Università degli Studi di Verona

Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Bioinformatica

PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 23/1/2009

Tipologia A

1 Enunciare il teorema di Lagrange.

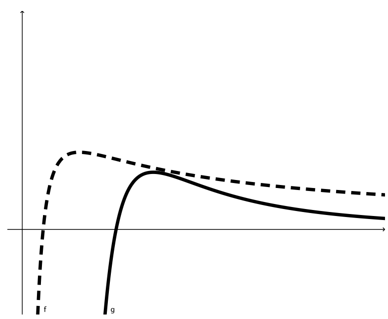
2 Il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^a}$

- ☐ vale $+\infty$ per $a \geq 0$, non esiste per $a < 0$;
- ☐ vale $+\infty$ per $a \geq 0$, 0 per $a < 0$;
- ☐ vale sempre 0, qualunque sia $a \in \mathbf{R}$;
- ☒ vale sempre $+\infty$, qualunque sia $a \in \mathbf{R}$;

3 Tra le seguenti affermazioni, qual è l'unica corretta?

- ☐ Una funzione con derivata positiva in un punto è crescente in un intorno di quel punto;
- ☐ Una funzione continua su **R** ammette massimo e minimo;
- ☐ Una funzione continua in un punto è anche derivabile in quel punto;
- ☒ Una funzione con derivata positiva in un intervallo è strettamente crescente in quell'intervallo;

4 Nella figura seguente sono raffigurate una funzione e la sua derivata seconda.



Il grafico della funzione è quello disegnato con linea continua o quello tratteggiato?

☐ Continua ☒ Tratteggiata

5 Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\log(1+2x)}\right)^5 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sin x\log x}{3x^2+2x+5}$$

6 Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico: $f(x) = x^3 \log x$.

7 Le autorità decidono di immagazzinare le scorie radioattive della centrale nucleare dismessa di Buttapietra nel nuovo sito di stoccaggio di Ca' Vignal. Le scorie vengono trasportate nel sito poco alla volta a ritmo costante, per cui la loro massa è funzione lineare del tempo.

I nuclei radioattivi decadono con legge esponenziale, quindi il materiale radioattivo contenuto nelle scorie di Ca' Vignal, dopo t anni, avrà massa

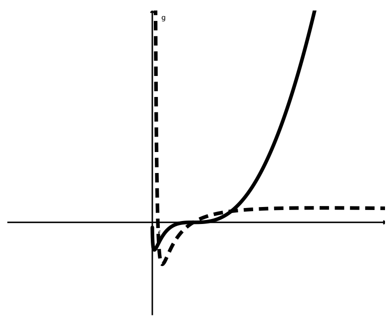
$$f(t) = Cte^{-\alpha t}$$

dove C, α sono delle costanti (ed in particolare $\alpha > 0$ è la costante di decadimento).

Assumendo $\alpha = 0.069$, si determini il valore di t per cui vi sarà massima radioattività nel sito di stoccaggio.

Tipologia B

4 Nella figura seguente sono raffigurate una funzione e la sua derivata seconda.



Il grafico della funzione è quello disegnato con linea continua o quello tratteggiato?

$\boxtimes$ Continua $\qquad$ $\square$ Tratteggiata

5 Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\log(1+3x)}\right)^4 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sin x\log x}{4x^2+6x+5}$$

6 Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico: $f(x) = x^2 \log x$.

7 Le autorità decidono di immagazzinare le scorie radioattive della centrale nucleare dismessa di Buttapietra nel nuovo sito di stoccaggio di Ca' Vignal. Le scorie vengono trasportate nel sito poco alla volta a ritmo costante, per cui la loro massa è funzione lineare del tempo.

