Diario del Corso di Analisi I

Corso di Laurea: Bioinformatica
Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!

Indice

1 Lezione del 13/10/2008 (2 ore) **6**
Numeri reali, assioma di completezza, estremo inferiore ed estremo superiore

2 **Lezione del 3/11/2008 (2 ore)** ***8***
Ancora sull'estremo superiore e inferiore, potenze ad esponente reale, funzioni reali di variabile reale e loro grafici

3 **Lezione del 6/11/2008 (2 ore)** ***11***
Comportamento di $\sin x/x$ *vicino a* 0*, idea informale di limite*

4 **Lezione del 7/11/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)** ***13***
Esercizi su estremo superiore ed inferiore, massimi e minimi di insiemi di numeri reali. Qualche semplice calcolo di limiti.

5 **Lezione del 10/11/2008 (2 ore)** ***14***
Definizione rigorosa di limite e di funzione continua

6 **Lezione del 13/11/2008 (2 ore)** ***17***
Operazioni algebriche e di composizione sui limiti. Esempi di funzioni continue e di funzioni discontinue. Limiti destri e sinistri, limiti infiniti e all'infinito. Forme indeterminate $0/0$ *e* ∞/∞*.*

7 **Lezione del 17/11/2008 (2 ore)** ***21***
Forme indeterminate. Limiti destri, sinistri, infiniti, all'infinito. Limiti di successioni. Teorema sul limite di una successione crescente. Il numero di Nepero e*.*

8 **Lezione del 20/11/2008 (2 ore)** ***23***
Alcuni limiti fondamentali. Continuità della funzione esponenziale. Teorema di esistenza degli zeri (enunciato) e sue conseguenze.

9 **Lezione del 21/11/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)** ***25***
Esercizi sui limiti: calcolo del limite di forme indeterminate tramite manipolazioni algebriche ed uso dei limiti fondamentali.

10 **Lezione del 24/11/2008 (2 ore)** ***26***
Teorema di esistenza degli zeri. Continuità dell'inversa di una funzione continua strettamente monotona su un intervallo. Teorema di Weierstrass.

11 **Lezione del 27/11/2008 (2 ore)** ***29***
Introduzione al concetto di derivata. Continuità delle funzioni derivabili. Derivate di somme, prodotti, rapporti. Alcune derivate di funzioni elementari.

12 **Lezione del 28/11/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)** ***32***
Esercizi su derivate e grafici di funzioni.

13 **Lezione del 1/12/2008 (2 ore)** ***35***
Derivata di funzione composta e di funzione inversa. Funzioni convesse.

14 **Lezione del 4/12/2008 (2 ore)** ***37***
Funzioni convesse. Massimi e minimi relativi: principio di Fermat. Teoremi di Rolle e Lagrange.

15 **Lezione del 5/12/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)** ***40***
Esercizi su derivate, grafici di funzioni, problemi di ottimizzazione.

16 **Lezione del 11/12/2008 (2 ore)** ***44***
Teorema di Lagrange e conseguenze. Regola di l'Hôpital. Approssimazione di funzioni con polinomi: la formula di Taylor.

17 **Lezione del 12/12/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)** ***47***
Simulazione di compitino, in preparazione della provetta del 23 gennaio.

18 **Lezione del 15/12/2008 (2 ore)** ***48***
Formula di Taylor (con resto di Peano e di Lagrange). Applicazioni ai massimi e minimi ed all'approssimazione di funzioni.

19 **Lezione del 18/12/2008 (2 ore)** ***53***
Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. "Breviario" iperveloce sulle serie di Taylor e sulle serie di potenze.

20 **Lezione del 19/12/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)** ***56***
Esercizi di ricapitolazione in preparazione alla provetta di gennaio.

21 **Lezione del 26/1/2009 (2 ore)** ***58***
Calcolo di aree di regioni piane. Integrale di Riemann.

22 **Lezione del 27/1/2009 (1 ora + 1 ora esercitazione opzionale)** ***62***

Teorema fondamentale del calcolo integrale. Introduzione al calcolo di primitive. Esercitazione: correzione e discussione della provetta di valutazione intermedia del 23/1/2009.

23 **Lezione del 2/2/2009 (2 ore)** ***65***
Integrale indefinito. Tecniche di integrazione.

24 **Lezione del 3/2/2009 (1 ora+ 2 ore esercitazione opzionale)** ***67***
Tecniche di integrazione. Applicazioni dell'integrale. Esercizi sugli integrali.

25 **Lezione del 9/2/2009 (2 ore)** ***70***
Introduzione alle equazioni differenziali ed al problema di Cauchy.

26 **Lezione del 10/2/2009 (1 ora + 2 ore esercitazione opzionale)** ***76***
Equazioni del primo ordine a variabili separabili e lineari. Esercizi su integrali ed equazioni differenziali.

27 **Lezione del 16/2/2009 (2 ore)** ***78***
Cenni su esistenza e unicità per il problema di Cauchy. Integrali impropri.

28 **Lezione del 17/2/2009 (1 ora + 1 ora esercitazione opzionale)** ***81***
Integrali impropri e serie.

29 **Lezione del 23/2/2009 (2 ore)** ***84***
Serie: criterio integrale di convergenza, criterio del confronto, convergenza assoluta, condizione necessaria di convergenza, criteri del rapporto e della radice, criterio di Leibniz.

30 **Lezione del 2/3/2009 (esercitazione opzionale - 2 ore)** ***88***
Esercizi sulla convergenza delle serie.

31 **Lezione del 3/3/2009 (2 ore)** ***88***
Introduzione alle serie di Fourier.

32 **Lezione del 9/3/2009 (2 ore)** ***92***
Approssimazione ottimale di una funzione periodica con polinomi trigonometrici.

33 **Lezione del 10/3/2009 (esercitazione opzionale - 2 ore)** ***95***
Ancora esercizi su serie ed integrali impropri...

34* Lezione del 16/3/2009 (2 ore)** ***96
Convergenza puntuale delle serie di Fourier. Cenni sulla trasformata di Fourier discreta.

35* Lezione del 17/3/2009 (esercitazione opzionale - 2 ore)** ***100
Esercizi di ricapitolazione

36* Lezione del 23/3/2009 (esercitazione opzionale - 2 ore)** ***101
Simulazione della seconda provetta.

1 Lezione del 13/10/2008 (2 ore)

Presentazione del corso: orario, appunti in rete, modalità di valutazione. Argomento del corso: calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale.

Visto che nel corso ci occuperemo di funzioni reali di variabile reale, sarà bene capire esattamente cosa sono i numeri reali!

Consideriamo la seguente catena di insiemi numerici, sempre più grandi:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Ogni volta che passiamo da un insieme al successivo, *guadagnamo qualcosa*... Nell'insieme $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dei numeri naturali non è possibile trovare l'elemento inverso di un numero rispetto alla somma (l'opposto): perché questo si possa fare dobbiamo allargarci all'insieme $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ dei numeri interi. Analogamente, in $\mathbf{Z}$ non è possibile definire l'operazione inversa del prodotto: per questo, si introduce l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali ($\mathbf{Q} = \{m/n : \ m, n \in \mathbf{Z}, \ n \neq 0\}$).

Con l'insieme dei numeri razionali potremmo dirci soddisfatti, almeno dal punto di vista delle quattro operazioni! E allora, perché sentiamo il bisogno di allargare ulteriormente l'insieme dei "numeri"?

Questa necessità divenne evidente già agli albori della matematica greca (anche se i greci avevano una visione più "geometrica" che "algebrica" della matematica): i pitagorici si accorsero che *la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 non è un numero razionale*. In termini moderni (e grazie al teorema di Pitagora), questo equivale a dire che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

Dimostriamolo per assurdo: supponiamo che esista un numero razionale $q = m/n$ tale che $q > 0$ e $q^2 = 2$. Riducendo la frazione ai minimi termini, non è restrittivo supporre che i numeri naturali m e n non abbiano fattori primi in comune.

Ora, la nostra supposizione equivale a $m^2 = 2n^2$, da cui segue che m^2 è un numero pari. Poiché ogni fattore primo di m^2 deve essere presente anche in m, ne deriva che m è pari.

Dunque, $m = 2r$ per qualche numero naturale r, e la nostra identità diventa $4r^2 = 2n^2$, da cui $2r^2 = n^2$. Ripetendo esattamente il ragionamento appena fatto, questo mostra che n è pari. Assurdo perché abbiamo supposto che m e n non abbiano fattori in comune, e quindi essi non possono essere entrambi pari!

Per i pitagorici, la scoperta dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ ebbe sconvolgenti conseguenze filosofiche...per noi, significa solo che dobbiamo trovare un insieme *più ampio* di numeri, in modo che almeno uno di essi abbia quadrato uguale a 2 (e in cui magari sia possibile risolvere altri interessanti problemi!).

Una buona risposta a queste necessità è l'insieme **R** dei numeri reali, che noi ben conosciamo. Non è vero?

Cosa sono i numeri reali di cui abbiamo parlato (e che abbiamo usato) per buona parte della nostra carriera scolastica?

Una possibile risposta: sono tutti i numeri decimali, eventualmente con infinite cifre dopo la virgola. Questo è un buon modello dei numeri reali, che presenta però un piccolo problema: se *definiamo* i reali come numeri decimali infiniti, non è poi facilissimo definire le operazioni e la relazione d'ordine, e mostrare poi che esse godono di tutte le proprietà che ci aspettiamo... Comunque, questo è possibile senza eccessive difficoltà.

Un approccio alternativo (adottato da molti testi di analisi matematica) è quello assiomatico: i numeri reali sono *per definizione* un *campo ordinato e completo.*

Questo significa che i numeri reali sono un *insieme* su cui sono definite due *operazioni* (la somma e il prodotto), entrambe associative e commutative. Inoltre, entrambe le operazioni hanno un elemento neutro (0 e 1 rispettivamente) e sono "invertibili" (cioè per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste un altro elemento che denotiamo $(-x)$ tale che $x + (-x) = 0$; per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ esiste un altro elemento x^{-1} tale che $x \cdot x^{-1} = 1$). Vale inoltre la proprietà distributiva, che lega la somma al prodotto. Un insieme con due operazioni che godono di queste proprietà è detto *campo*.

C'è poi una *relazione d'ordine*, che dati due numeri reali ci consente di dire qual è il più grande. Questa realazione d'ordine è compatibile con le operazioni (nel senso che possiamo manipolare le disuguaglianze nel modo in cui siamo abituati: sommando uno stesso numero reale ad ambo i membri di una disuguaglianza essa rimane vera, così come se moltiplichiamo ambo i membri per uno stesso numero reale positivo). Un campo che gode di queste proprietà è un *campo ordinato*: ma anche **Q** è un campo ordinato!

Quel che distingue **R** da **Q** è l'*assioma di completezza.*

Ne esistono varie formulazioni equivalenti, per ora proponiamo la seguente:

ASSIOMA DI COMPLETEZZA (Esistenza dell'estremo superiore): Ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di **R** *ammette estremo superiore in* **R**.

Per capire la formulazione dell'assioma di completezza che si rifà al concetto di estremo superiore, abbiamo bisogno di alcune definizioni:

DEFINIZIONI: Se $A \subset \mathbf{R}$, un *maggiorante* di A è un numero reale M tale che $M \geq a$ per ogni $a \in A$.

Un sottinsieme di $\mathbf{R}$ si dice superiormente limitato se ammette almeno un maggiorante.

L'*estremo superiore* di un sottinsieme A di $\mathbf{R}$ è il *minimo* dei maggioranti di A, se questo minimo esiste.

Cerchiamo di comprendere il significato di questa definizione di estremo superiore (che per inciso si indica col simbolo $\sup A$...).

Se l'insieme A ammette massimo, allora l'estremo superiore coincide col massimo. Infatti il massimo dell'insieme è un maggiorante per definizione, e inoltre nessun numero più piccolo del massimo può essere un maggiorante (perché è superato dal massimo stesso, che è un elemento dell'insieme).

D'altra parte, un insieme infinito non è detto che possegga massimo anche se è superiormente limitato: per esempio, la semiretta $A = \{x \in \mathbf{R} : \ x < 2\} = (-\infty, 2)$ non possiede un elemento massimo. Infatti, dato un qualunque elemento $a \in A$, il numero $\frac{a+2}{2}$ è ancora minore di 2, ed è maggiore di a: *a non può essere dunque l'elemento massimo della semiretta*. Invece, è immediato verificare che $\sup A = 2$... L'estremo superiore è la *naturale generalizzazione del concetto di massimo* agli insiemi superiormente limitati che non hanno massimo!

L'assioma di completezza dice una cosa non ovvia: *qualunque* sottinsieme non vuoto e superiormente limitato $A \subset \mathbf{R}$ ammette il sup. La cosa *non* è immediata perché il sup è definito come minimo di un insieme *infinito* (l'insieme dei maggioranti di A), e non sempre un insieme infinito ammette minimo!

2 Lezione del 3/11/2008 (2 ore)

Evidentemente, l'assioma di completezza (in una qualunque delle sue formulazioni equivalenti) *non è vero* nel campo dei razionali: per esempio, l'insieme $A = \{q \in \mathbf{Q} : \ q \geq 0, \ q^2 \leq 2\}$ è un sottinsieme di $\mathbf{Q}$ non vuoto e superiormente limitato (per esempio, 2 è un maggiorante), ma esso non ha estremo superiore in $\mathbf{Q}$: il problema è che possiamo trovare maggioranti razionali *arbitrariamente vicini* a $\sqrt{2}$, che peró non appartiene ai razionali. Ovviamente, se vediamo questo insieme come *sottinsieme di* $\mathbf{R}$, l'estremo superiore c'è ed è uguale a $\sqrt{2}$.

Questo è un fatto generale: se un insieme di numeri razionali ha come estremo superiore (in $\mathbf{R}$) un numero irrazionale, allora non ammette estremo superiore in $\mathbf{Q}$. Questa è una conseguenza della *densistà dei numeri razionali* *in* $\mathbf{R}$: dati due numeri reali distinti $a < b$ è sempre possibile trovare un numero razionale q tale che $a < q < b$. Omettiamo la dimostrazione di questa importante (e utile!) proprietà.

In matematica, oltre all'estremo superiore si usa spesso l'estremo inferiore che è l'oggetto simmetrico:

DEFINIZIONE: Un minorante di un insieme $A \subset \mathbf{R}$ è un numero reale c tale che $c \leq a$ per ogni $a \in A$. A si dice inferiormente limitato se possiede un minorante. L'estremo inferiore di A (se esiste) è il massimo dei minoranti di A, e si indica con $\inf A$.

Ovviamente, l'estremo inferiore coincide con il minimo di A quando questo esiste.

Inoltre, un'ulteriore formulazione equivalente dell'assioma di completezza consiste nel chiedere che ogni insieme inferiormente limitato ammette estremo inferiore (esercizio)!

È anche utile ricordare le seguenti *caratterizzazione* di estremo superiore ed estremo inferiore: siano $A \subset \mathbf{R}$, $M, m \in \mathbf{R}$. Allora si ha $\sup A = M$ se e solo se

- $a \leq M$ per ogni $a \in A$ (M è un maggiorante);
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{a} \in A$ tale che $\overline{a} > M - \varepsilon$ (nessun numero strettamente minore di M è un maggiorante).

Analogamente si ha $m = \inf A$ se e solo se

- $a \geq m$ per ogni $a \in A$ (m è un minorante);
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{a} \in A$ tale che $\overline{a} < m + \varepsilon$ (nessun numero strettamente maggiore di m è un minorante).

