Università degli Studi di Verona

Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Bioinformatica

PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 15/4/2009
ESERCIZI DI RECUPERO DELLA PRIMA PROVETTA

REGOLE: *Le soluzioni degli esercizi di recupero devono essere consegnate SEPARATAMENTE da quelle degli esercizi relativi alla seconda parta del corso, su fogli completi di nome e numero di matricola. La prima provetta si considera annullata, qualunque ne sia stato l'esito, per chi consegna le soluzioni degli esercizi di recupero.*

RECUPERO.1 Si calcoli uno dei limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \arctan(x)\sin^2 x}{x + \sqrt{1+x^4}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin(x))}{e^{2x}-1}.$$

RECUPERO.2 Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\log^2 x}{x}$$

e se ne tracci un grafico il più dettagliato possibile.

RECUPERO.3 Si trovino il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

sull'intervallo $[2,3]$.

Soluzioni esercizi di recupero:

Recupero.1 Il primo limite si calcola facilmente raccogliendo a fattor comune x^2, sia a numeratore che a denominatore, e semplificando:

$$\frac{x^2 + \arctan(x)\sin^2 x}{x + \sqrt{1+x^4}} = \frac{1 + \frac{\arctan(x)}{x^2}\sin^2 x}{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^4}+1}} \to 1 \ per \ x \to +\infty.$$

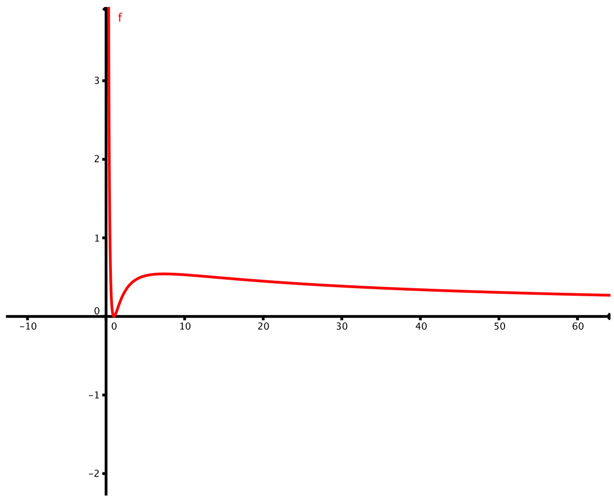
Il secondo limite, usando opportunamente i limiti fondamentali, diventa:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(\sin x)} \cdot \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Recupero.2 La funzione data è definita per $x > 0$, è non negativa nel suo dominio e si annulla solo per $x = 1$. Essa tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$, tende a 0 per $x \to +\infty$. Le derivate sono:

$$f'(x) = \frac{\log x(2 - \log x)}{x^2}, \quad f''(x) = 2\frac{\log^2 x - 3\log x + 1}{x^3},$$

da cui si trova che f ha un minimo (assoluto) per $x = 1$ ed un massimo relativo per $x = e^2$, mentre ha due flessi in $x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Il grafico della funzione è quello in figura:



Recupero.3 La funzione data è definita per $x \neq \pm 1$, per cui l'intervallo assegnato è interamente contenuto nel dominio. Inoltre, la derivata della funzione è negativa in tutto l'intervallo. Dunque il massimo si ha per $x = 2$ (e vale $5/3$), il minimo per $x = 3$ (e vale $5/4$).

Università degli Studi di Verona

Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Bioinformatica

PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 15/4/2009

Tipologia A

1 Si enunci il teorema fondamentale del calcolo integrale.

2 Se per ogni $n \in \mathbf{N}$ vale $0 < a_n < e^{-n}$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

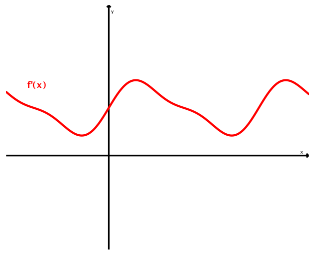
☐ diverge a $+\infty$;

☐ potrebbe convergere o divergere: occorrono altre informazioni;

☒ converge;

☐ è una serie geometrica;

3 Quale delle seguenti affermazioni è corretta se il grafico rappresenta la derivata prima di una certa funzione f?



☒ f è crescente sull'intera retta reale;

☐ f è decrescente sull'intera retta reale;

☐ f é concava sull'intera retta reale;

☐ f è convessa sull'intera retta reale;

4 Si consideri, sulla semiretta $[1, +\infty)$, la funzione reale di variabile reale $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\, dt$

☐ è derivabile e $F'(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \sin 1$;

☐ non è continua;

☐ è continua ma non derivabile;

☒ è derivabile e $F'(x) = \frac{\sin x}{x^2}$;

5 Si trovino, scegliendo un'opportuna sostituzione, le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\log(x)\sqrt{\log(\log(x))}}.$$

Si discuta anche la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_e^{e^e} \frac{1}{x\log(x)\sqrt{\log(\log(x))}}\,dx,$$

calcolandone se possibile il valore.

