Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica
Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 1 - 1/9/2009

1. Si enunci il teorema dei valori intermedi. Questo teorema risulta di qualche utilità per studiare l'invertibilità di certe funzioni?

2. Un esempio di funzione derivabile in 0, con derivata discontinua in quel punto è:

☒ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$

☐ $f(x) = \begin{cases} +1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x \leq 0 \end{cases}$

☐ $f(x) = |x|$

☐ $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$

3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile due volte tale che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Allora

☐ f ha esattamente un punto di massimo assoluto;

☐ f ha almeno un punto di minimo assoluto, ma può averne molti;

☒ f ha esattamente un punto di minimo assoluto;

☐ f ha almeno un punto di massimo assoluto, ma può averne molti;

4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(n\pi)$

☒ converge per il criterio di Leibniz ma non converge assolutamente;

☐ converge assolutamente;

☐ è indeterminata;

☐ diverge a $+\infty$;

5. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converga. Allora

☐ l'integrale improprio di $|f|$ diverge a $+\infty$;

- $\square$ l'integrale improprio converge assolutamente;
- $\boxtimes$ se f è decrescente, allora ha limite 0 per $x \to +\infty$;
- $\square$ la funzione ha limite 0 per $x \to +\infty$;

6. Si calcolino i due limiti seguenti (se esistono)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{x+\sin x}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)+1-\cos 2x-\sin x}{\log^2(1+x)}.$$

7. Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{2+3\sin x}{1+2\sin x}$$

e se ne tracci un grafico il più possibile dettagliato.

8. Si discuta la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$$

9. Si studi la convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin(\frac{1}{n})\right)x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n}+\frac{3^n}{n^2}\right)x^n.$$

Soluzioni:

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4,5**)è già indicata nel testo con una crocetta.

6. Per svolgere il primo limite, osserviamo che il numeratore va all'infinito come $\log \sqrt{x}$: infatti possiamo scrivere

$$\log\left(\frac{x+\sin x}{\sqrt{x}}\right) = \log\left(\sqrt{x}\left(\frac{1+\sin x}{x}\right)\right) = \log\sqrt{x} + \log\left(1+\frac{\sin x}{x}\right).$$

Evidentemente, il secondo termine dell'ultima espressione tende a 0 per $x \to +\infty$. Sostituendo nell'espressione di partenza, troviamo subito che il limite voluto vale 0.

Il secondo limite può essere facilmente calcolato utilizzando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari: in particolare troviamo che $\log^2(1+x) = x^2 + o(x^2)$, $1 - \cos 2x = 2x^2 + o(x^2)$, $-sinx = -x + o(x^2)$, $\log(1+\sin x) = x - x^2/2 + o(x^2)$. Sostituendo, troviamo che il limite voluto vale $3/2$.

7. Osserviamo per cominciare che la funzione è 2π-periodica: sarà quindi sufficiente studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

In tale intervallo, la funzione è definita in tutti i punti tranne quelli in cui si annulla il denominatore, cioè $x = \frac{7}{6}\pi$ e $x = \frac{11}{6}\pi$: in questi punti la funzione avrà altrettanti asintoti verticali.

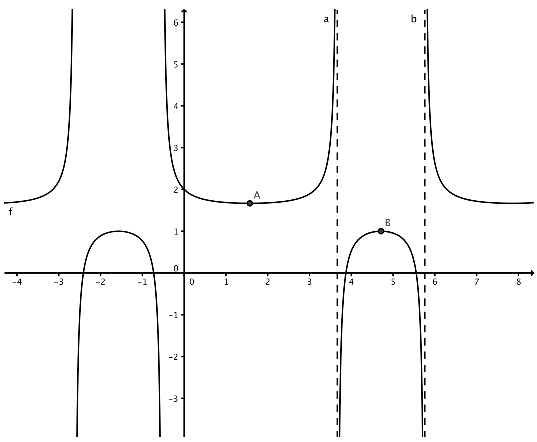
Abbiamo poi $f'(x) = -\cos x/(1+2\sin x)^2$, che ha il segno di $-\cos x$: se ne ricavano facilmente gli intervalli di crescenza e decrescenza. In particolare, $x = \pi/2$ è un punto di minimo relativo, mentre $3/2\pi$ è un punto di massimo relativo.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{-2\sin^2 x + \sin x + 4}{(1+2\sin x)^3}.$$

Il numeratore è un polinomio di secondo grado in $\sin x$: si vede subito che esso è ovunque positivo (le radici sono al di fuori dell'intervallo $[-1, 1]$). La derivata seconda ha quindi il segno di $1 + 2\sin x$ e la funzione è convessa in $[0, 7/6\pi)$ e in $(11/6\pi, 2\pi]$, concava in $(7/6\pi, 11/6\pi)$.

Possiamo dunque disegnare il grafico della funzione:



8. La funzione integranda è non negativa e tende all'infinito per $x \to 0^+$. Poiché per $x \to 0$ si ha $e^x/\sqrt{\sin x} \sim 1/\sqrt{x}$, l'integrale improprio converge grazie al criterio dell'equivalenza asintotica.

9. Abbiamo intanto $(1/n - \sin(1/n)) \sim \frac{1}{6n^3}$: applicando il criterio della radice si scopre subito che il raggio di convergenza della prima serie è 1. Per $x = 1$ si ottiene una serie armonica generalizzata di esponente 3 (convergente). Per $x = -1$, poi, la serie converge assolutamente per lo stesso motivo. In conclusione, l'intervallo di convergenza della prima serie è $[-1, 1]$.

Anche il raggio di convergenza della seconda serie si trova facilmente con il criterio della radice e vale $1/3$. Altrettanto facilmente, si scopre che la serie converge assolutamente per $x = \pm 1/3$. In conclusione, l'intervallo di convergenza è $[-1/3, 1/3]$.