Per comodità, vale anche la pena di introdurre una notazione per indicare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di insiemi illimitati, e dell'insieme vuoto:

DEFINIZIONE: Il fatto che un insieme A non sia superiormente limitato si esprime con la scrittura $\sup A = +\infty$. *Analogamente, per un insieme illimitato inferiormente scriveremo* $\inf A = -\infty$. *Poniamo poi* $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

La definizione assiomatica di $\mathbf{R}$ è comoda (è sostanzialmente un menù delle proprietà che possiamo utilizzare quando manipoliamo i numeri reali), ma rimane il problema di mostrare che *esiste almeno un insieme, dotato* *di operazioni e relazione d'ordine, che soddisfa tutti gli assiomi*: abbiamo bisogno di un *modello* dei numeri reali.

Come accennavamo la volta scorsa, un tale modello è costituito dai *numeri decimali infiniti*. Non è difficile convincersi che con tale modello si possono definire le operazioni e la relazione d'ordine, e che esse godono di tutte le proprietà che ci servono...

L'esistenza della radice quadrata di un numero reale positivo può essere recuperata usando l'estremo superiore: se $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, definiamo $\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbf{R} : \ x^2 \leq a\}$. Questo definisce un numero reale positivo, il cui quadrato si può dimostrare che è uguale ad a.

Non perfezioneremo però la dimostrazione di questo fatto, perché esso è una conseguenza immediata del teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue, che verrà enunciato e dimostrato tra non molte lezioni... Durante questo breve periodo, faremo un atto di fede e "confideremo" nell'esistenza delle radici n-esime, della funzione logaritmo, etc...

Ma i numeri reali non sono utili solo per poter fare la radice quadrata... essi entrano in modo essenziale nella definizione di funzioni importanti quali esponenziale, logaritmo, funzioni trigonometriche...

Cominciamo con un brevissimo ripasso sul concetto di funzione e su quello di grafico di una funzione: una funzione $f : A \to B$, dove A, B sono insiemi (A si chiama dominio, B codominio) può essere pensata come una "scatola nera" o una "regola" che ad ogni elemento $a \in A$ associa uno ed un solo elemento $f(a) \in B$. Qualche esempio di funzioni che "esistono in natura": la temperatura nella nostra aula o il valore di una certa azione alla Borsa di Milano (entrambe in funzione del tempo), la forza elastica esercitata da una molla in funzione dell'elongazione, il segnale acustico raccolto da un microfono in funzione del tempo, la funzione che associa ad ogni sedia presente in quest'aula il nome di chi la occupa...

Caso particolarmente importante per noi: le funzioni reali di variabile reale, cioè quelle per cui $A \subset \mathbf{R}$ e $B \subset \mathbf{R}$. Grafico di una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$: è il sottinsieme del piano cartesiano

$$G_f = \{(x, y) : \ x \in \mathbf{R}, \ y = f(x)\}.$$

Tra i sottinsiemi del piano cartesiano, come distinguere quelli che sono grafici di una funzione reale di variabile reale? Sono i sottinsiemi G tali che per ogni $x \in \mathbf{R}$ troviamo una ed una sola $y \in \mathbf{R}$ tale che $(x, y) \in G$.

Nel caso generale in cui A e B sono insiemi qualunque, si introduce il prodotto cartesiano $A \times B$ di due insiemi A e B come l'insieme delle *coppie ordinate* (a, b) in cui $a \in A$ e $b \in B$: $A \times B = \{(a, b) : \ a \in A, \ b \in B\}$. Il grafico di una funzione $f : A \to B$ è allora il sottinsieme di $A \times B$ definito esattamente come sopra:

$$G_f = \{(a, b) \in A \times B : \; b = f(a)\}.$$

Identifichiamo i sottinsiemi di $A \times B$ che sono grafici di una funzione $f : A \to B$: otteniamo una "ricetta", simile a quella sopra, che può essere adottata come definizione rigorosa di funzione tra due insiemi.

Facciamo poi un breve ripasso sulle potenze: potenze ad esponente naturale, intero, razionale (la definizione è "obbligata" se vogliamo che valgano le proprietà delle potenze!).

Potenze ed esponente reale: se $a > 1$ e $x \in \mathbf{R}$, definiamo

$$a^x = \sup\{a^q : \; q \in \mathbf{Q}, \; q \leq x\}.$$

Si può dimostrare che questo oggetto ha tutte le proprietà della funzione esponenziale che ben conosciamo.

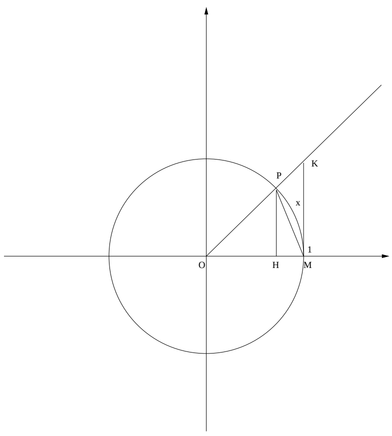
3 Lezione del 6/11/2008 (2 ore)

Cominciamo la lezione con un brevissimo ripasso sulle funzioni trigonometriche elementari, omesso in questi appunti (il lettore potrà servirsi di qualunque testo di trigonometria...).

Vogliamo poi introdurre, dapprima in modo assolutamente informale, le nozioni di limite di una funzione reale di variabile reale e di funzione continua.

Cerchiamo ora di affrontare un "esercizio" piuttosto difficile: vogliamo capire come è fatto il grafico della funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, funzione reale definita su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo che questa è una funzione pari (cioè $f(-x) = f(x)$) e che per $x > 0$ ha lo stesso segno della funzione seno ed è compresa tra le funzioni $-1/x$ e $1/x$. Quello che non è per niente chiaro a priori, è come si comporta la funzione per *valori piccoli della* x...

Attraverso semplici considerazioni geometriche, scopriamo che per $0 < x < \pi/2$ valgono le disuguaglianze $x \leq \tan x$ e $\sin x < x$:



La seconda disuguaglianza si ottiene osservando che l'arco PM (lungo x) è più lungo della corda PM, che a sua volta è più lunga del segmento $PH = \sin x$ (sono rispettivamente cateto e ipotenusa del triangolo rettangolo OHP).

Per ottenere la prima disuguaglianza , osserviamo che il settore circolare OMP è contenuto nel triangolo rettangolo OMK, per cui l'area del settore circolare è minore dell'area del triangolo. D'altra parte, l'area del settore circolare è $x/2$, mentre l'area del triangolo è $\tan x/2$.

Ne segue subito che

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \textit{se } 0 < x < \pi/2.$$

Si noti che le disuguaglianze rimangono valide anche per $-\pi/2 < x < 0$ perché tutte le funzioni coinvolte sono pari.

Geometricamente, questo dice che il grafico della funzione $f(x)$, per angoli piccoli, è compreso tra i grafici della funzione $\cos x$ e della funzione costante 1: possiamo quindi concludere che quando x si avvicina a 0, il valore della funzione $f(x)$ deve necessariamente avvicinarsi ad 1. Esprimiamo questo fatto scrivendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Cerchiamo di dare una prima pseudodefinizione di limite:

DEFINIZIONE INFORMALE: la scrittura

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

esprime il fatto che, se si avvicina sufficientemente la x a x_0 (con $x \neq x_0$), il valore di $f(x)$ diventa arbitrariamente vicino al numero ℓ.

4 Lezione del 7/11/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)

Esercizi proposti:

1. Si trovino estremo superiore ed estremo inferiore dei seguenti insiemi, precisando se si tratta di massimo e/o di minimo:

   (a) $A = \{x \in \mathbf{R} : \ x^2 - 3x + 2 < 0\}$.

   (b) $B = \{x \in \mathbf{R} : 3^x < 9\}$.

   (c) $C = \{x \in \mathbf{R} : 3^{2x} + 3^x < 1\}$.

   (d) $D = \{\frac{n-1}{n+1} : \ n \in \mathbf{N}\}$.

   (e) $E = \{q \in \mathbf{Q} : \ q^3 \leq 5\}$.

   (f) $F = \{x \in \mathbf{R} : |x - 2| < 1\}$.

   (g) $G = \{\frac{xy}{x+y} : \ x, y \in (0, 1)\}$.

   (h) $H = \{\frac{(-1)^n}{1+n^2} : \ n \in \mathbf{N}\}$.

2. Si mostri che se $A \subset B \subset \mathbf{R}$, con $A \neq \emptyset$, allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

3. Si mostri che per ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbf{R}$ si ha $\inf A = -\sup(-A)$, dove $(-A) := \{-a : \ a \in A\}$.

4. Si indichi l'unica alternativa giusta. Se $A \subset \mathbf{R}$ è tale che $\sup A = -\infty$ allora:

   - $A = \emptyset$;
   - A è illimitato superiormente;
   - A è illimitato inferiormente;
   - $A = \{0\}$.

5. Si indichi l'unica alternativa giusta. L'estremo inferiore dell'insieme $\cos q : \ q \in \mathbf{Q}, \ 0 < q < \frac{\pi}{4}\}$

   - vale 1;
   - vale 0;
   - è anche minimo;
   - vale $\sqrt{2}/2$.

6. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$;

   (b) $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$;

   (c) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;

   (d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x+4}{5x^2+2x+1}$.

5 Lezione del 10/11/2008 (2 ore)

Riprendiamo l'idea informale di limite vista la volta scorsa, basata sul nostro esame del comportamento di $f(x) = \sin x/x$ nelle vicinanze di $x = 0$. Avevamo scritto:

DEFINIZIONE INFORMALE: la scrittura

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

esprime il fatto che, se si avvicina sufficientemente la x a x_0 (con $x \neq x_0$), il valore di $f(x)$ diventa arbitrariamente vicino al numero ℓ.

Osserviamo che non è affatto necessario che la funzione f sia definita in x_0 (e, se lo fosse, conveniamo comunque di *non tenerne conto quando andiamo a verificare la relazione di limite*). Quel che serve, è solo che la funzione f sia definita in punti *arbitrariamente vicini ad x_0 e diversi da x_0* (in matematichese, x_0 deve essere un punto di accumulazione del dominio di f).

Attendiamo ancora qualche istante per dare una definizione precisa di limite: essa arriverà inesorabilmente tra non molto.

Piuttosto, avendo a disposizione il concetto di limite si può introdurre quello di funzione continua:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione reale di variabile reale definita su un intervallo. Se $x_0 \in [a, b]$, diciamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se f è continua in ogni punto del suo dominio $[a, b]$, diciamo semplicemente che essa è continua.

Ci si convince facilmente che l'idea geometrica dietro al concetto di continuità è piuttosto semplice: il grafico di una funzione continua è una "curva continua", cioè può essere disegnato "senza staccare la penna dal foglio". Infatti, se rileggiamo la definizione di continuità alla luce della nostra pseudo-definizione di limite, vediamo che una funzione è continua in x_0 quando $f(x)$ diventa *arbitrariamente vicino* a $f(x_0)$ a patto di prendere x *sufficientemente vicino* a x_0. In maniera ancora più informale possiamo dire che una funzione continua $f(x)$ ha la proprietà di "cambiare di poco" il suo valore quando si "cambia di poco" la variabile indipendente x.

A questo punto, viene naturale chiedersi se già conosciamo delle funzioni continue... La risposta è affermativa: si pensi alla funzione *costante* $f(x) = k$, o alla funzione *identica* $f(x) = x$. In questi due casi, le (pseudo)-definizioni date sopra diventano delle tautologie!

Dopo questi discorsi informali, è ormai ora di arrivare ad una definizione rigorosa del concetto di limite: vale la pena di sottolineare che nei prossimi pochi secondi... percorreremo un iter che storicamente ha richiesto moltissimo tempo ed un'accesa discussione nella comunità matematica! Daremo infatti la definizione di limite dovuta a Weierstrass.

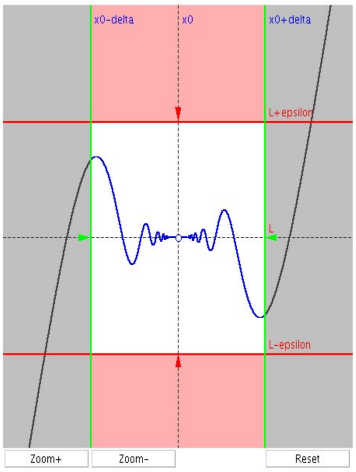
Avevamo detto che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se succede che, avvicinando *sufficientemente* x a x_0 (con $x \neq x_0$), $f(x)$ diventa *arbitrariamente vicina* a ℓ. Possiamo tradurre questa frase nella seguente

DEFINIZIONE: Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se e soltanto se, comunque scegliamo un intervallo I_ℓ centrato in ℓ, piccolo quanto vogliamo, è possibile trovare un intervallo J_{x_0} centrato in x_0 tale che $f(x) \in I_\ell$ per ogni $x \in J_{x_0}$, $x \neq x_0$.

Se scriviamo $I_\ell = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ e $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la definizione si può tradurre nella seguente (che è assolutamente equivalente a quella sopra, ed è quella che ha sempre riscosso il maggior successo di pubblico e di critica):
DEFINIZIONE: Sia f una funzione definita in un intorno di x_0. Diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se e soltanto se, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile trovare $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon. \qquad (P)$$

Vi sottopongo un mio "tentativo" di illustrare la definizione di limite con un grafico interattivo[1] sul quale si può scegliere il proprio ε a piacere, e verificare poi l'esistenza di δ.... Non sono però completamente convinto dell'efficacia del risultato!)



Osserviamo, che la definizione di limite ha senso anche se f è definita su un insieme qualunque A, purchè A possegga punti *distinti da* x_0 *e vicini quanto si vuole* a x_0: questo si esprime dicendo che x_0 è un *punto di accumulazione* di A. Ovviamente, in tal caso la disuguaglianza nella definizione di limite andrà verificata solo per gli $x \in A$.

Verifichiamo che con la definizione di limite appena vista, valgono alcune proprietà dei limiti e delle funzioni continue che suonano abbastanza naturali e che si riveleranno utilissime:

- *Continuità delle costanti e della funzione identica:* Per mostrare che $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ basta prendere $\delta = \varepsilon$ nella definizione di limite. Dimostrare che il limite di una costante è la costante stessa è altrettanto facile!

- *TEOREMA (dei carabinieri): Se f, g, h sono tre funzioni definite in un intorno di x_0, $f(x) \le h(x) \le g(x)$ in tale intorno e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$, allora esiste il limite*

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell.$$

[1] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/aa2002/nuovolimite/nuovolimite.html`

DIM.: sia $\varepsilon > 0$, e scegliamo $\delta > 0$ tale che $|f(x)-\ell| < \varepsilon$, $|g(x)-\ell| < \varepsilon$ ogni qual volta $0 < |x - x_0| < \delta$ (a priori, la definizione di limite potrebbe darci due valori diversi di δ per f e per g: perché sia vero quanto appena scritto, basta prendere il più piccolo dei due).

Le due disuguaglianze per f e per g possono anche essere scritte: $\ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$, $\ell-\varepsilon < g(x) < \ell+\varepsilon$. Usando l'ipotesi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ otteniamo allora (per ogni x tale che $0 < |x - x_0| < \delta$):

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \varepsilon,$$

cioè $|h(x) - \ell| < \varepsilon$, Q.E.D.

- *Algebra dei limiti:* Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2,\\
&\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2,\\
&\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell_1} \quad \textit{se } \ell_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Questi risultati, applicati alle funzioni continue, ci dicono ad esempio che i polinomi sono funzioni continue!

Vedremo la prossima volta la dimostrazione di queste affermazioni, come pure quella di altre importanti proprietà elementari dei limiti e delle funzioni continue.