6 Si risolva almeno uno dei seguenti problemi di Cauchy:

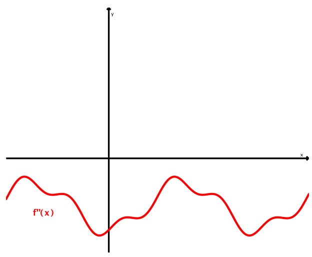
$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 2e^{-x}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) - \tan(x)y(x) = \cos x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

7 Si studi la convergenza di almeno una delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!}x^n$$

Tipologia B

3 Quale delle seguenti affermazioni è corretta se il grafico rappresenta la derivata seconda di una certa funzione f?



- ☐ f è crescente sull'intera retta reale;
- ☐ f è decrescente sull'intera retta reale;
- ☐ f è convessa sull'intera retta reale;
- ☒ f é concava sull'intera retta reale;

6 Si risolva almeno uno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 3e^{-x}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) - \tan(x)y(x) = \cos x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

7 Si studi la convergenza di almeno una delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}x^n$$

Tipologia C

6 Si risolva almeno uno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 4e^{-x}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) - \tan(x)y(x) = \cos x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

7 Si studi la convergenza di almeno una delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+3)!}x^n$$

Tipologia D

6 Si risolva almeno uno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 5e^{-x}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) - \tan(x)y(x) = \cos x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

7 Si studi la convergenza di almeno una delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+4)!}x^n$$

Soluzioni:

Presentiamo in dettaglio le soluzioni del compito di tipologia A, con qualche breve commento su quel che cambiava nelle altre versioni.

Per l'**Esercizio 1** rimandiamo agli appunti. La soluzione corretta dei questionari a scelte multiple (**Esercizi 2,3,4**)è già indicata nel testo con una crocetta.

Esercizio 5 Posto $y = \log(\log(x))$, si ha $\int \frac{dx}{x\log(x)\sqrt{\log(\log(x))}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} + C = \int \sqrt{\log(\log(x))} + C$. L'integrale improprio si calcola subito usando questa primitiva e vale 2.

Chi non fosse stato in grado di trovare una primitiva della funzione data avrebbe potutto ugualmente dedurre la convergenza dell'integrale improprio usando il principio del confronto: nell'intervallo dato si ha $f(x) \leq \frac{1}{e\sqrt{x}}$ e l'ultima funzione ha integrale improprio convergente.

Esercizio 6 Il primo problema di Cauchy si risolve moltiplicando ambo i membri dell'equazione differenziale per il fattore integrante e^x e integrando. Si trova $y(x) = 2xe^{-x}$. Nelle tipologie B, C, D la soluzione era rispettivamente $y(x) = 3xe^{-x}$, $y(x) = 4xe^{-x}$, $y(x) = 5xe^{-x}$.

Il secondo problema di Cauchy (uguale in tutte le versioni) si risolve moltiplicando ambo i membri per il fattore integrante $\cos(x)$. Si trova $y(x) = \frac{x}{2\cos x} + \frac{1}{2}\sin x$.

Esercizio 7 Poiché $|\sin n| \leq 1$, il modulo del termine generale della prima serie si maggiora con $1/n^{3/2}$. Quest'ultimo è il termine generale di una serie armonica generalizzata *convergente* (perché l'esponente è maggiore di 1). La serie data converge quindi assolutamente, grazie al principio del confronto.

Nelle altre versioni, la prima serie era sempre convergente per lo stesso ragionamento (cambiava solo l'esponente).

La seconda serie è una serie di potenze. Il raggio di convergenza è 1, come si vede subito applicando il criterio del rapporto: la serie data converge dunque certamente per $-1 < x < 1$, mentre non converge per $|x| > 1$.

Valutiamo il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza: per $x = 1$ il termine generale diventa (dopo una semplificazione dei fattoriali...) $\frac{1}{n+1}$. La serie si riduce dunque ad una serie armonica divergente. Per $x = -1$, invece, il termine generale diventa $\frac{(-1)^n}{n+1}$ e la serie converge grazie al criterio di Leibniz. In conclusione, la serie di potenze data converge per $-1 \leq x < 1$.

Nelle altre versioni del compito, invece, l'insieme di convergenza era $-1 \leq x \leq 1$ perchè la serie convergeva assolutamente per $x = \pm 1$. Per esempio, nei compiti di tipologia B, il modulo del termine generale della serie per $x = \pm 1$ diventava $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$, asintoticamente equivalente ad $1/n^2$ che è il termine generale di una serie armonica generalizzata convergente. Analogo discorso per le tipologie C e D.