I nuclei radioattivi decadono con legge esponenziale, quindi il materiale radioattivo contenuto nelle scorie di Ca' Vignal, dopo t anni, avrà massa

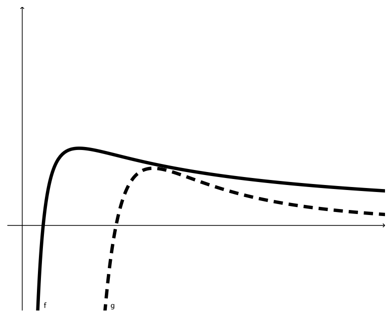
$$f(t) = Cte^{-\alpha t}$$

dove C, α sono delle costanti (ed in particolare $\alpha > 0$ è la costante di decadimento).

Assumendo $\alpha = 0.023$, si determini il valore di t per cui vi sarà massima radioattività nel sito di stoccaggio.

Tipologia C

4 Nella figura seguente sono raffigurate una funzione e la sua derivata seconda.



Il grafico della funzione è quello disegnato con linea continua o quello tratteggiato?

⊠ Continua   □ Tratteggiata

5 Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{\log(1+4x)} \right)^3 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + \sin x \log x}{5x^2 + 12x + 5}$$

6 Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico: $f(x) = \frac{1}{x} \log x$.

7 Le autorità decidono di immagazzinare le scorie radioattive della centrale nucleare dismessa di Buttapietra nel nuovo sito di stoccaggio di Ca' Vignal. Le scorie vengono trasportate nel sito poco alla volta a ritmo costante, per cui la loro massa è funzione lineare del tempo.

I nuclei radioattivi decadono con legge esponenziale, quindi il materiale radioattivo contenuto nelle scorie di Ca' Vignal, dopo t anni, avrà massa

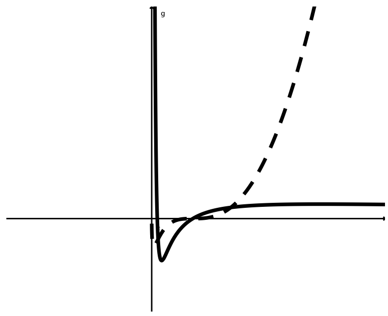
$$f(t) = Cte^{-\alpha t}$$

dove C, α sono delle costanti (ed in particolare $\alpha > 0$ è la costante di decadimento).

Assumendo $\alpha = 0.014$, si determini il valore di t per cui vi sarà massima radioattività nel sito di stoccaggio.

Tipologia D

4 Nella figura seguente sono raffigurate una funzione e la sua derivata seconda.



Il grafico della funzione è quello disegnato con linea continua o quello tratteggiato?

☐ Continua ☒ Tratteggiata

5 Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\log(1+5x)}\right)^2 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sin x\log x}{6x^2+20x+5}$$

6 Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico: $f(x) = \frac{1}{x^2}\log x$.

7 Le autorità decidono di immagazzinare le scorie radioattive della centrale nucleare dismessa di Buttapietra nel nuovo sito di stoccaggio di Ca' Vignal. Le scorie vengono trasportate nel sito poco alla volta a ritmo costante, per cui la loro massa è funzione lineare del tempo.

I nuclei radioattivi decadono con legge esponenziale, quindi il materiale radioattivo contenuto nelle scorie di Ca' Vignal, dopo t anni, avrà massa

$$f(t) = Cte^{-\alpha t}$$

dove C, α sono delle costanti (ed in particolare $\alpha > 0$ è la costante di decadimento).

Assumendo $\alpha = 0.0069$, si determini il valore di t per cui vi sarà massima radioattività nel sito di stoccaggio.

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4**)è già indicata nel testo con una crocetta.

Esercizio 5 Il primo limite si riconduce facilmente a limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\log(1+2x)}\right)^5 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{\log(1+2x)}\cdot\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