6 Lezione del 13/11/2008 (2 ore)

La dimostrazione dell'enunciato introdotto alla fine della lezione precedente può essere ottenuta abbastanza facilmente a partire dalla definizione di limite. Cominciamo dalla prima: per definizione di limite, scelto $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$, $|g(x) - \ell_2| < \varepsilon$. Ma allora $|(f(x) + g(x)) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < 2\varepsilon$, che implica la nostra tesi.

Per dimostrare l'affermazione sul limite del prodotto, osserviamo per prima cosa che per tutti gli x sufficientemente vicini a x_0 (e diversi da x_0) si ha $|f(x)| \leq (|\ell_1|+1)$, $|g(x)| \leq (|\ell_2|+1)$... Si dimostri questo fatto per esercizio, usando la definizione di limite con $\varepsilon = 1$! Detto in altre parole, possiamo trovare una costante positiva M tale che $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ in un opportuno intorno di x_0 ($x \neq x_0$).

Fissato poi $\varepsilon > 0$, sia δ come sopra: evidentemente non è restrittivo supporre che δ sia tanto piccolo da far valere le nostre limitazioni $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ per $0 < |x - x_0| < \delta$. Allora

$$|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| = |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \leq$$
$$|f(x)|\,|g(x) - \ell_2| + |f(x) - \ell_1|\,|\ell_2| \leq 2M\varepsilon,$$

che implica la tesi.

Infine, mostriamo l'ultima delle proprietà elencate: fissiamo $\overline{\varepsilon} > 0$ e osserviamo che

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell_1}\right| = \frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|}.$$

Usando la definizione di limite con $\varepsilon = |\ell_1|/2$, possiamo trovare δ_1 tale che $|f(x)| \geq |\ell_1|/2$ quando $|x - x_0| < \delta_1$, $x \neq x_0$. A questo punto, basta riapplicare la definizione di limite con ε qualunque per stimare il numeratore: troviamo così un $\delta < \delta_1$ tale che

$$\frac{|f(x) - \ell_1|}{|f(x)||\ell_1|} < \frac{2\varepsilon}{|\ell_1|^2}$$

ogni qual volta $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$.

- *Limite di funzione composta:* Nel caso delle funzioni continue, l'enunciato è piuttosto semplice: la composizione di due funzioni continue è continua. In altre parole $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sono due funzioni definite (per semplicità) su tutto $\mathbf{R}$, ovunque continue, allora la funzione composta (funzione di funzione) $f(g(x))$ è pure lei continua: un risultato del tutto plausibile se ricordiamo la nostra pseudo-definizione di continuità.

  Per i limiti, occorre una certa cautela dovuta al fatto che nella definizione di limite non vogliamo tener conto del comportamento della funzione *nel punto in cui si calcola il limite.*

  Diamo un enunciato preciso, che implica evidentemente quanto detto sopra sulle funzioni continue:

  TEOREMA: Sia f definita in un intorno di x_0 tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, g definita in un intorno di y_0 tale che $\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$. Supponiamo poi *che g sia continua in y_0, oppure che si abbia $f(x) \neq y_0$ in un intorno di ${x_0}$*[2]*. Allora si ha*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell.$$

DIM.: Dimostriamo il risultato nel secondo caso: dato $\varepsilon > 0$, troviamo $\eta > 0$ tale che $|g(y) - \ell| < \varepsilon$ se $0 < |y - y_0| < \eta$.

Troviamo poi δ tale che, se $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - y_0| < \eta$ (e questa quantità è positiva, a patto di prendere η abbastanza piccolo, grazie all'ipotesi che $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0). Usando dunque la disuguaglianza valida per g, otteniamo

$$|g(f(x)) - \ell| < \varepsilon \quad \textit{se } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

Se poi g è continua in y_0, con la stessa notazione usata sopra avremo $g(y_0) = \ell$, per cui la disuguaglianza $|g(y) - \ell| < \varepsilon$ vale per $|y - y_0| < \eta$ (non c'è bisogno di supporre $y \neq y_0$). Q.E.D.

- *Continuità della funzione inversa:* se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente), allora esiste la funzione inversa $g : [f(a), f(b)] \to [a, b]$, (rispettivamente $g : [f(b), f(a)] \to [a, b]$), anch'essa continua. Questo risultato è "geometricamente evidente", ed una sua dimostrazione rigorosa sarà dedotta facilmente dal teorema di esistenza degli zeri e da una notevole proprietà delle funzioni crescenti o decrescenti.

  Per il momento, basti dire che questo implica ad esempio la continuità della funzione radice quadrata...

Abbiamo sostanzialmente usato il "teorema dei carabinieri" per far vedere che $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$... anche se a rigore avremmo avuto bisogno di mostrare che la funzione $\cos x$ è continua in 0: abbiamo dato per scontato che "$\cos x$ si avvicina a 1 quando x si avvicina a 0". Questo, fortunatamente, può essere dedotto dalle considerazioni appena fatte.

Anzitutto, abbiamo visto che per angoli acuti si ha $0 < \sin x \leq x$ (mentre per ragioni di simmetria avremo $x \leq \sin x < 0$ per $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$): grazie al teorema dei carabinieri deduciamo che $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

In altre parole, la funzione seno è continua in 0.

Sempre per angoli acuti (e positivi), da semplici considerazioni geometriche si ricava che $1 - \cos x < x$, da cui deduciamo subito che $1 - x < \cos x < 1$.

[2] A lezione vi ho fornito solo la *prima* di queste due verisioni del teorema!

Dal teorema dei carabinieri abbiamo allora $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ (per il limite a sinistra di 0, si ricordi che la funzione coseno è pari). In alternativa, possiamo usare il fatto che in un intorno di 0 vale $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, assieme alla continuità della radice quadrata e della funzione seno in 0.

In realtà seno e coseno sono funzioni continue ovunque: se $x_0 \in \mathbf{R}$ possiamo scrivere

$$\sin x = \sin(x_0 + (x - x_0)) = \sin x_0 \cos(x - x_0) + \cos x_0 \sin(x - x_0)$$

da cui si deduce facilmente che $\sin x$ è continua in x_0. In maniera analoga, la funzione $\cos x$ è continua in tutti i punti.

Introduciamo informalmente alcune variazioni sul tema: limiti destro e sinistro, limiti all'infinito e limiti infiniti (e mostriamo qualche esempio di ciascuno).

Se volete le definizioni precise, eccole: diremo innanzitutto che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x-x_0| < \delta$ implica $f(x) > M$ (e c'è una definizione analoga per il limite $-\infty$).

Limiti all'infinito: diciamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che $x > N$ implica $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Analogamente, si definisce il limite a $-\infty$, e anche i limiti infiniti all'infinito...

Si noti che per parlare di limite a $+\infty$ di una funzione f, basta che il dominio di f sia un insieme *illimitato superiormente*: in particolare, data una funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, ha senso chiedersi se esiste il $\lim_{n\to+\infty} f(n)$.

Osserviamo che il calcolo del limite di rapporti, prodotti e somme diventa complicato in alcuni casi particolarmente delicati, detti *forme indeterminate*.

Infatti non è difficile convincersi che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$. Invece, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, *(forma indeterminata* 0/0*)* non è cosí chiaro cosa succeda al limite del rapporto!

Questo per un buon motivo: il limite del rapporto di due funzioni che tendono entrambe a 0 può combinare *qualunque cosa*. Può essere un qualunque numero reale, essere infinito o non esistere. Per vederlo prendiamo $x_0 = 0$ e (i) $f(x) = g(x) = x$: in questo caso il limite del rapporto è 1; (ii) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$: in questo caso il limite è $+\infty$; (iii) $f(x) = x\sin(1/x)$, $g(x) = x$: in questo caso il limite non esiste.

Abbiamo visto anche degli esempi relativi alla forma indeterminata ∞/∞.

7 Lezione del 17/11/2008 (2 ore)

Oltre a $0/0$ e ∞/∞ ci sono anche altre forme indeterminate (cioè situazioni come quella vista la volta scorsa, in cui la sola conoscenza del limite delle funzioni f e g non permette di stabilire quanto fa il limite di f/g, $f \cdot g$, $f+g$ oppure f^g) sono ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0...

A titolo di esempio, abbiamo visto un po' di esempi di forme indeterminate in cui il limite sia nullo, finito, infinito oppure non esista...

Ecco di seguito un caso particolare importante di limite all'infinito... Una funzione definita su $\mathbf{N}$ si chiama *successione*. Di solito, per le successioni si adotta una notazione differente da quella usata per le funzioni: piuttosto che scrivere $f(n)$, si usa una scrittura del tipo $\{a_n\}$, dove il simbolo a_n rappresenta il valore della successione in $n \in \mathbf{N}$.

Facendo l'opportuna traduzione della definizione di limite in questo particolare caso, scopriamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che per $n \geq \overline{n}$ si abbia $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Abbiamo già visto che il limite di una funzione in un punto non necessariamente esiste, così come non necessariamente esiste il limite di una successione per $n \to +\infty$: per esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite.

Ci piacerebbe avere un risultato che dica almeno che le successioni *fatte in un certo modo* hanno limite. Ancora una volta, ci viene in aiuto la completezza di $\mathbf{R}$:

TEOREMA: Sia $\{a_n\}$ una successione crescente (cioè $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n). Allora $\{a_n\}$ ammette limite per $n \to +\infty$, e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\}.$$

Analogo risultato vale per successioni decrescenti: in questo caso il limite coincide con l'estremo inferiore dell'immagine della successione.

Dimostrazione: Sia $S = \sup\{a_n : \ n \in \mathbf{N}\}$. Supponiamo dapprima che sia $S \in \mathbf{R}$: vedremo poi il caso $S = +\infty$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome S è un maggiorante dei valori assunti dalla successione, abbiamo che $a_n \leq S < S + \varepsilon$ per ogni n. D'altra parte, $S - \varepsilon$ *non* è più un maggiorante (per definizione di sup), per cui esiste un elemento della successione, chiamiamolo $a_{\overline{n}}$, tale che $a_{\overline{n}} > S - \varepsilon$. Siccome la successione è crescente, se $n \geq \overline{n}$ si ha $a_n \geq a_{\overline{n}} > S - \varepsilon$.

Mettendo insieme le due disuguaglianze ottenute sopra, abbiamo che per $n > \overline{n}$ si ha $|a_n - S| < \varepsilon$.

Se poi $S = +\infty$, l'immagine della successione non ammette maggioranti. Dunque, per ogni fissato $M > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che $a_{\overline{n}} > M$. Per la crescenza della successione abbiamo allora $a_n \geq a_{\overline{n}} > M$ per ogni $n \geq \overline{n}$ e dunque $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ Q.E.D.

In maniera del tutto analoga, si mostra che una funzione crescente ammette limite a $+\infty$, e che questo limite è uguale al sup. Ancora, una funzione crescente $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *ammette limite destro e sinistro in ogni punto*: precisamente,

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) :\ x < x_0\}, \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) :\ x > x_0\}.$$

Usiamo ora il teorema sui limiti delle successioni monotone per *definire il numero di Nepero e (la base dei logaritmi naturali)*: poniamo *per definizione*

$$e = \lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Naturalmente, occorre far vedere che questo limite *esiste ed è finito*!

L'idea della dimostrazione non è difficile: si mostra dapprima che la successione $a_n = (1 + 1/n)^n$ è crescente (e quindi il limite esiste!), dopodiché si fa vedere che la successione è superiormente limitata (e quindi il limite è finito. Nessuno dei due passi è però immediato, ragione per cui ho preferito risparmiarvi la dimostrazione!

Per gli interessati, la riporto di seguito:La crescenza della successione può essere dimostrata usando la disuguaglianza di Bernoulli[3]: dobbiamo far vedere che $a_n \geq a_{n-1}$ per ogni numero naturale $n \geq 1$. Ora, manipolando un po' la disuguaglianza da dimostrare si vede che questa equivale a $(\frac{n^2-1}{n^2})^n \geq (\frac{n-1}{n})$, cioè a $(1 - \frac{1}{n^2})^n \geq (1 - \frac{1}{n})$: ma questo è esattamente quel che ci dice la disuguaglianza di Bernoulli! (In realtà, potremmo anche far vedere che la successione a_n è strettamente crescente...)

Per mostrare poi che il limite è finito, occorre mostrare che la successione è superiormente limitata. Per far questo prendiamo la successione $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$, e mostriamo che questa è *decrescente*. Infatti, manipolandola un po' ci si rende conto che la disuguaglianza $b_n \leq b_{n-1}$ è equivalente alla seguente:

$$1 + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n.$$

D'altra parte, grazie alla disuguaglianza di Bernoulli abbiamo

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2 - 1} = 1 + \frac{1}{n - \frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n},$$

come volevamo.

Si ha allora $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$, e possiamo essere certi che e è un numero reale compreso tra 2 e 4.

Evidentemente, si possono avere stime migliori prendendo n grande, in quanto $a_n < e < b_n$...

La prossima volta vedremo come, dalla definizione del numero di Nepero, derivano alcuni limiti fondamentali che ci accompagneranno durante tutto il corso. Questi limiti sono anche la ragione per "preferire" gli esponenziali in

[3] La disuguaglianza di Bernoulli afferma che $(1 + a)^n \geq 1 + na$ se $a > -1$ e $n \in \mathbf{N}$. Essa può essere dimostrata facilmente utilizzando il *principio di induzione*, procedendo come segue. Per $n = 0$ la disuguaglianza è ovviamente vera. Supponiamola vera per un certo n: allora $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n\ (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$, che dimostra il passo induttivo. Si noti che, in realtà, per $n \geq 2$, $a \neq 0$ la disuguaglianza è stretta!

base e agli altri esponenziali, e per preferire i logaritmi in base e agli altri logaritmi: il prezzo che si paga scegliendo questo strano numero irrazionale come base degli esponenziali e dei logaritmi sarà ben compensato da tutta una serie di semplificazioni nei nostri conti!

8 Lezione del 20/11/2008 (2 ore)

Dalla definizione del numero di Nepero e deriva il seguente *limite fondamentale* (di funzione reale!):

$$\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e.$$

La cosa può essere dimostrata senza troppa difficoltà giocando con le parti intere: ricordo che il simbolo $[x]$ indica *il più grande numero intero minore o uguale a* x, da cui si ha evidentemente $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]} = e$ grazie alla definizione del numero e. Inoltre, per $x>0$ valgono le ovvie disuguaglianze

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Ora, è immediato verificare che la funzione a sinistra e quella a destra tendono entrambe ad e (grazie all'osservazione fatta sopra), e il risultato voluto segue dal teorema dei carabinieri.

Usando il limite fondamentale dimostrato sopra, e la continuità della funzione esponenziale e della funzione logaritmo (per il momento diamola per buona: la dimostreremo tra poco!), possiamo dimostrare senza eccessiva difficoltà che

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

e che

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Per dimostrare il primo limite, possiamo cominciare a far vedere che $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ (questo è un semplice esercizio), da cui $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$ (basta "cambiare variabile" ponendo $y = 1/x$... è anche opportuno distinguere il limite destro e il limite sinistro). Il limite voluto segue allora prendendo il logaritmo in base e (ricordando anche il teorema sul limite di funzione composta: prendiamo per buona la continuità della funzione logaritmo!). Il secondo dei due limiti fondamentali segue invece dal primo con il "cambio di variabile" $y = e^x - 1$ (anche in questo caso, ci serve la continuità della funzione esponenziale per dire che $y \to 0$ quando $x \to 0$).

