizio 5. Sia $g_k(x) = \dfrac{k/\pi}{1+k^2x^2}$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Si verifichi che:

(1) $g_k > 0$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_k(x)\,dx = 1$;
(2) per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che g_k converge uniformemente a zero su $\{x : |x| > \varepsilon\}$;
(3) per ogni funzione continua e limitata f vale

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(x)f(x)\,dx = f(0).$$

Esercizio 6. Si dica per quali valori $\alpha > 0$ è sommabile su $[0, +\infty[$ la funzione

$$F_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha + k^\alpha}.$$

Esercizio 7. Per ogni $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ sia $f_k(x) = k^3(x-k)^2\chi_{[k-1/k,k+1/k]}(x)$. Verificare che f_k converge uniformemente a zero sui compatti di $\mathbb{R}$, tuttavia

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \neq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx.$$

Esercizio 8. Si provi che per $1 \le p < r < \infty$ si ha $\ell^p \subset \ell^r \subset \ell^\infty$ con inclusione propria.

Esercizio 9. $c_{00} \subset \ell^p$ con inclusione propria, e c_{00} è denso in ℓ^p rispetto alla norma di ℓ^p.

Esercizio 10. $\ell^p \subset c_0 \subset \ell^\infty$ con inclusioni proprie e c_0 è la chiusura di c_{00} rispetto alla norma di ℓ^∞.

Esercizio 11. Sia $\{(x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\}$ una successione in ℓ^p convergente a $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in ℓ^p. Si dica, motivando la risposta, se tale successione converge a $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in ℓ^∞.

Esercizio 12.
Si provino i seguenti fatti:
(1) Il duale di ℓ^1 è ℓ^∞.
(2) Il duale di ℓ^∞ contiene ℓ^1. Vale l'uguaglianza?

Esercizio 13. Sia (X, Σ, μ) uno spazio con misura. Sia $f \in L^p(X)$, ovvero $\displaystyle\int_X |f|^p\, d\mu < +\infty$. Si provi la Disuguaglianza di Chebyshov: per ogni $\alpha > 0$, posto $X_\alpha = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$, si ha:

$$\mu(X_\alpha) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\alpha}\right)^p.$$

Esercizio 14. Sia (X, Σ, μ) uno spazio con misura, $p_0 \geq 1$. Supponiamo che $f : X \to \mathbb{C}$ sia misurabile e che $f \in L^p(X)$ per ogni $p > p_0$. Si provi che esiste (finito o infinito) il $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}$ e si ha $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

Esercizio 15. Sia $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fissato e si consideri il sottospazio vettoriale G di $\mathbb{R}^2$ definito da $G = \mathbb{R} \times \{0\}$. Si consideri su $\mathbb{R}^2$ la norma $\|\cdot\|_p$ definita per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ da

$$\|(x_1, x_2)\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} \text{ se } 1 \leq p \leq \infty, \\ \max\{|x_1|, |x_2|\} \text{ se } p = \infty. \end{cases}$$

Si consideri il funzionale $T : (G, \|\cdot\|_p) \to \mathbb{R}$ definito da $T(x_1, 0) = \alpha x_1$. Si descrivano le estensioni lineari e continue $\tilde{T}$ di T a tutto lo spazio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ che abbiano la stessa norma di T.

Esercizio 16. Sia X spazio normato, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora f è s.c.i. se e solo se epi(f) è chiuso in $X \times \mathbb{R}$, inoltre f è s.c.i. se e solo se $-f$ è s.c.s.

Esercizio 17. Sia X uno spazio vettoriale normato. $C \subseteq X$ un insieme convesso non vuoto. Si provi che $\bar{C}$ è convesso e $\text{int}(C)$ è convesso se non vuoto. Inoltre $\bar{C} = \overline{\text{int}(C)}$ se $\text{int}(C) \neq \emptyset$.

Esercizio 18. Sia X è spazio vettoriale e $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è famiglia arbitraria di convessi, $C = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$. Allora se $C \neq \emptyset$ si ha che C è convesso.

Esercizio 19. Sia X normato, G sottospazio di X, $g : G \to \mathbb{R}$ lineare e continua. Allora l'insieme:

$$F := \{\tilde{f} : X \to \mathbb{R} \text{ lineare e continua tale che } \tilde{f}_{|G} = f \text{ e } \|\tilde{f}\| = \|f\|\}$$

è convesso. In particolare, se g ammette due estensioni, allora ne ammette infinite.

Esercizio 20. Sia X normato. Si mostri con un esempio che in generale, dato $p \in X'$, può non esistere $q \in B := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ tale per cui $\|p\|_{X'} = p(q)$.

Esercizio 21. Sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una funzione tale per cui per ogni $x\in[0,1]$ esiste ed è finito

$$\lim_{y\to x} f(y).$$

Dimostrare che l'insieme di discontinuità di f è al più numerabile. Sia poi $A\subset[0,1]$ un insieme numerabile; fare un esempio di funzione $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ che soddisfa la proprietà precedente, che è discontinua in A e continua in $[0,1]\setminus A$.