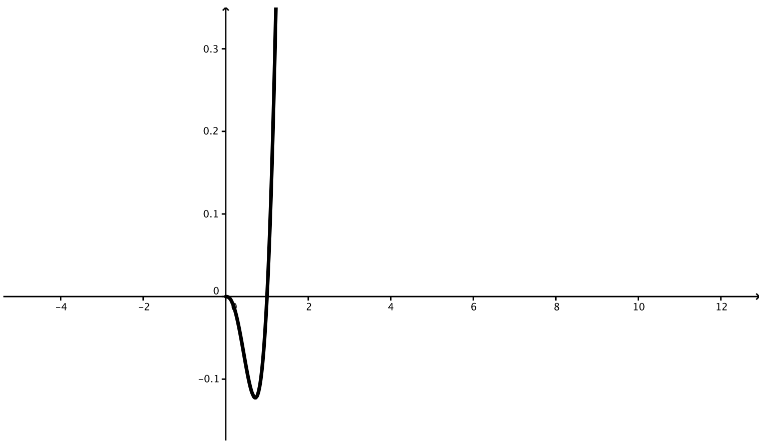
Il secondo limite diventa di calcolo immediato se dividiamo numeratore e denominatore della frazione per x^2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sin x\log x}{3x^2+2x+5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x\frac{\log x}{x^2}}{3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{1}{3}.$$

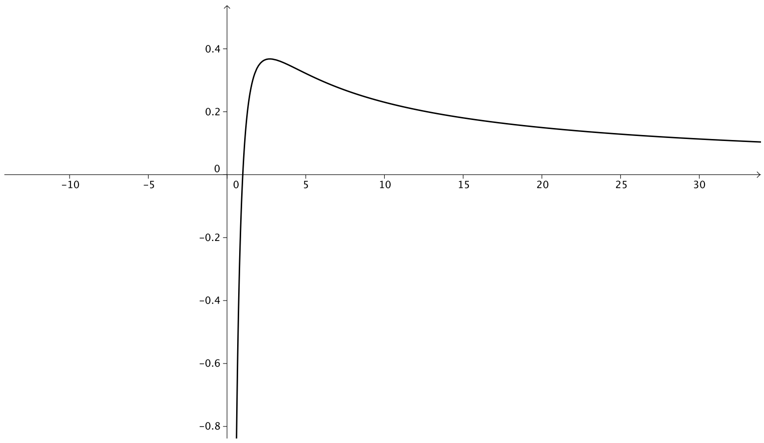
Si noti infatti $\sin x$ è una funzione limitata, mentre la frazione $\frac{\log x}{x}$ tende a 0: il prodotto di questi due termini tende dunque a 0.

Nei compiti delle tipologie B,C,D il procedimento per calcolare i due limiti è identico: cambia solo il valore numerico.

Esercizio 6 La funzione data è definita per $x > 0$. Si vede subito che $f(x) \to 0$ per $x \to 0^+$, mentre $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. La funzione, inoltre, ha il segno del logaritmo: è negativa per $x \in (0,1)$, positiva per $x > 1$. Si ha poi $f'(x) = x^2(3\log x+1)$: la derivata si annulla in $x = e^{-1/3}$, da cui segue che f è decrescente in $(0, e^{-1/3}$, crescente per $x > e^{-1/3}$. Inoltre $f''(x) = x(6\log x + 5)$, per cui la funzione parte concava, ha un flesso per $x = e^{-5/6}$, diventa convessa per $x > e^{-5/6}$. Ecco il grafico:



Nel compito di tipologia B i conti ed il grafico sono simili: cambiano solo le coordinate dei punti notevoli (e la velocità con cui la funzione tende all'infinito). Un po' diverso è il caso dei compiti di tipologia C e D: i limiti in 0 e all'infinito cambiano. I conti sulle derivate prima e seconda sono simili, e c'è un unico zero per entrambe le derivate. Il segno è però invertito: gli intervalli di crescenza e decrescenza e di concavità-convessità si scambiano. I grafici sono simili: ecco quello per il compito di tipologia C.



Esercizio 7 Dobbiamo trovare per quale t è massima la funzione $f(t) = te^{-\alpha t}$. Essa si annulla in 0, ed inoltre $f(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. Abbiamo poi $f'(t) = e^{-\alpha t}(1 - \alpha t)$. Se ne deduce subito che la funzione g ha un punto di massimo assoluto per $t = 1/\alpha \approx 14,49$. Nei compiti di tipologia B,C,D cambiava solo il valore numerico di questo punto di massimo.