Verifichiamo finalmente che le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ (con $a > 0$, $a \neq 1$) sono continue. Grazie alle proprietà delle potenze, è sufficiente verificarne la continuità in $x_0 = 0$: ci basta far vedere che $\lim_{x\to 0} a^x = 1$.

Supponiamo per fissare le idee che sia $a > 1$ (la generalizzazione al caso $0 < a < 1$ è lasciata per esercizio: basti osservare che $a^x = (1/a)^{-x}$...). Cominciamo col mostrare che vale il limite di successione

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Definiamo $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$: questa è una successione positiva, ed il nostro limite sarà provato se facciamo vedere che $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Ora, si vede subito che $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$ (dove per l'ultimo passaggio usiamo la disuguaglianza di Bernoulli), da cui $0 < b_n \leq \frac{a-1}{n}$. Il limite segue allora dal teorema dei carabinieri. Sia ora $\varepsilon > 0$. Troviamo $\overline{n} \in \mathbf{N}$ tale che $a^{1/n} < 1+\varepsilon$. Siccome la funzione esponenziale è crescente, se ne deduce che $1 < a^x < 1+\varepsilon$ se $0 < x < \frac{1}{\overline{n}}$, per cui $\lim_{x\to 0^+} a^x = 1$. Per mostrare che anche il limite sinistro ha lo stesso valore, basta osservare che $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$...

Cosa dire della continuità di logaritmi, radici, funzioni trigonometriche inverse? Essa segue da un fatto generale: mostreremo tra breve che *l'inversa* di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo, è anche lei continua!

Facciamo ancora un esercizio guidato per dimostrare due limiti fondamentali molto utili: visto che la volta scorsa abbiamo parlato della funzione esponenziale e delle sue proprietà, questo è un buon momento per farlo!

ESERCIZIO: Si provino i due seguenti *limiti fondamentali:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0$$

per ogni $a > 1$ e per ogni $b > 0$.

[SUGGERIMENTO: Cominciamo con l'osservare che, grazie alla disuguaglianza di Bernoulli, $a^n/\sqrt{n} = (1 + (a-1))^n/\sqrt{n} \geq (1 + n(a-1))/\sqrt{n} = 1/\sqrt{n} + \sqrt{n}(a-1) \to +\infty$*, e quindi* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}} = +\infty$.

Si ha poi, per $x > 0$,

$$\frac{a^x}{\sqrt{x}} \geq \frac{a^{[x]}}{\sqrt{[x]+1}} = \frac{a^{[x]+1}}{a\sqrt{[x]+1}}.$$

La quantità a destra, per $x \to +\infty$ *tende a* $+\infty$ *grazie al limite di successione appena visto. Ne consegue che* $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Da questo segue facilmente il primo dei due limiti fondamentali scritti sopra, in quanto

$$\frac{a^x}{x^b} = \left(\frac{(a^{\frac{1}{2b}})^x}{\sqrt{x}} \right)^{2b} \ldots$$

(Per fare il limite di funzione composta serve la continuità della funzione $g(y) = y^{2b}$ con $y \geq 0$... Questa è una conseguenza della continuità di esponenziale e logaritmo in quanto $y^{2b} = e^{2b \log x}$.)

Per verificare il secondo "limite fondamentale", è sufficiente cambiare variabile ponendo $y = \log x$.]

Uno dei risultati fondamentali sulle funzioni continue, è il
TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione *continua* tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Questo teorema dall'aria innoqua si rivela in realtà assai utile. Per esempio, consideriamo la funzione continua $f(x) = x^2 - a$ (con $a > 0$) sull'intervallo $[0, a+1]$. Si vede subito che $f(0) = -a < 0$, mentre $f(a+1) = a^2+a+1 > 0$. Il teorema ci assicura che esiste un punto c dell'intervallo tale che $c^2 - a = 0$: abbiamo così dimostrato che esiste la radice quadrata di a. Essa è poi unica perché la funzione considerata è strettamente crescente sulla semiretta dei reali positivi (e quindi non si può annullare due volte).

In maniera analoga possiamo dimostrare l'esistenza del logaritmo, delle funzioni trigonometriche inverse, delle radici di ogni ordine....Non sarà nemmeno difficile verificare che tutte queste funzioni sono continue.

Vedremo la prossima volta la dimostrazione di questo teorema.

9 Lezione del 21/11/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)

Per questa esercitazione ho pescato a piene mani dalla lista di esercizi preparata da Stefano Zambon[4] per i matematici applicati e gli informatici multimediali, e anche da due liste di esercizi (questa[5] e questa[6]), preparate da Elisabetta Barozzi per i matematici di Trento. Noterete che c'è ampio materiale per continuare ad esercitarsi a casa!!!

[4] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/aa2008/esercizi_02.pdf`

[5] `http://www.science.unitn.it/~barozzi/06-07/Eser-finanziaria/Eser-finanziaria.pdf`

[6] `http://www.science.unitn.it/~barozzi/06-07/Eser-dirottamento/Eser-dirottamento.pdf`

10 Lezione del 24/11/2008 (2 ore)

Propongo due diverse dimostrazioni del teorema di esistenza degli zeri (in aula abbiamo visto solo la prima, tralasciando un po' di dettagli!).

PRIMA DIMOSTRAZIONE (lunghetta ma istruttiva...): Usiamo il cosiddetto *metodo di bisezione.* Sia $d = (b-a)/2$ il punto medio dell'intervallo $[a,b]$: se $f(d) = 0$ siamo felicissimi perché abbiamo trovato il punto voluto, in caso contrario avremo $f(d) < 0$ oppure $f(d) > 0$. In ogni caso, in uno dei due "mezzi intervalli" $[a,d]$ oppure $[d,b]$ si ripropone la situazione di partenza: f è negativa nell'estremo sinistro dell'intervallo, positiva nell'estremo destro. Chiamiamo $[a_1, b_1]$ il semiintervallo che gode di questa proprietà.

Ripetiamo poi la stessa costruzione: prendiamo il punto di mezzo dell'intervallo $[a_1, b_1]$ e osserviamo che se la funzione non si annulla nel punto di mezzo (ma se così fosse avremmo finito), in uno dei due mezzi intervalli che chiameremo $[a_2, b_2]$ si ripropone la situazione di partenza: $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$.

Iteriamo questa costruzione: se il processo non si arresta perché troviamo un punto in cui la funzione si annulla, avremmo individuato una successione infinita di intervalli $[a_n, b_n]$, ciascuno contenuto nel precedente e tali che $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Per costruzione abbiamo che la successione degli estremi sinistri a_n è crescente, la successione degli estremi destri b_n è decrescente e inoltre $b_n - a_n = (b-a)/2^n$. Siccome una successione crescente e limitata ammette limite finito, esisterà il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$, ed evidentemente $c \in [a,b]$.

È evidente che si ha anche $\lim_{n\to+\infty} b_n = c$ per quanto osservato sopra sulla differenza tra a_n e b_n. Grazie alla continuità di f, si ha poi

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) \qquad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c).$$

D'altra parte, il primo limite deve essere necessariamente ≤ 0 in quanto limite di una successione di numeri negativi, mentre il secondo deve essere ≥ 0 in quanto limite di una successione di numeri positivi: siccome i due limiti sono entrambi uguali a $f(c)$, ne deriva che $f(c) = 0$. Q.E.D.

DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA: Vogliamo proporre un'altra dimostrazione del teorema, leggermente più rapida.

Poniamo $c = \sup A$, dove $A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$. Questo è evidentemente un numero reale compreso tra a e b. Dico che $f(c) = 0$.

Infatti, se per assurdo avessimo $f(c) > 0$, per definizione di limite avremmo $f(x) > 0$ anche per tutti gli x in un certo intorno sinistro $[c-\delta, c]$ di

c[7]. Quindi $c - \delta$ sarebbe un maggiorante di A più piccolo di c, contro la definizione di estremo superiore.

Se poi fosse $f(c) < 0$, dovrebbe essere $c < b$ (perché $f(b) > 0$). Per lo stesso motivo di prima, troveremmo $\delta > 0$ tale che $f(x) < 0$ per $x \in [c, c+\delta]$, e c non sarebbe più un maggiorante di A. Q.E.D.

Un immediato corollario del teorema di esistenza degli zeri è il seguente

TEOREMA (dei valori intermedi): Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua, essa assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Dimostrazione: Sia y_0 un valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Basta applicare il Teorema di esistenza degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - y_0$...
Q.E.D.

Da questo teorema segue che se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e strettamente crescente (che è evidentemente iniettiva!), essa è *suriettiva* sull'intervallo $[f(a), f(b)]$: in altre parole, essa è *invertibile*. Questo ci assicura l'esistenza di radici, logaritmi, funzioni inverse delle funzioni trigonometriche...

Sarebbe però piacevole sapere che queste funzioni inverse sono continue! La risposta si può facilmente desumere dal seguente

TEOREMA (Continuità delle funzioni monotone): Una funzione crescente $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è continua se e solo se prende tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. Un risultato analogo vale per le funzioni decrescenti.
DIM.: Se f è continua, la tesi è una conseguenza immediata del Teorema dei valori intermedi. Viceversa, supponiamo che f *non sia continua*, e sia x_0 un suo punto di discontinuità (supponiamo per semplicità $x_0 \in (a,b)$: le semplici modifiche necessarie nei casi $x_0 = a$ o $x_0 = b$ sono lasciate per esercizio).

Abbiamo visto che le funzioni crescenti ammettono sempre limite destro e sinistro, che evidentemente devono essere diversi in x_0:

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : \ a \le x < x_0\} < \\ \ell_2 &= \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : \ x_0 < x \le b\}.\end{aligned}$$

Per la crescenza di f, segue subito che $f([a,b])$ contiene al più un punto dell'intervallo aperto (ℓ_1, ℓ_2), ossia il valore $f(x_0)$ se questo non coincide con uno dei due limiti: come si vede, in questo caso f non può assumere tutti i

[7]Questo semplice fatto è noto come *teorema della permanenza del segno*: se una funzione ha limite positivo in x_0, allora è positiva in un intorno di x_0 (con la possibile esclusione di x_0).

valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.
Q.E.D.

Da quest'ultimo teorema segue che *la funzione inversa di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo* $[a, b]$*, è anch'essa continua.* Infatti, la funzione inversa sarà una funzione strettamente crescente da $[f(a), f(b)]$ in $[a, b]$ che, per come è definita, prende *tutti* i valori compresi nell'intervallo di arrivo: il teorema precedente ci garantisce allora che essa è continua.

Sono in particolare continue le radici, i logaritmi, le funzioni trigonometriche inverse...

Un altro, importante risultato sulle funzioni continue è il

TEOREMA (di Weierstrass): Una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *ammette massimo e minimo. (Attenzione: è importante che il dominio della funzione sia un intervallo chiuso e limitato, e che la funzione sia continua. Abbiamo visto con qualche esempio che senza queste ipotesi la tesi può anche essere falsa!).*

In classe non abbiamo dato una dimostrazione completa del teorema di Weierstrass, limitandoci ad abbozzare una possibile strategia di dimostrazione che usa il metodo di bisezione: l'idea di base è che il sup di una funzione su un intervallo è il *massimo* tra i sup della funzione sulle due metà dell'intervallo stesso. Continuando a dividere in due, si trova una successione di intervalli sempre più piccoli (ciascuno la metà del precedente), su cui la funzione ha lo stesso estremo superiore che aveva sull'intervallo di partenza $[a, b]$. Non è difficile verificare, usando la continuità di f, che l'unico punto comune di questi intervalli è proprio il punto di massimo che volevamo trovare. Analogo discorso vale per il minimo...

Concluso il nostro studio delle funzioni continue, è giunto il momento di avvicinarci al calcolo differenziale. Cominciamo dunque a introdurre il fondamentale concetto di derivata di una funzione.

Supponiamo di avere una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, e di voler capire come è fatto il suo grafico: questo può avere un notevole interesse applicativo, per esempio se vogliamo massimizzare o minimizzare una quantità fisica rappresentata da f.

Se guardiamo il grafico di una funzione "a caso" (che sia però abbastanza regolare: supponiamo che il grafico sia una linea continua e senza spigoli vivi), ci accorgiamo che ci sarebbe estremamente utile saper identificare i tratti "in salita" e i tratti "in discesa" del grafico della funzione! Per far questo, abbiamo bisogno di una definizione di *pendenza del nostro grafico in un punto.*

Se la funzione è un polinomio di primo grado, cioè se $f(x) = mx + q$, il grafico è una retta e la risposta è facilissima: la pendenza del grafico (in senso "stradale": rapporto tra quanto si sale e quanto ci si sposta in orizzontale!) è data *dal coefficiente angolare m.* In sostanza, per chi si sposta da sinistra verso destra, se $m > 0$ il grafico è in "salita", se $m = 0$ è "piano" e se $m < 0$ è in "discesa"!

Se prendiamo però una funzione il cui grafico non sia una retta, la pendenza non sarà più costante, ma potrà cambiare da punto a punto. Vedremo la prossima volta come affrontare questo problema!

11 Lezione del 27/11/2008 (2 ore)

Vediamo dunque come possiamo definire la "pendenza" del grafico di una funzione reale di variabile reale in un suo punto di ascissa x_0: se prendiamo due punti *abbastanza vicini* sulla retta reale, x_0 e x_0+h, è ragionevole pensare che la "pendenza" del grafico di f in x_0 (qualunque cosa questo significhi!), sia vicina alla pendenza della retta che passa per i due punti corrispondenti sul grafico, $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0)+h)$. Tale pendenza è data dall'espressione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

detta "rapporto incrementale".

E' ragionevole supporre che prendendo h sempre più piccolo (e quindi i due punti sempre più vicini), avremo un'approssimazione sempre migliore della pendenza del grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. Diamo dunque la seguente

DEFINIZIONE: La pendenza del grafico di f per $x = x_0$ si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Essa si definisce ponendo

$$f'(x_0) =_{def} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

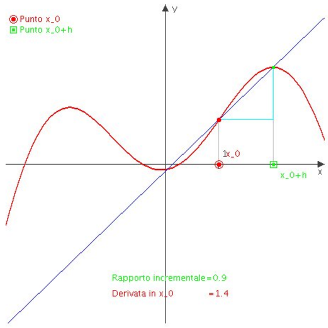
purché il limite esista finito.

Se il limite non esiste o è infinito, non è definita la pendenza e diciamo che la funzione non è derivabile in x_0.

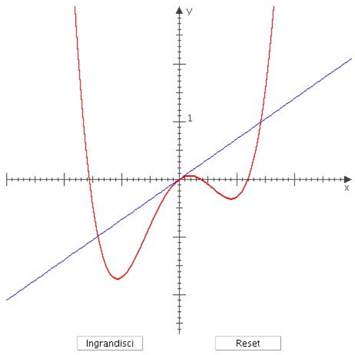
In particolare, se $f'(x_0)$ esiste, la *retta tangente* al grafico di f per $x = x_0$ sarà la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ la cui pendenza coincide con quella del grafico stesso: essa avrà dunque equazione $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Per visualizzare meglio la definizione di derivata, vi propongo una animazione interattiva[8]:

[8] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/vecchicorsi/aa2001/SSIS/derivata/index.html`



I più curiosi potranno trovare nella stessa pagina anche un modo alternativo di vedere la retta tangente, come "limite di ingrandimenti del grafico di f attorno a $(x_0, f(x_0))$":



Diamo altre possibili interpretazioni del rapporto incrementale e della derivata: velocità media e velocità istantanea di un corpo che si muove di moto rettilineo, velocità media e istantanea di una reazione chimica, tasso di interesse (o tasso di aumento dell'inflazione...).