Esercizio 22. Sia X uno spazio di Banach, $C\subset X$ un insieme convesso e fortemente chiuso (cioè chiuso nella topologia indotta dalla norma). Allora C è debolmente sequenzialmente chiuso: se $\overline{x}\in X$ è limite debole di una successione a valori in C, allora $\overline{x}\in C$.

Esercizio 23. Se X è uno spazio di Banach e $F:X\to\mathbf{R}$ è una funzione convessa e continua, allora F è (sequenzialmente) debolmente semicontinua inferiormente: per ogni successione $x_n\rightharpoonup\overline{x}$ si ha $F(\overline{x})\leq\liminf\limits_{n\to+\infty}F(x_n)$.

Esercizio 24. Se X è uno spazio di Banach riflessivo, C un convesso chiuso non vuoto e $x_0\in X$, mostrare che esiste un elemento di C di distanza minima da x_0. Tale elemento è necessariamente unico?

2. Seconda prova parziale

Esercizio 25. Sia H spazio di Hilbert, K sottinsieme di H chiuso convesso non vuoto, $\pi_K(x)$ la proiezione di $x\in X$ su K. Si provi che:

(1) dato $x\in H$, vale la seguente caratterizzazione:

$$\{\pi_K(x)\}=\{y\in K:\langle x-y,z-y\rangle_H\leq 0\text{ per ogni }z\in K\};$$

(2) la mappa $x\mapsto\pi_K(x)$ è Lipschitziana di costante 1;
(3) K possiede un unico elemento di norma minima.
(4) Se $V\subseteq H$ è un sottospazio chiuso di H, allora

$$\{\pi_K(x)\}=\{y\in V:\langle x-y,v\rangle_H=0\text{ per ogni }v\in V\};$$

e inoltre π_V è lineare.

Esercizio 26. Sia H uno spazio di Hilbert, S un sottinsieme non vuoto di H.

(1) Si enunci la definizione di $S^\perp$.
(2) Si dica chi è $S^\perp$ nel caso $H=\ell^2$ e S definito da:
 (a) $S=T_1(H)$, dove $T_1(x_1,x_2,...,x_n,...)=(0,\frac{x_2}{2},0,\frac{x_4}{4},0,...)$.
 (b) $S=T_2(H)$, dove $T_2(x_1,x_2,...,x_n,...)=(x_1,\frac{x_2}{2},x_3,\frac{x_4}{4},...)$.
 (c) $S=T_3(H)$, dove $T_3(x_1,x_2,...,x_n,...)=(0,x_1,x_2,...,x_{n-1},...)$.
 (d) $S=\{x\in\ell^2:\|x\|_{\ell^2}=1\}$.
 Le risposte vanno giustificate.

Esercizio 27. Sia u_n una base di Hilbert di spazio di Hilbert H. Sia v_n una successione ortonormale tale che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}||u_n-v_n||_H^2<1$$

Si provi che anche v_n è una base di Hilbert.

Esercizio 28. Risolvere il seguente problema agli autovalori
$$\int_0^{2\pi} \cos(x+t)u(t)dt - \lambda u(x) = 0.$$

Esercizio 29. Sia $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ l'operatore lineare definito ponendo
$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad x \in [0,1].$$

(1) Calcolare esplicitamente l'operatore aggiunto V^*;
(2) calcolare esplicitamente l'operatore V^*V;
(3) verificare che V, V^* e V^*V sono compatti.

Esercizio 30. Sia $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ l'operatore lineare definito ponendo
$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad x \in [0,1].$$
Si consideri l'operatore aggiunto V^* e l'operatore V^*V le cui espressioni sono date da:
$$V^*(g)(t) = \int_t^1 g(x)\,dx, \qquad V^*V(f)(x) = \int_x^1 \left(\int_0^t f(s)\,ds\right)\,dt.$$

(1) Determinare tutte le autofunzioni dell'operatore V^*V;
(2) provare che $\|V\| \geq 2/\pi$;
(3) è vero che $\|V\| = 2/\pi$?

Esercizio 31. Si consideri la seguente equazione differenziale con condizioni al contorno di tipo Neumann:
$$-D\left(\frac{u'}{x^2+1}\right) + u = e^x, \qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$
Si stabilisca se il problema ammette un'unica soluzione e in caso affermativo la si caratterizzi come minimo di un opportuno funzionale integrale.

Esercizio 32. Si provi che per $|\lambda| > 1$ l'equazione integrale nell'incognita $f \in C^0([0,1])$
$$\int_0^1 e^{-st} f(t)dt - \lambda f(s) = g(s)$$
ha soluzione per ogni $g \in C^0([0,1])$ assegnata.

Esercizio 33. Sia $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ l'operatore definito da:
$$Tf(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\,ds, \qquad k(t,s) = \min\{t,s\}.$$
Si provi che $L^2(0,1)$ ha una base costituita da autofunzioni di T. Considerando l'operatore $Af = -f''$ definito su $D_A = \{f \in H^2(0,1) : f(0) = f'(1) = 0\}$, si trovi una tale base.

