Università degli Studi di Verona

Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 1 - 21/7/2009

1. Si enunci il Teorema di l'Hôpital (è sufficiente una a scelta delle sue varianti).

2. Si consideri la funzione reale di variabile reale $f(x) = \sqrt{-x^2}$. Allora

- ☐ f non è continua in 0 e non esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$;
- ☐ f è continua in 0 e $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$;
- ☐ f non è continua in 0 ma $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$;
- ☒ f è continua in 0, ma non esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$;

3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(n\pi)$

- ☒ converge assolutamente;
- ☐ diverge a $+\infty$;
- ☐ è indeterminata;
- ☐ converge per il criterio di Leibniz ma non converge assolutamente;

4. Una funzione continua e strettamente crescente $f : [a, b] \to \mathbf{R}$

- ☐ è certamente invertibile tra $[a, b]$ e $\mathbf{R}$;
- ☐ è invertibile tra $[a, b]$ e $[f(a), f(b)]$, ma l'inversa può essere discontinua;
- ☒ è invertibile tra $[a, b]$ e $[f(a), f(b)]$, con inversa continua;
- ☐ non è necessariamente invertibile tra $[a, b]$ e $[f(a), f(b)]$;

5. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & se\ x \geq 0 \\ x - 1 & se\ x < 0 \end{cases}$$

L'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

- ☐ esiste come integrale di Riemann ordinario e vale 3;
- ☐ non esiste perché l'integranda non possiede primitive;

☒ esiste come integrale di Riemann ordinario e vale 0;

☐ non è un integrale ordinario, ma come integrale improprio converge;

6. Si calcolino i due limiti seguenti (se esistono)

$$\lim_{x\to+\infty} x \arctan\left(\frac{1}{\log x}\right), \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{\sin^2 \sqrt{x}}.$$

7. Si studi la funzione $f(x) = \arctan(e^x - 1)$ e se ne tracci il grafico. Si discuta poi l'invertibilità della funzione e si trovi l'eventuale funzione inversa.

8. Si trovino le primitive della funzione $f(x) = e^{e^x} \sin(e^x)\, e^x$.

9. Si studi la convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \binom{n}{n-2} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n) x^n.$$

Soluzioni:

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6 Ricordando che $\arctan(t) = t + o(t)$ per $t \to 0$ (o usando il teorema di l'Hôpital) si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(1/\log x)}{1/\log x} = 1.$$

Il primo dei limiti dati è dunque uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} \cdot \frac{\arctan(1/\log x)}{1/\log x} = +\infty.$$

Infatti la prima frazione tende a $+\infty$ per un ben noto limite fondamentale (o per l'Hôpital), mentre la seconda abbiamo visto sopra che tende a 1.

Il secondo limite può essere ottenuto con un po'di pazienza con l'Hôpital, oppure usando il teorema di Taylor come segue. Si ha infatti $\sin^2\sqrt{x} = x + o(x)$, mentre

$$(1+x)^{1/x} - e = e(e^{\frac{\log(1+x)}{x}-1} - 1) = e(e^{1-x/2-1+o(x)} - 1 = e(-x/2 + o(x)).$$

Il limite dato vale dunque $-e/2$.

7 La funzione è definita per ogni x reale e non presenta simmetrie evidenti. Tende a $\pi/2$ per $x \to +\infty$, a $-\pi/4$ per $x \to -\infty$. Inoltre si vede facilmente che $f(x)$ si annulla solo per $x = 0$ ed ha il segno di x. Si ha poi

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+(e^x-1)^2} = \frac{e^x}{2+e^{2x}-2e^x},$$

che è positiva per ogni x: la funzione f è strettamente crescente.

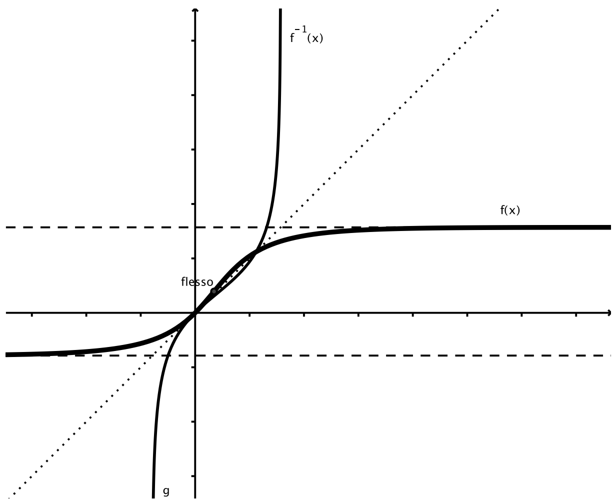
Calcoliamo infine la derivata seconda: si ottiene

$$f''(x) = \frac{e^x(2-e^{2x})}{(2+e^{2x}-2e^x)^2},$$

che cambia di segno nel punto di flesso $x = 1/2 \log 2$.

La funzione è poi invertibile tra $\mathbf{R}$ e la sua immagine $(-\pi/4, \pi/2)$ perché è continua e strettamente crescente. Si può scrivere esplicitamente la funzione inversa risolvendo rispetto a x l'equazione $y = \arctan(e^x - 1)$: si trova $f^{-1}(y) = \log(1 + \tan y)$, ovviamente per $y \in (-\pi/4, \pi/2)$.

Il grafico di f e della sua inversa è rappresentato nella seguente figura:



8 Col cambio di variabile $y = e^x$ ci si riduce a calcolare $\int e^y \sin y$: integrando per parti due volte si trova che questo integrale vale $1/2(e^y \sin y - e^y \cos y) + C$. Le primitive della funzione data sono dunque

$$1/2e^{e^x}(\sin e^x - \cos e^x) + C.$$

9 Studiamo la prima serie: siccome $\binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$, si vede subito che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\binom{n+1}{n-1}}{\binom{n}{n-2}} = 1,$$

per cui (criterio del rapporto) il raggio di convergenza della serie è 1. Per $x = 1$ il termine generale della serie diventa $\frac{n(n-1)}{2}$, che non tende a 0 (ma diverge a $+\infty$): la serie non può convergere. Lo stesso succede per $x = -1$ (il modulo del termine generale è lo stesso...e non tende a zero!). La prima delle due serie date converge quindi per $x \in (-1, 1)$.

Anche per la seconda serie possiamo usare il criterio del rapporto, scoprendo che il raggio di convergenza è 1. Per $x = 1$ la serie diverge perché è asintoticamente equivalente alla serie armonica. Per $x = -1$ converge per il criterio di Leibniz. L'insieme di convergenza della seconda serie è quindi $[-1, 1)$.