Un risultato assai semplice ma importante è il seguente

TEOREMA: Se f è una funzione definita in un intorno di x_0 derivabile in x_0, allora f è anche continua in x_0.

Dimostrazione: Si ha

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h = 0.$$

Infatti, nell'ultima espressione la frazione tende a $f'(x_0)$, mentre il fattore h tende a 0.
Q.E.D.

Osserviamo che il viceversa non è vero: una funzione può essere continua ma non derivabile in un punto, come ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ in 0.

Come abbiamo fatto con i limiti, possiamo chiederci cosa sia la derivata della somma, del prodotto o del rapporto di due funzioni:

TEOREMA (Algebra delle derivate): Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di x_0, derivabili in x_0.

(i) La somma di f e g è derivabile in x_0, e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

(ii) Il prodotto di f e g è derivabile in x_0, e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

(iii) se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dimostrazione: La (i) è praticamente ovvia (il rapporto incrementale della somma è la somma dei rapporti incrementali...

Dimostriamo la (ii): abbiamo

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$
$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0+h) + f(x_0)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

e passando al limite per $h \to 0$ (tenendo conto anche della continuità delle funzioni derivabili) si ottiene (ii).

Per dimostrare la (iii), calcoliamoci la derivata di $1/g(x)$: dobbiamo fare

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} =$$
$$-\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

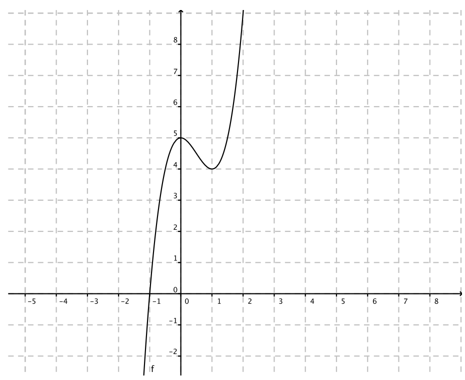
La (iii) segue allora immediatamente usando la formula appena ricavata e la (ii). Q.E.D.

Usando queste semplici regole, e la stessa definizione di derivata, verifichiamo senza difficoltà che $(x^n)' = nx^{n-1}$ per $n \in \mathbf{Z}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $(e^x)' = e^x$ (e analogamente $(a^x)' = a^x \log a$), $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

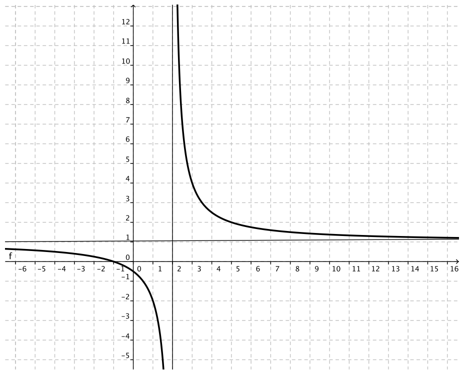
12 Lezione del 28/11/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)

In questa esercitazione ci siamo divertiti a calcolare la derivata di alcune funzioni $f(x)$. Studiando il segno di $f'(x)$ ed altre informazioni facilmente ricavabili dall'espressione di f, abbiamo poi provato a disegnare dei grafici il più accurati possibili delle nostre funzioni:

1. Proviamo a studiare il grafico della cubica $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. La derivata è $f'(x) = 6x^2 - 6x$: essa si annulla per $x = 0$ e $x = 1$, è positiva per $x < 0$ e per $x > 1$, mentre è negativa per $0 < x < 1$. Se ne deduce che il grafico di f "è in salita" per $x_0 < 0$, in "discesa" tra 0 e 1, e di nuovo "in salita" per $x_0 > 1$... Se calcoliamo f in 1 e in 0, e osserviamo che $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ possiamo tracciare un grafico ragionevolmente preciso di f! Ancora meglio se osserviamo che la nostra funzione si annulla solo per $x = -1$...

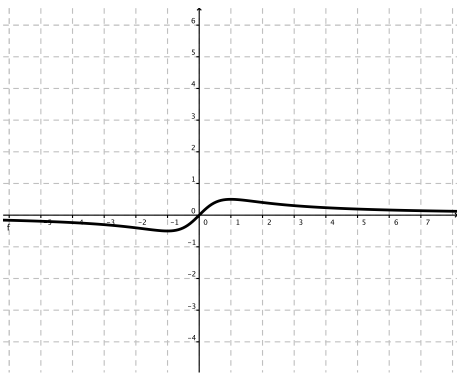


2. Studiamo la funzione $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Essa è definita per $x \neq 2$. Calcoliamo la derivata: otteniamo $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$, negativa nel dominio di f. La nostra funzione sarà dunque "in discesa" sia per $x < 2$ che per $x > 2$. In $x = 2$, il limite destro vale $+\infty$, mentre il limite sinistro vale $-\infty$. I limiti a $\pm\infty$ valgono entrambi 1. Infine, osserviamo che f è positiva per $x < -1$ e $x > 2$, negativa tra -1 e 2 (e si annulla solo in $x = -1$). Questo ci consente di disegnare un grafico abbastanza accurato della funzione:

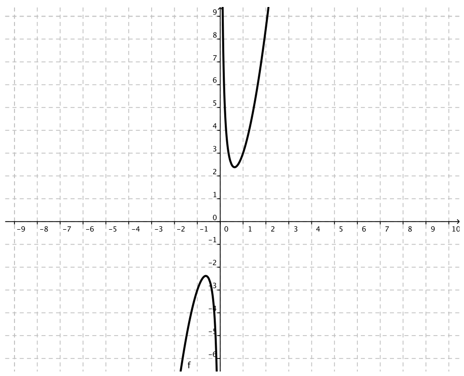


In realtà, avremmo potuto ottenere più velocemente lo stesso risultato se ci fossimo accorti che $f(x) = \frac{x-2+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$: il grafico della nostra funzione è un'iperbole opportunamente traslata.

3. Studiamo poi $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Si tratta di una funzione definita ovunque, dispari (cambia di segno cambiando di segno la x), positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Inoltre, la funzione tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Abbiamo poi $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, che è positiva tra -1 e 1, negativa sulle due semirette complementari. Il grafico è dunque come segue:

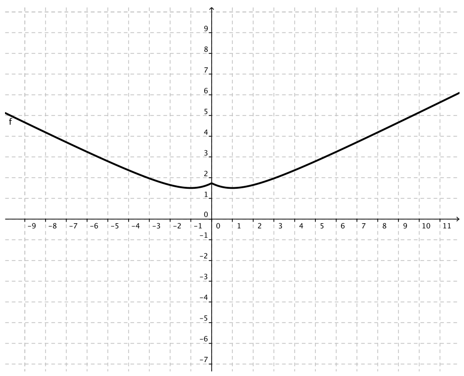


4. Studiamo la funzione $f(x) = 2x|x| + \frac{1}{x}$, definita per $x \neq 0$. La presenza del modulo potrebbe esserci sgradita...ma tutto diventa più semplice se osserviamo che la funzione è dispari: $f(-x) = -f(x)$. Ci basta dunque studiare la funzione per $x > 0$ perché il grafico risulterà simmetrico rispetto all'origine. Per $x > 0$ la funzione è semplicemente $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$, funzione positiva la cui derivata vale $f'(x) = 4x - \frac{1}{x^2}$. Sempre per $x > 0$, questa funzione è negativa tra 0 e $2^{-2/3}$, positiva per $x > 2^{-2/3}$. Il limite della funzione è $+\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to 0^+$. Il grafico sarà dunque come segue:



A proposito di questa funzione, è un esercizio istruttivo studiare la derivabilità (in 0) della funzione $f(x) = 2x|x|$.

5. Studiamo infine la seguente funzione: $f(x) = \sqrt{x^2+3} - \frac{1}{2}|x|$. Questa volta, osserviamo che si tratta di una funzione pari: $f(-x) = f(x)$. Il suo grafico sarà dunque simmetrico rispetto all'asse delle y, per cui ci basta studiarla per $x > 0$. La derivata sulla semiretta dei reali positivi è $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{1}{2} = \frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{2\sqrt{x^2+3}}$ (in classe, abbiamo calcolato la derivata della radice usando la definizione di derivata: il conto diventerà immediato quando avremo a disposizione la formula di derivazione della funzione composta). Questa derivata è positiva per $x > 1$. La derivata destra in $x = 0$ vale $-\frac{1}{2}$: a causa della simmetria della funzione rispetto all'asse delle y, $x = 0$ sarà dunque un punto angoloso. Infine, possiamo fare il limite di f per $x \to +\infty$ (stando attenti alla forma indeterminata: conviene moltiplicare e dividere per $2\sqrt{x^2+3} - x$): otteniamo facilmente che il limite vale $+\infty$. Ecco dunque il grafico:



13 Lezione del 1/12/2008 (2 ore)

Per cominciare bene la settimana e il mese, vediamo come si deriva una funzione composta:

TEOREMA (Chain Rule): Sia f una funzione definita in un intorno di x_0, derivabile in x_0, e sia g una funzione definita in un intorno di $y_0 = f(x_0)$, derivabile in y_0. Allora la funzione composta $g \circ f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dimostrazione: In classe abbiamo visto solo un *argomento euristico* a favore della tesi del teorema: abbiamo preso il rapporto incrementale per $f(g(x))$ e l'abbiamo diviso e moltiplicato per $g(x_0+h)-g(x_0)$, ottenendo così facilmente la tesi dopo un semplice passaggio al limite...

Peccato che, così facendo, ci sia il concreto rischio di dividere per 0! Per ovviare a questo non trascurabile problemino, si potrebbe procedere come segue.

Introduciamo la seguente funzione ausiliaria, definita in un intorno di 0:

$$A(k) = \begin{cases} \dfrac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} & se\ k \neq 0, \\ g'(y_0) & se\ k = 0. \end{cases}$$

Evidentemente, questa funzione è *continua in* 0, per definizione di derivata.

Costruiamo ora il rapporto incrementale della funzione $g \circ f$, e passiamo al limite per $h \to 0$:

$$\frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} =$$
$$A(f(x_0 + h) - f(x_0))\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \to g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Q.E.D.

Usando questa formula possiamo calcolarci altre derivate. Per esempio, se $x > 0$ e $a \in \mathbf{R}$ abbiamo: $(x^a)' = (e^{a \log x})' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$.

Analogamente

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \log f(x)})' = \ldots$$

Ci poniamo ora la questione della derivabilità dell'inversa di una funzione derivabile(ed invertibile).

TEOREMA (Derivata della funzione inversa): Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione continua e strettamente crescente, $g : (c, d) \to (a, b)$ la sua inversa (con $c = f(a)$, $d = f(b)$). Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. In altre parole,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Dimostrazione: Abbiamo omesso anche questa dimostrazione, limitandoci a fare la seguente considerazione euristica: se *sapessimo già* che g è derivabile in y_0, potremmo derivare ambo i membri dell'identità $y = f(g(y)$ nel punto y_0, ottenendo subito $1 = f'(g(y_0))g'(y_0)$ (che è proprio la formula nella tesi). Siccome però tale derivabilità deve essere dimostrata come parte della tesi, la dimostrazione completa è leggermente più complicata:

Siccome non sappiamo che g è derivabile in y_0, dobbiamo proprio trovare il limite del rapporto incrementale $(g(y_0 + h) - g(y_0))/h$ per $h \to 0$.

Se poniamo $y_0 + h = f(x_0 + k)$, applicando la g ad ambo i membri troviamo $g(y_0 + h) = x_0 + k = g(y_0) + k$, da cui $g(y_0 + h) - g(y_0) = k$. Siccome sappiamo che con le nostre ipotesi la funzione inversa g è continua, vediamo che quando $h \to 0$ anche $k \to 0$. Dunque

$$g'(y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{f(x_0 + k) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Q.E.D.

Utilizziamo il teorema di derivazione della funzione inversa per trovare la derivata di $\arcsin y$:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin)'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos\arcsin y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

In maniera del tutto analoga troviamo che $(\arccos y)' = -1/\sqrt{1 - y^2}$, e che $(\arctan y)' = 1/(1 + y^2)$ (per quest'ultima formula, si ricordi l'identità $\cos^2\alpha = 1/(1 + \tan^2\alpha)$.

Ora abbiamo a disposizione un arsenale di risultati sufficiente a calcolare le derivate di tutte le funzioni esprimibili in termini di funzioni elementari tramite operazioni algebriche e di composizione. Quindi, in linea di principio, siamo in grado di studiare l'andamento di un gran numero di funzioni studiando il segno delle loro derivate.[9]

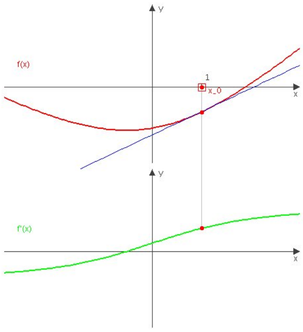
Per determinare in modo più accurato l'andamento del grafico di una funzione, è utile saper trovare gli intervalli di concavità e di convessità del grafico stesso: bisogna cioè saper determinare se, in un certo intervallo, la funzione "fa la pancia" verso il basso o verso l'alto....

Prima di proseguire nella lettura, potete esaminare la seguente introduzione interattiva alle funzioni convesse...[10]

---

[9] A rigore, bisogna dire che per ora abbiamo solo "intuito" che una funzione con derivata positiva su un intervallo è crescente in tale intervallo: l'effettiva dimostrazione di questo plausibilissimo fatto verrà data in seguito!

[10] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/vecchicorsi/aa2001/SSIS/funzioniconvesse/index.html`



Cominciamo con una definizione rigorosa di convessità *per una funzione derivabile*: in realtà, si può dare una definizione più generale, valida anche per funzioni non derivabili.

Definizione: Diciamo che una funzione derivabile $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è *convessa sull'intervallo* $[a, b]$ se il grafico di f giace tutto al di sopra di ogni retta tangente al grafico stesso, condotta per un punto qualunque di $[a, b]$. Con linguaggio simbolico, vogliamo che per ogni $x_0 \in [a, b]$ e per ogni $x \in [a, b]$ valga

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Se vale sempre la disuguaglianza opposta, diremo che la funzione è *concava*.

Se disegnamo il grafico di una funzione convessa, osserviamo come la pendenza delle rette tangenti cresca man mano che il punto di tangenza si sposta verso destra: in effetti, questa è una caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili, come avremo modo di verificare la prossima volta.

14 Lezione del 4/12/2008 (2 ore)

Vediamo la caratterizzazione delle funzioni convesse di cui abbiamo parlato la volta scorsa:

TEOREMA: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile. Allora f è convessa se e solo se la funzione derivata f' è *crescente* sull'intervallo $[a, b]$.

In aula abbiamo omesso la dimostrazione di questo teorema, limitandoci ad osservare che esso è quantomai plausibile: si riveda anche l'animazione interattiva che vi ho proposto la volta scorsa.

Chi volesse sapere lo stesso come si dimostra il teorema, può leggere la parte che segue:

Dimostrazione: Supponiamo che f sia convessa, e prendiamo x_1, x_2 in $[a, b]$. Per la disuguaglianza di convessità abbiamo

$$f(x) \geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1),$$
$$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2),$$

disuguaglianze valide per ogni $x \in [a,b]$. In particolare, prendiamo $x = x_2$ nella prima disuguaglianza, $x = x_1$ nella seconda, e sommiamo: si ottiene

$$(f'(x_1) - f'(x_2)) \cdot (x_2 - x_1) \leq 0,$$

che è proprio la crescenza della funzione derivata.