Esercizio 34. Consideriamo l'equazione integrale per $\lambda \neq 0$:
$$\lambda u(t) - (Tu)(t) = f(t),$$
dove
$$(Tu)(t) = \int_0^1 k(t,s)u(s)\,ds, \qquad k(t,s) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\psi_i(s),$$

con $\varphi_1, ..., \varphi_n$ linearmente indipendenti in L^2. Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{C}$ l'equazione ammette soluzione per ogni $f \in L^2(0,1)$ e per tali valori si scriva esplicitamente la soluzione.

Esercizio 35. Si consideri in $L^2(0,\pi)$ l'operatore di Sturm-Liouville $A : D_A \subset L^2 \to L^2$ definito da $Au = -u''$ dove

$$D_A = \{u \in H^2(0,\pi) : u(0) + u'(0) = 0,\ u(\pi) + u'(\pi) = 0\}.$$

(1) Si determinino gli autovalori di A;
(2) Si determini la funzione di Green $k(t,s)$ dell'operatore;
(3) Si determini lo spettro di

$$Tf(t) = \int_0^\pi k(t,s)f(s)\,ds,$$

e si scriva T in forma diagonale.

Esercizio 36. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente sommabile su $\mathbb{R}$ e tale che:

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^2} \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

(1) Provare che esiste una successione $h_n \to 0^+$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x + h_n) - f(x)|}{h_n}\,dx = 0.$$

(2) Dedurre che f è una funzione costante quasi ovunque.

[Suggerimento: si consideri la convoluzione $\frac{1}{h}\rho_h * f$ dove ρ_h è la funzione caratteristica di $[-h, 0]$, $h > 0$.]

Esercizio 37. Sia $N \geq 2$, $f \in C^1([0,+\infty[)$ e poniamo $u(x) = f(|x|)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

(1) Si trovino condizioni necessarie e sufficienti per f affinchè $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.
(2) Sia $a > 0$. Si provi che per $r > 0$ si ha:

$$(r^{2a}f^2(r))' \leq [(r^a f(r))']^2 + (r^a f(r))^2 = r^{2a}[(f'(r))^2 + f^2(r)] + a(r^{2a-1}f^2(r))' - a(a-1)r^{2a-2}f^2(r),$$

(3) Si provi che per ogni $N \geq 3$, $N \in \mathbb{N}$ e per ogni $r > N - 1$ si ha

$$r^{N-1}f^2(r) \leq 2\int_0^r t^{N-1}[(f'(t))^2 + f^2(t)]\,dt,$$

(4) Si provi che per ogni $r > 1$,

$$rf^2(r) \leq 2\int_r^{+\infty} t[(f'(t))^2 + f^2(t)]\,dt,$$

(5) Si provi che se $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$ allora

$$|u(x)| \leq \frac{C(N)}{|x|^{(N-1)/2}}\|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ con $|x| > N - 1$.

Esercizio 38. Si provi che:

(1) se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ allora la posizione $\langle T_f, \varphi\rangle := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ definisce una distribuzione $T_f \in \mathcal{D}'$, il che permette di identificare $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ad un sottospazio di $\mathcal{D}'$ mediante la mappa $J : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'$ data da $J(f) = T_f$;

(2) $\delta \in \mathcal{D}' \setminus J(L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$;
(3) $T \in \mathcal{D}'$ è tale per cui $tT = 0$ se e solo se $T = c\delta$, $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 39. Sia T la distribuzione associata alla funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ definita da $f(x) = \log|x|$. Si provi che:

(1) vale la seguente rappresentazione: $\langle T', \varphi\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$.
(2) sia $S \in \mathcal{D}'$. Allora $tS = 1$ se e solo se $S = c\delta + T'$, $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 40. Sia $\tau > 0$ e poniamo $\omega = 2\pi/\tau$. Il *nucleo di Dirichlet di ordine m e periodo τ* è definito da: $D_m(\omega t) = \displaystyle\sum_{k=-m}^{m} e^{ik\omega t}$. Si provi che nel senso delle distribuzioni $D_m \to \tau\,\sqcup\!\sqcup_\tau$ dove $\sqcup\!\sqcup_\tau = \lim\limits_{m\to\infty} \displaystyle\sum_{k=-m}^{m} \delta_{(k\tau)}$ è la distribuzione nota come *pettine di Dirac di passo τ*. Il risultato si esprime nella *formula sommatoria di Poisson*:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\omega t} = \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{(k\tau)}$$

Esercizio 41. Si calcolino le seguenti distribuzioni:

a.) $\dfrac{d}{dx} f_{a,b}$, con $f_{a,b}(x) = H(x)\log|ax| + H(-x)\log|bx|$, $a > 0$, $b > 0$;
b.) $e^t\delta''$.

Esercizio 42. Studiare la convergenza (puntuale, in $L^1(\mathbb{R})$, in $L^2(\mathbb{R})$,in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) della successione di funzioni definita da

$$u_n(t) := \begin{cases} n^2\sin(nt) & \text{se } t \in \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right[, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 43. Calcolare il limite nel senso delle distribuzioni:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n$$

con $u_n := n(\delta(t - 1/n) - \delta(t + 5/n))$.

Dipartimento di Informatica, Università di Verona
Strada Le Grazie 15 - I-37134 Verona, Italy.