Viceversa, supponiamo che la funzione f' sia crescente e prendiamo $x_0 \in [a,b]$. Consideriamo la funzione derivabile $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$. Si ha $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, per cui g' è una funzione crescente che è negativa per $x < x_0$, mentre è positiva per $x > x_0$. Ne deduciamo che la funzione *g ha un minimo assoluto per $x = x_0$*. Poichè $g(x_0) \geq 0$, abbiamo $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$: questa è proprio la disuguaglianza di convessità!

Q.E.D.

Grazie a questo teorema, abbiamo un comodo criterio di convessità per funzioni la cui derivata sia ancora derivabile (ossia per funzioni derivabili due volte): una funzione f derivabile due volte in un intervallo sarà *convessa* se $f''(x) \geq 0$ per ogni x nell'intervallo, sarà invece *concava* se $f''(x) \leq 0$ in ogni punto x dell'intervallo[11].

Passiamo ora ad esaminare con le dovute cautele un fatto che abbiamo usato sinora con indebita disinvoltura. Infatti, abbiamo osservato che siccome la derivata corrisponde geometricamente alla "pendenza del grafico", se una funzione ha derivata positiva in un intervallo, essa sarà crescente in esso.

Questo fatto è intuitivamente molto plausibile, perché non si vede come una funzione possa avere il grafico "in salita" in tutti i punti di un intervallo senza essere anche crescente! D'altra parte, non ne abbiamo vista alcuna dimostrazione rigorosa: tale dimostrazione è lo scopo dei discorsi che seguono.

Cominciamo col ricordare la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Un punto $x_0 \in [a,b]$ si dice di *massimo relativo* (risp., di minimo relativo) per f se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ (risp., $f(x) \geq f(x_0)$) per ogni $x \in I_{x_0} \cap [a,b]$.

Veniamo ad un primo, semplice risultato: se una funzione è derivabile in un punto di *massimo o minimo relativo interno* all'intervallo di definizione, in quel punto la derivata si deve annullare:

TEOREMA (Principio di Fermat): Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $x_0 \in (a,b)$ un punto di massimo o minimo relativo per f. Se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo per fissare le idee che x_0 sia di minimo relativo.

Consideriamo il rapporto incrementale per f in x_0:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

[11] Abbiamo usato il fatto che una funzione derivabile è crescente se e solo se la sua derivata è non negativa: questo è intuitivamente vero, e verrà dimostrato con tutti i crismi tra pochissimo!

Se prendiamo h abbastanza piccolo, in modo che x_0+h appartenga all'intorno I_{x_0} nella definizione di minimo relativo, vediamo subito che il numeratore è maggiore o uguale a 0. Ne consegue che il rapporto incrementale sarà positivo (o nullo) per $h > 0$ abbastanza piccolo, e negativo (o nullo) per $h < 0$ abbastanza piccolo in modulo. Ne segue che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

e contemporaneamente

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Dunque, $f'(x_0) = 0$, Q.E.D.

Si noti che questo teorema può essere falso per punti di massimo o minimo relativo che siano *agli estremi* dell'intervallo su cui f è definita. Per esempio, si consideri la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo $[0,1]$...

Due conseguenze di questo principio sono i teoremi di Rolle e di Lagrange, che sono tra i risultati più importanti del calcolo differenziale per funzioni di una variabile:

TEOREMA (di Rolle): Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *una funzione continua, derivabile nell'intervallo* (a,b). *Se* $f(a) = f(b)$, *allora esiste un punto* $c \in (a,b)$ *tale che* $f'(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE: Grazie al teorema di Weierstrass, la funzione possiede un punto di massimo assoluto x_M, e uno di minimo assoluto x_m.

Se uno di questi punti appartiene all'interno dell'intervallo, esso è anche di massimo o minimo relativo, e per il principio di Fermat la derivata si deve annullare in quel punto (che sarà dunque il punto c cercato).

In caso contrario, x_m e x_M coincidono con gli estremi a e b dell'intervallo. Allora, per ogni $x \in [a,b]$ si ha

$$f(a) = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(b) = f(a),$$

per cui il massimo e il minimo di f coincidono. Ne segue che f è costante, e la sua derivata si annulla in *tutti* i punti dell'intervallo. Q.E.D.

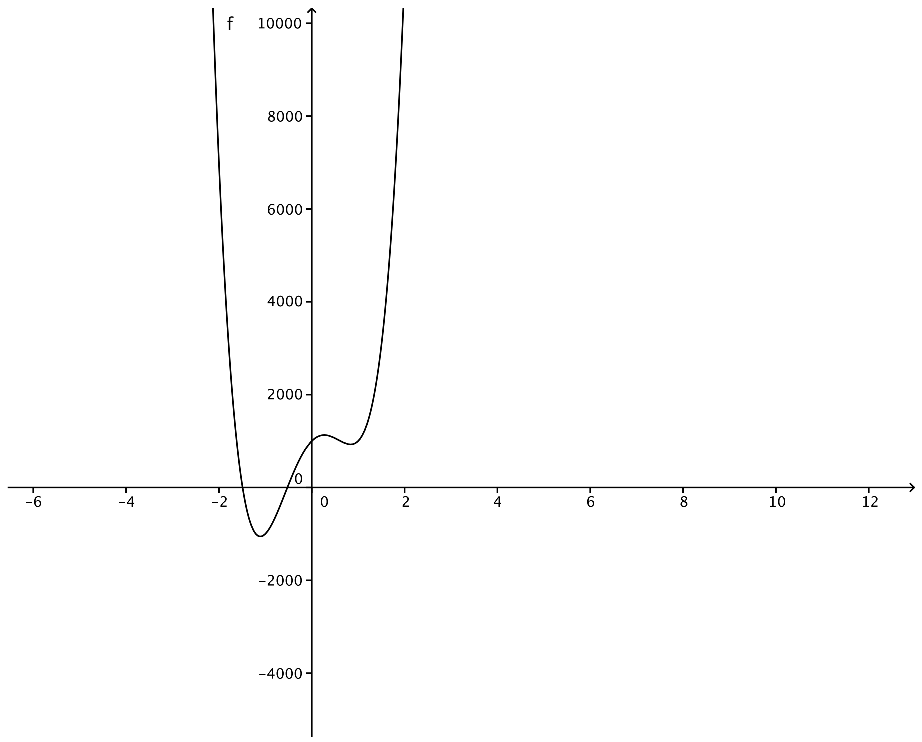
L'enunciato del teorema di Rolle potrebbe non sembrarci esattamente esaltante...

Vedremo però la prossima volta una sua conseguenza molto importante: il teorema di Lagrange, che ci consentirà di ottenere informazioni sul comportamento globale di una funzione, a partire da quel che sappiamo della sua derivata!

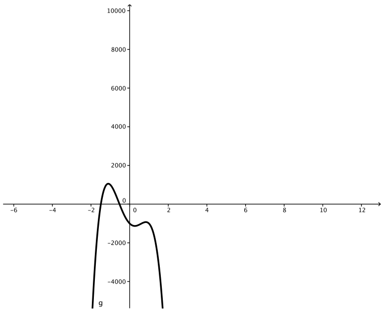
15 Lezione del 5/12/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)

Come antipasto, ho proposto il seguente esercizio:

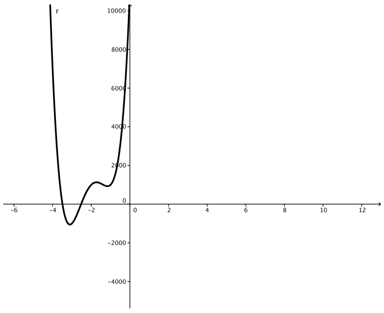
Sia dato il grafico della funzione $f(x)$ in figura



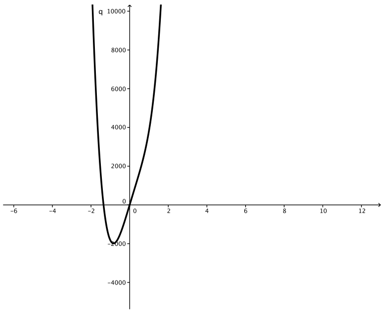
Tra i grafici seguenti, identificare quelli di $f'(x)$, $f''(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $-f(-x)$, $f(x+2)$, $f(x)+2000$, di una funzione $g(x)$ che non c'entra nulla.



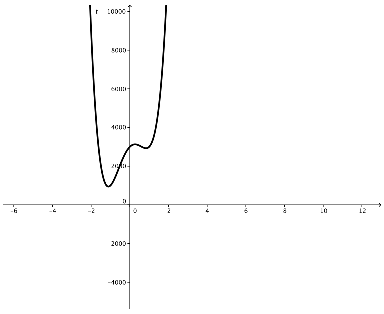
A



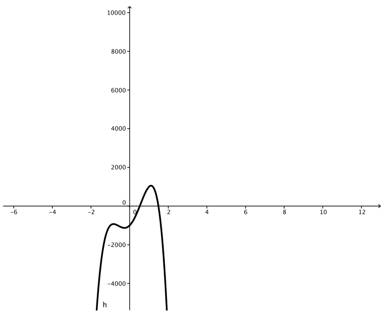
B



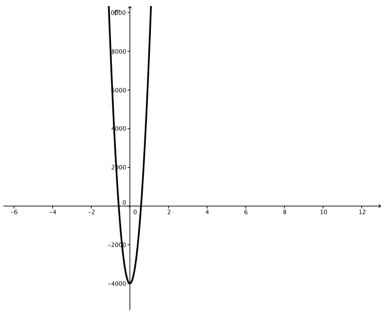
C



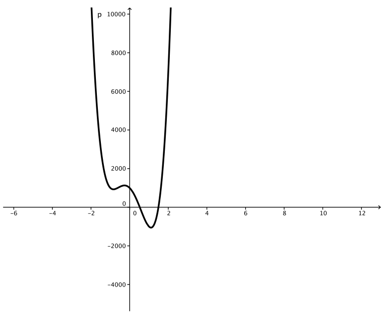
D



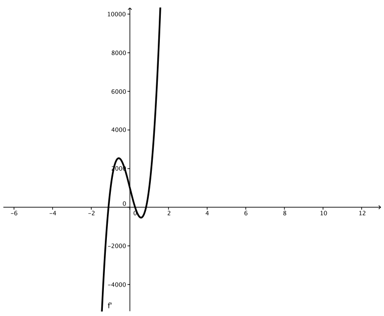
E



F



G



H

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni (attenzione al dominio!):

   (a) $f(x) = e^{\log^2(\tan x)}$;

   (b) $f(x) = \cos(\log x)$;

   (c) $f(x) = \sqrt{2 + \cos x}$;

   (d) $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$;

   (e) $f(x) = \log\left(\frac{\sin x}{1+3e^x}\right)$.

2. In un tessuto umano affetto da una patologia, si produce una certa sostanza tossica, la cui concentrazione (in funzione del tempo) è rappresentata dalla funzione $f(t)$. Per evitare un esito infausto, occorre correre ai ripari ben prima che la concentrazione arrivi al valore critico 10.

   Supponiamo che la concentrazione aumenti in modo proporzionale al tempo, con una correzione periodica dovuta ai ritmi circadiani del paziente: $f(t) = t + k\sin(t)$.

   - Supponendo $k = 1$, si provi che la funzione raggiunge il valore critico 10 in uno (ed un solo) istante di tempo. Si dia una stima di tale istante, onde consentire la tempestiva somministrazione di farmaci e salvare il paziente.
   - Si disegni un grafico qualitativo della funzione $f(t)$.
   - Cosa cambia nel caso $k = 2$? Si faccia il disegno anche in questo caso!

3. A causa dei famigerati tagli di bilancio, i laboratori didattici di biologia sono a corto di capsule di Petri. Fortunatamente, uno degli studenti è nativo della celebre isola veneziana di Murano: egli si offre di produrre personalmente queste capsulette cilindriche di vetro, da utilizzarsi per coltivare colonie di batteri (supponiamo per semplicità che non ci serva il coperchio!). Siccome i fondi a disposizione sono limitati, l'abile vetraio deve risparmiare al massimo sul materiale. Quali sono le dimensioni ottimali del cilindro se si vuole ottenere una capsula di dato volume?

4. Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico:

   (a) $f(x) = 1/\cos x$;

   (b) $f(x) = |x|e^{25-x^2}$.

5. Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore delle seguenti funzioni, prese ciascuna sul suo dominio. Si dica anche se si tratta di massimo e/o di minimo assoluto:

   (a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

   (b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$;

   (c) $f(x) = x \log x$.

16 Lezione del 11/12/2008 (2 ore)

Cominciamo con un risultato importante:

TEOREMA (di Lagrange): Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *una funzione continua, derivabile nell'intervallo* (a,b). *Esiste un punto* $c \in (a,b)$ *tale che* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Questa è una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Inoltre $g(a) = f(a) = g(b)$, per cui possimo applicare il teorema di Rolle e ottenere un punto $c \in (a,b)$ tale che $g'(c) = 0$. Questo è proprio il punto cercato. Q.E.D.

A lezione, abbiamo visto che le ipotesi di questi due teoremi non possono essere in generale indebolite, e abbiamo discusso il significato geometrico di questi risultati.

Quel che è più importante, è comunque la seguente conseguenza del teorema di Lagrange:

COROLLARIO: Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *una funzione derivabile. Se* $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$, *allora* f *è crescente in* $[a,b]$.

Se f' *è invece minore o uguale a* 0, *la funzione è decresente in* $[a,b]$. *Infine, se* $f' = 0$ *in tutto l'intervallo, la funzione è costante.*

DIMOSTRAZIONE: Facciamo vedere per esempio che vale la prima delle nostre affermazioni: supponiamo che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Siano poi x_1 e x_2 due punti di $[a,b]$, con $x_1 < x_2$. Applichiamo il teorema di Lagrange a f sull'intervallo $[x_1,x_2]$: troviamo $c \in (x_1,x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Per l'ipotesi sulla derivata, il membro di destra è maggiore o uguale a zero. Q.E.D.

Vediamo ora un risultato, il teorema di l'Hôpital, che è utilissimo quando si devono calcolare limiti nella forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞:
TEOREMA (l'Hôpital): Siano f, g funzioni derivabili in un intorno di x_0, tranne eventualmente in x_0 (dove possono anche non essere definite). Supponiamo inoltre che $g'(x) \neq 0$ in tale intorno e che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Se esiste (finito o infinito) il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e questi due limiti sono uguali. L'enunciato del teorema rimane vero anche se $x_0 = \pm\infty$.

A lezione, abbiamo visto un esempio di applicazione di questo teorema. Attenzione: il limite del rapporto $f(x)/g(x)$ (in una delle due forme indeterminate suddette) può benissimo esistere anche se non esiste il limite del rapporto delle derivate.

Non vedremo invece la dimostrazione del teorema.

Per proseguire, ci vogliamo occupare del problema di approssimare una funzione regolare, in un intorno di un punto, mediante polinomi.

Supponiamo di avere una funzione f derivabile in x_0: se ci chiedessero qual è la retta che meglio approssima il grafico di f vicino a x_0, probabilmente risponderemmo tutti che è la retta tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: la cosa è ancora più plausibile se facciamo un disegno!

Vediamo però di precisare meglio (in maniera quantitativa) in che senso la retta tangente è quella che approssima meglio f in un intorno di x_0: se $g(x) = ax + b$ è un polinomio di primo grado che approssima f, possiamo scrivere che $f(x) = g(x) + R(x)$, dove $R(x)$ è un "resto" che vogliamo sia il più piccolo possibile quando x si avvicina a x_0.

Siccome $R(x) = f(x) - a(x - x_0) - b$, notiamo subito che

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = 0 \Longleftrightarrow b = f(x_0).$$

In questo senso, tutte le rette che passano per il punto $(x_0, f(x_0)$ "approssimano f", nel senso che il resto tende a zero quando x si avvicina a x_0! Perché, dunque, la retta tangente è meglio delle altre?

Perché è l'unica per cui *il resto tende a zero più rapidamente di* $x - x_0$, cioè è l'unica per cui si abbia

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)} = 0.$$

Infatti, siccome abbiamo già osservato che deve essere $b = f(x_0)$, la quantità di cui dobbiamo fare il limite diventa:

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \to f'(x_0) - a.$$

Dunque, il limite è zero se $a = f'(x_0)$, mentre è non nullo in tutti gli altri casi.

Concludiamo dunque che la retta tangente è la retta di migliore approssimazione intorno a x_0, nel senso che è quella per cui *il resto tende a* 0 *più rapidamente quando* $x \to x_0$!

Nel tentativo di generalizzare quanto appena scoperto, diventa naturale chiedersi qual è il polinomio di grado n che meglio approssima una certa funzione f (che supporremo derivabile quante volte si vuole) in un intorno di x_0. Ci viene il sospetto che sia un polinomio simile alla retta tangente, nel senso che le sue derivate fino alla $n-esima$ nel punto x_0 dovranno coincidere con quelle di f...

Per semplificarci la vita, supponiamo che sia $x_0 = 0$: ci si può sempre ridurre a questa situazione con una traslazione lungo l'asse delle x.

Facendo esplicitamente il conto per $n = 2, 3, 4$, a lezione siamo arrivati a congetturare che il ponimomio con la proprietà sopra individuata sia

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

noto come polinomio di Taylor di grado n centrato in 0 (Si noti che, ironia della sorte, il polinomio di Taylor "di grado n" ha in realtà grado *minore o uguale a* n...).

In effetti è proprio così, come afferma il seguente lemma (di cui tralasciamo la dimostrazione):

LEMMA 1: Sia f una funzione derivabile n volte in x_0. Tra tutti i polinomi $P(x)$ di grado minore o uguale a n, il polinomio di Taylor $P_n(x)$ è l'unico tale che $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$, ..., $P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$.

Vedremo la prossima volta che, tra tutti i polinomi di grado $\leq n$, il polinomio di Taylor è proprio quello che fornisce l'approssimazione migliore della funzione f vicino a 0.

17 Lezione del 12/12/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)

Abbiamo svolto insieme il seguente *Fac Simile di provetta*:

Corso di Laurea in Bioinformatica
PROVETTA DI ANALISI MATEMATICA 1 - 23/1/2009
FAC SIMILE: Attenzione, questa è un'esercitazione!

1.1 Enunciare il Teorema di esistenza degli zeri.

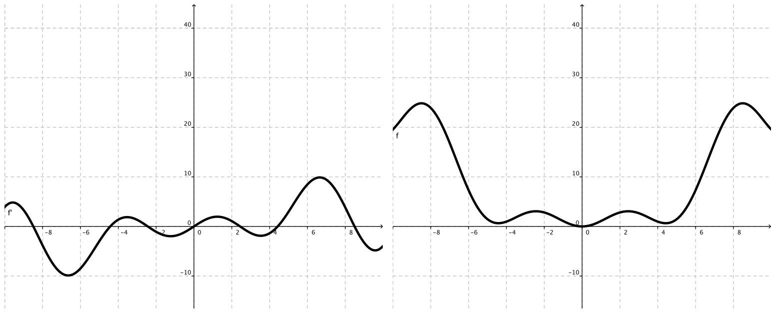
1.2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua in 0, con $f(0) = 1$. Allora

- f è positiva in un intorno di 0,
- f è maggiore o uguale a 1 in un intorno di 0;
- 0 è un punto di massimo o minimo relativo per f;
- f è ovunque continua;

1.3 Il limite $\lim_{x \to +\infty} (\sin(1/x))^x$

- vale $+\infty$;
- vale 0;
- non esiste;
- vale 1;

1.4 I due grafici che seguono rappresentano una certa funzione e la sua derivata:



Qual è il grafico della funzione e quale della derivata?

1.5 Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2\sin(5x)}.$$

1.6 Si studi il grafico della funzione

$$f(x)=\sqrt{\left|\frac{x}{1+x}\right|},$$

omettendo lo studio della derivata seconda.

1.8 Alle estremità di una strada rettilinea lunga $100m$ vi sono due lampioni. La luce emessa dal primo di essi ha un'intensità che è 2 volte quella emessa dal secondo. Sapendo che l'intensità della luce che raggiunge un punto è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente, si determini il punto meno illuminato della strada.

18 Lezione del 15/12/2008 (2 ore)

Proseguiamo la nostra discussione sull'approssimazione di funzioni mediante polinomi. Ci servirà il seguente lemma:

LEMMA 2: Sia $g(x)$ una funzione derivabile n volte in un intorno di 0, con derivata n-esima continua in 0. Se $g(0)=g'(0)=g''(0)=\ldots=g^{(n)}(0)=0$, allora abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}=0.$$

DIM.: Basta applicare $n-1$ volte il teorema di L'Hôpital (grazie alle nostre ipotesi, ad ogni passo abbiamo una forma indeterminata 0/0) ed infine la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{nx^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{g^{(n-1)}(x)}{n!x}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{n!}\frac{g^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(0)}{x}=\frac{1}{n!}g^{(n)}(0)=0.$$

Q.E.D.

Osservazione: Se g è come nel lemma, ma qualcuna delle derivate di ordine minore o uguale a n è diversa da 0, il limite *non può* essere 0: rifacendo lo stesso calcolo, si trova che è infinito, oppure è un numero diverso da zero.

Come corollario, otteniamo una prima forma del Teorema di Taylor:

TEOREMA (Di Taylor con resto di Peano): Sia f una funzione derivabile n volte in un intorno di 0 con derivata n-esima continua in 0. Se $P_n(x)$ denota il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0, allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P_n(x)}{x^n}=0.$$

Tra tutti i polinomi di grado minore o uguale a n, il polinomio di Taylor è l'unico ad avere questa proprietà.

DIM.: Grazie al Lemma 1, la funzione $g(x)=f(x)-P_n(x)$ soddisfa le ipotesi del Lemma 2, e il teorema risulta dimostrato. L'unicità del polinomio di Taylor rispetto a questa proprietà segue dall'Osservazione fatta dopo la dimostrazione del Lemma 2. Q.E.D.

Osservazione: Se al posto di 0 prendiamo un generico punto x_0, il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 sarà

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

In questo caso, il teorema di Taylor dice che se f è derivabile $(n-1)$ volte in un intorno di x_0, e possiede derivata n-esima in x_0, allora

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),\ \textit{con}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

Applichiamo ora la formula di Taylor con resto di Peano allo studio dei massimi e dei minimi relativi di una funzione. L'idea è che spesso, per capire se un punto in cui la derivata prima si annulla è di massimo o minimo relativo, basta studiare il segno della derivata seconda:

TEOREMA: Sia f una funzione derivabile 2 volte in un intorno di x_0, con derivata seconda continua in x_0.

Allora

- *se $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo;*
- *se $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.*
- *se $f''(x_0) = 0$ non possiamo dire nulla: x_0 potrebbe essere di massimo, di minimo o nessuno dei due.*

DIM.: Si tratta di studiare il segno della funzione $f(x) - f(x_0)$ quando x varia in un intorno sufficientemente piccolo di x_0: se tale funzione è positiva siamo in presenza di un punto di minimo relativo, se è negativa di un massimo (mentre se essa cambia di segno in ogni intorno, comunque piccolo, di x_0, il punto non è né di massimo né di minimo).

Se prendiamo x abbastanza vicino a x_0 in modo che valgano le ipotesi del teorema di Taylor, otteniamo

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x) = [\frac{f''(x_0)}{2} + \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2}](x - x_0)^2.$$

Siccome $R_2(x)/(x - x_0)^2 \to 0$, la quantità tra parentesi quadre tende a $f''(x_0)/k!$ per $x \to x_0$. Di conseguenza, essa *avrà lo stesso segno* di $f''(x_0)$ quando x varia in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 e tale derivata è non nulla. Poiché è invece chiaro che il polinomio $(x-x_0)^2$ è sempre maggiore o uguale a 0, la tesi segue immediatamente nei casi in cui la derivata seconda è non nulla.

Se poi la derivata seconda si annulla, può succedere di tutto: le funzioni x^3, x^4 e $-x^4$ hanno derivate prima e seconda nulle in 0, che non è né di massimo né di minimo per la prima funzione, è di minimo per la seconda ed è di massimo per la terza. Q.E.D.

Osservazione: Il teorema appena dimostrato ci dice che se $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, allora $f(x) > f(x_0)$ (con la disuguaglianza stretta) se $x \neq x_0$ è sufficientemente vicino a x_0: in altre parole, il punto in questione *è un punto di minimo relativo stretto, e dunque non può di sicuro essere di massino relativo.*

Questo ci permette di invertire in parte il risultato precedente: se f è derivabile due volte in un intorno di x_0 e x_0 è di massimo relativo, allora

$f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$ (La derivata prima si annulla per il principio di Fermat, mentre la seconda non può essere positiva perché se lo fosse il risultato precedente mi darebbe un punto di minimo relativo "stretto", il che sarebbe assurdo!). Analogamente, in un punto di minimo relativo deve essere $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$.

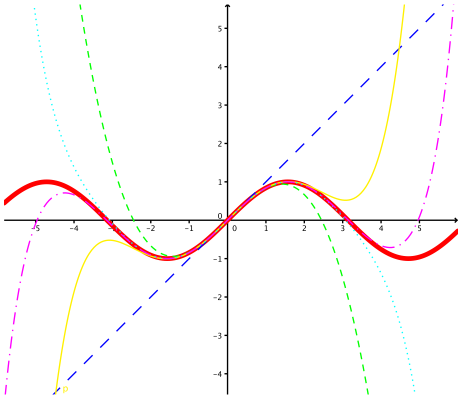
In molti casi, il nostro teorema permette di stabilire se un punto in cui si annulla la derivata prima corrisponde ad un massimo o minimo relativo: basta trovare la prima derivata diversa da zero (a patto che la funzione sia derivabile abbastanza volte)! Può però capitare che la funzione sia derivabile infinite volte, ma *tutte* le derivate si annullino nel punto che ci interessa: si tratta però di un fatto non tanto comune nelle applicazioni usuali.

Il teorema di Taylor con resto di Peano fornisce un'ottima approssimazione polinomiale della nostra funzione nelle *immediate vicinanze* del punto x_0. Sperimentalmente, però, si vede che polinomi di Taylor di grado sufficientemente elevato danno buone approssimazioni delle principali funzioni elementari *in tutto un intorno* del punto x_0. Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = \sin x$, con $x_0 = 0$.

Poichè $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -sin(x)$, $f^{(3)}(x) = -cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, la successione $f^{(k)}(0)$ è $0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$ (periodica di periodo 4). Ne segue che i primi polinomi di Taylor del seno sono:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= x \\
P_3(x) &= x - \frac{x^3}{3!} \\
P_5(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\
P_7(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \\
P_9(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}
\end{aligned}$$

Ecco i grafici di queste funzioni:



Come si vede, al crescere del grado l'approssimazione diventa sempre migliore su un intorno sempre più grande di 0.

Per stimare efficacemente la bontà della nostra approssimazione, è utile una versione del Teorema di Taylor in cui il resto viene espresso in modo molto preciso: diamo l'enunciato senza dimostrazione.

TEOREMA (Formula di Taylor con resto di Lagrange): Sia f una funzione derivabile $(n+1)$ volte in un intorno di x_0, e sia x un punto appartenente a tale intorno. Allora esiste un punto c, compreso tra x_0 e x, tale che

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

dove

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

è il polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0.

Mettiamo subito a frutto il teorema, usandolo per approssimare alcune importanti funzioni con polinomi.

Cominciamo col prendere $f(x) = \sin x$ (e $x_0 = 0$): la formula di Taylor con resto di Lagrange ci dice che esiste un punto c compreso tra 0 e x tale che

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{\pm \sin c}{(n+1)!}x^{2n+2}.$$

Dimostriamo ora che il resto, qualunque sia $x \in \mathbf{R}$, tende a 0 per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pm \sin c}{(2n+2)!}x^{2n+2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si noti che, anche se c dipende in generale sia da x che da n, la quantità $\pm \sin c$ è maggiorata in modulo da 1, per cui ci basterà far vedere che

$$x^{2n+2}/(2n+2)! \to 0$$

per $n \to +\infty$. Questo fatto, a sua volta, si dimostra immediatamente ricordando la stima $n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n$, che abbiamo dato per buona.

In conclusione, abbiamo quindi fatto vedere che

$$\sin x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

19 Lezione del 18/12/2008 (2 ore)

L'ultimo limite scritto la volta scorsa si chiama *serie di Taylor di* $\sin x$, e si denota usualmente con $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$:

DEFINIZIONE: Se $\{a_k\}$ è una successione di numeri reali, col simbolo $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ (che si legge *"serie degli a_k"*, si intende per definizione il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

a patto che tale limite esista. Se il limite è finito, si dice che la serie *converge*, se è infinito che *diverge*, se infine non esiste si dice che la serie *è indeterminata*.

Con lo stesso tipo di conti, abbiamo poi verificato che si ha anche

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Cerchiamo poi di determinare un'altra serie di Taylor interessante in modo un po' bizzarro. Precisamente, studiamo la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$. Per definizione di serie, abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & se\ -1 < x < 1, \\ +\infty & se\ x \geq 1, \\ \nexists & se\ x \leq -1. \end{cases}$$

dove abbiamo usato la formula per la somma di una progressione geometrica.

In conclusione, per $-1 < x < 1$ si ha

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

mentre al di fuori di questo intervallo la serie non converge ad un limite finito (o non converge affatto).

Ora, non è affatto difficile verificare che questa è proprio la serie di Taylor (centrata in 0) della funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$: infatti abbiamo $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, da cui $f^{(k)}(0) = k!$.

Questo è un esempio di funzione la cui serie di Taylor centrata in zero converge alla funzione stessa su un intervallo centrato nell'origine, ma non sull'intera retta reale.

Sostituendo x con $-x$ nella serie precedente si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \qquad -1 < x < 1.$$

In modo analogo si trova

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \qquad -1 < x \leq 1 :$$

in effetti, derivando termine a termine questa serie, si ritrova la serie di $\frac{1}{1+x}$ scritta poco sopra!

Per concludere la parte sui polinomi e sulle serie di Taylor, vogliamo dare una brevissima panoramica, senza dimostrazioni, della *teoria delle serie di potenze.*

Una *serie di potenze* è per definizione una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

dove $\{a_k\}$ è una successione nota di numeri reali. Questo è proprio il tipo di serie che si ottiene come serie di Taylor (centrata nell'origine) di una funzione derivabile infinite volte!

Nel caso peggiore, una serie di potenze converge solo per $x = 0$... In tutti gli altri casi, converge in un intervallo centrato nell'origine, del tipo $(-r, r)$ (oppure $[-r, r]$, $(-r, r]$ o $[-r, r)$... r può anche essere infinito). Il numero r si chiama raggio di convergenza della serie di potenze, e ci sono metodi piuttosto semplici per trovarlo. Basta infatti calcolare uno dei due limiti seguenti (ammesso che esistano):

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Se uno di questi due limiti vale ℓ[12], il raggio di convergenza vale $1/\ell$ (anche nei "casi degeneri": se $\ell = 0$ si ha $r = +\infty$, se $\ell = +\infty$ allora $r = 0$).

Supponiamo dunque che la nostra serie di potenze abbia raggio di convergenza positivo, e chiamiamo $f(x)$ la somma della serie (per x nell'intervallo in cui questa converge):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^2.$$

Allora si può dimostrare che $f(x)$ è una funzione derivabile infinite volte, e che la serie di potenze non è altro che la serie di Taylor della sua somma $f(x)$ (...e dunque quel che avevamo visto nel caso della funzione $1/(1-x)$ non era casuale) . Inoltre, la derivata si calcola semplicemente derivando la serie termine a termine:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Si noti che quest'ultima affermazione non è immediatamente ovvia: stiamo derivando una *somma infinita* di funzioni!

A questo punto, sorge spontanea la seguente questione: se f è una funzione derivabile infinite volte in x_0, è sempre possibile trovare un intorno di x_0 tale che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k?$$

La risposta è negativa:

ESEMPIO: Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$$

Si può dimostrare che essa è derivabile infinite volte in 0, e che tutte le derivate si annullano.

Ne segue che la serie di Taylor centrata in 0 per f è identicamente nulla, e quindi evidentemente essa coincide con f solo per $x = 0$.

[12] Si può mostrare che se il secondo limite esiste e vale ℓ, allora esiste anche il primo ed ha lo stesso valore. Può invece succedere che esista il primo limite ma non il secondo.

Le funzioni la cui serie di Taylor converge alla funzione stessa in un intorno di x_0 si dicono *analitiche in* x_0: la funzione dell'esempio non è analitica in 0, mentre la funzione esponenziale, il seno ed il coseno lo sono.

Come ultimo esempio di serie di potenze, un po' bizzarro ma molto utile, consideriamo la *serie binomiale* di Newton. Dato un numero reale α, definiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

in cui $\alpha \in \mathbf{R}$ e i coefficienti binomiali sono definiti da

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \quad (n \geq 1).$$

Usando la formuletta per il raggio di convergenza con il limite del rapporto, si verifica subito che il questa serie ha raggio di convergenza 1[13]. Mostriamo che la somma $f(x)$ della serie è uguale a $(1+x)^\alpha$ per ogni $x \in (-1, 1)$: la formula del binomio di Newton vale dunque anche per esponenti non interi!

Derivando termine a termine la serie si ottiene

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} (\alpha - n) x^n$$

(la seconda espressione si ottiene osservando che $\binom{\alpha}{n} n = \binom{\alpha}{n-1} (\alpha - n + 1)$ e cambiando l'indice, $(n-1) \leftrightarrow n$). Utilizzando queste due scritture equivalenti di $f'(x)$ si ottiene subito

$$(1+x) f'(x) = \alpha f(x), \text{ ovvero } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}.$$

Allora $(\log f(x))' = (\alpha \log(1+x))'$, da cui $\log f(x) = \log(1+x)^\alpha + \log C$, da cui (osservando che $f(0) = 1$) $f(x) = (1+x)^\alpha$.

20 Lezione del 19/12/2008 (Esercitazione opzionale - 2 ore)

Abbiamo svolto i seguenti esercizi:

1. Si calcolino, se esistono, i limiti seguenti:

[13] A meno che non si abbia $\alpha \in \mathbf{N}$: in tal caso solo i primi α coefficienti binomiali sono diversi da 0, e la serie si riduce a un polinomio.

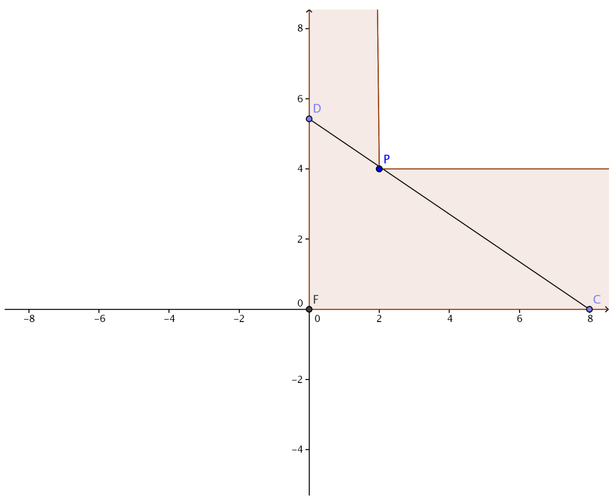
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\log(1+5x)},\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right),\quad \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{2x-\pi}{\cos^2 x},$$
$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{(2x-\pi)^2}{\cos^2 x},\quad \lim_{x\to\pi/2}\frac{\log\sin x}{\cos x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{3\tan x-\tan 3x},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}.$$

[Le risposte sono nell'ordine $1/30$, 0, $-\infty$, 4, 0, $-1/2$, a^2/b^2.]

2. In una biblioteca c'è un tavolo rotondo di raggio r, attorno al quale si siedono gli utenti a studiare. La direzione vuole sospendere un lampadario sopra il centro del tavolo, in modo che il bordo dello stesso sia illuminato in modo ottimale. A che altezza si deve sospendere il lampadario? Si tenga conto del fatto che l'intensità dell'illuminazione è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dal lampadario, e anche al seno dell'angolo formato dai raggi luminosi con il piano del tavolo. [Detta x l'altezza del lampadario dal piano del tavolo, si trova che l'intensità luminosa è proporzionale a $x/(r^2+x^2)^{3/2}$. Il massimo di questa funzione si ha per $x = r/\sqrt{2}$.]

3. Due corridoi di larghezza a e b si incrociano ad angolo retto. Qual è la lunghezza massima di un pannello di cartongesso cui si può far girare l'angolo (tenendolo verticale)?

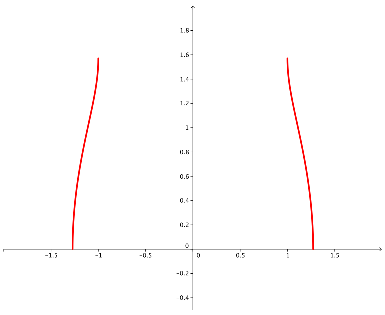
   [Riferiamo il nostro corridoio ad un sistema di assi cartesiani come in figura: il punto P avrà coordinate (b, a), corrispondenti alla larghezza dei corridoi.



   La lunghezza massima di una parete di cartongesso che possiamo far passare da un corridoio all'altro corrisponde alla *minima lunghezza* di un segmento CD che abbia gli estremi sui due semiassi coordinati e passi per il punto P. La retta cui il segmento appartiene, in funzione del suo coefficiente angolare $m < 0$ ha equazione $y = m(x - b) + a$, per cui la lunghezza al quadrato del segmento è $f(m) = (a - mb)^2(1 + \frac{1}{m^2})$. Minimizzando questa funzione al variare di m, troviamo che la lunghezza della massima lastra di cartongesso trasportabile è $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.]

4. Si studi la funzione $f(x) = \arccos\sqrt{x^4 - x^2}$. Non è richiesto lo studio degli intervalli di concavità e convessità.

   [Funzione pari. Il dominio è dato da $[-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, -1] \cup \{0\} \cup [1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}]$. La funzione è derivabile nei punti interni dei due intervalli, mentre agli estremi tende all'infinito. Studiando il segno della derivata, si trova che nell'intervallo di destra la funzione è decrescente (ed è quindi crescente in quello di sinistra, per simmetria. Il grafico sarà dunque come in figura



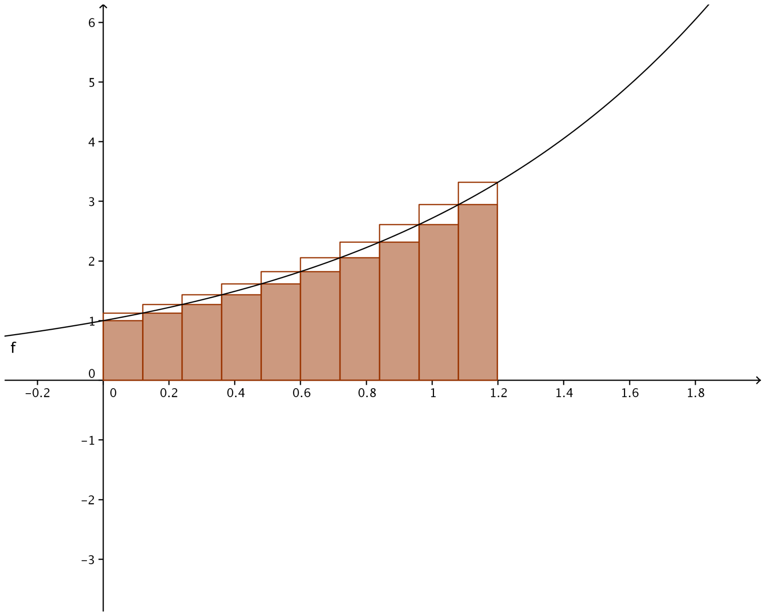
   ]

21 Lezione del 26/1/2009 (2 ore)

Cominciamo a studiare una definizione rigorosa di area per certe figure piane delimitate da un contorno curvilineo. Questo ci porterà a dare la definizione di integrale nel senso di Riemann per una funzione $f : [a, b] \to \mathbf{R}$.

Partiamo da un esempio concreto: supponiamo di voler dare un senso all'area della regione limitata del piano delimitata dall'asse delle x, dal grafico della funzione $f(x) = e^x$, dall'asse delle y e dalla retta $x = a$: si tratta di una specie di trapezio rettangolo, solo che il lato obliquo è curvo (è infatti il grafico della funzione e^x.

Un'idea potrebbe essere la seguente: dividiamo l'intervallo $[0, a]$ in n intervallini uguali (che avranno quindi estremi $0, a/n, 2a/n, 3a/n, \ldots, a$). Per ciascuno di questi intervallini, costruiamo un rettangolo che ha l'intervallino stesso come base, e altezza uguale al valore della funzione esponenziale *nell'estremo di sinistra*: in altre parole, sull'intervallino $[ka/n, (k+1)a/n]$ costruiamo un rettangolo di altezza $e^{ka/n}$.



In questo modo otteniamo una figura "a scala" che è tutta *contenuta* nella figura curvilinea di cui vogliamo calcolare l'area: è abbastanza intuitivo che se infittisco la "scala" otterrò delle approssimazioni per difetto sempre migliori dell'area che mi interessa.

In maniera analoga, possiamo costruire una "scala circoscritta" alla regione che ci interessa, prendendo su ciascun intervallino $[ka/n, (k+1)a/n]$ un rettangolo di altezza $e^{(k+1)a/n}$. Anche in questo caso, infittendo la scala otterrò approssimazioni per eccesso sempre migliori dell'area "vera".

L'idea soggiacente a questo esempio è estendibile ad un gran numero di funzioni:

DEFINIZIONE: Una funzione $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ si dice *a scala* se esiste una suddivisione di $[a,b]$ in un numero finito di intervallini di estremi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$, in modo tale che ϕ assuma valore costante c_i su ciascun intervallino (x_i, x_{i+1}) (per $i = 0, \ldots, N-1$).

L'*integrale* della suddetta funzione a scala si definisce come

$$\int_a^b \phi(x)\, dx = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) c_i.$$

Come si vede, una funzione a scala è caratterizzata dal fatto che il suo grafico è un *istogramma*. Se ϕ è positiva, l'integrale della funzione a scala è semplicemente l'area dell'unione finita di rettangoli delimitata dal grafico di ϕ, l'asse delle x e le rette verticali $x = a$ e $x = b$. Se ϕ ha anche tratti negativi, l'unica differenza è che le aree degli scalini con "altezza negativa" si contano col segno meno.

Le funzioni a scala ed il loro integrale godono delle seguenti proprietà, la cui plausibilità è lasciata alla riflessione del lettore:

LEMMA: Se ϕ_1 e ϕ_2 sono funzioni a scala su $[a, b]$, e $c \in \mathbf{R}$, allora

- *$c\phi_1$ e $\phi_1 + \phi_2$ sono funzioni a scala;*
- *l'integrale è lineare:*

$$\int_a^b (c\phi_1(x))\,dx = c\int_a^b \phi_1(x)\,dx$$
$$\int_a^b (\phi_1(x) + \phi_2(x))\,dx = \int_a^b \phi_1(x)\,dx + \int_a^b \phi_2(x)\,dx;$$

- *l'integrale è monotono: se $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora*

$$\int_a^b \phi_1(x)\,dx \leq \int_a^b \phi_2(x)\,dx.$$

Siamo ora in grado di definire l'integrale superiore, l'integrale inferiore ed eventualmente l'integrale di una funzione limitata:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione limitata. L'*integrale superiore* di f si definisce come

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\int_a^b \phi(x)\,dx :\ \phi \ a\ scala,\ \phi \geq f\ in\ [a, b]\}.$$

Analogamente, l'*integrale inferiore* di f si definisce come

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\int_a^b \psi(x)\,dx :\ \psi \ a\ scala,\ \psi \leq f\ in\ [a, b]\}.$$

Se l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidono, diremo che *la funzione f è integrabile secondo Riemann* in $[a, b]$, ed indicheremo il valore comune dei due integrali con

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

integrale secondo Riemann di f su $[a, b]$.

Vale una semplice caratterizzazione dell'integrale di Riemann, che permette tra l'altro di verificare la correttezza di quanto trovato sopra per l'integrale della funzione esponenziale:

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *una funzione limitata.* f *è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *si possono trovare due funzioni a scala* ϕ*,* ψ *con* $\psi \leq f \leq \phi$ *in* $[a, b]$ *tali che*

$$\int_a^b \phi(x)\, dx - \int_a^b \psi(x)\, dx < \varepsilon.$$

Omettiamo la semplice dimostrazione di questo risultato,

Esistono purtroppo funzioni *non integrabili* secondo Riemann:

ESEMPIO (Funzione di Dirichlet): Si consideri la funzione $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbf{Q} \\ 0 & se\ x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Si può far vedere con (relativamente) poca fatica che questa funzione non è integrabile: il suo integrale superiore è 1, l'integrale inferiore 0.

A questo punto, diventa importante far vedere che tutte le funzioni "abbastanza decenti" sono integrabili. Per esempio, sono integrabili le funzioni monotone e le funzioni continue:

TEOREMA: Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *è crescente (decrescente), oppure se* f *è continua, allora è integrabile secondo Riemann.*

La continuità delle funzioni monotone non è difficile da dimostrare. Al contrario, non è facilissimo far vedere che sono integrabili le funzioni continue.

Per f continua, l'idea è suddividere l'intervallo $[a, b]$ in tanti intervalli uguali e *sufficientemente piccoli.* In ciascun intervallo, la funzione a scala approssimante superiore sarà posta uguale al *massimo* di f sull'intervallo stesso, la funzione a scala approssimanete inferiore al *minimo* di f. L'idea è che, essendo f continua, il massimo ed il minimo saranno *molto vicini* in un intervallo piccolo, per cui le due funzioni a scala avranno integrali assai vicini. Occorre però una stima *uniforme* di quanto il massimo e il minimo sono vicini, in funzione della lunghezza dell'intervallo: a questo scopo, si ricorre al concetto di uniforme continuità (che coincide con la continuità su intervalli chiusi e limitati come il nostro $[a, b]$). Tralasciamo i sanguinosi dettagli!

Avendo ora una grande abbondanza di funzioni integrabili, passiamo ad osservare (senza dimostrazione) che l'integrale gode delle stesse proprietà di linearità dell'integrale delle funzioni a scala:

PROPOSIZIONE: Siano $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ due funzioni integrabili secondo Riemann, $c \in \mathbf{R}$. Allora le funzioni $c \cdot f$ e $f + g$ sono integrabili secondo Riemann e si ha

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Un'altra proprietà dell'integrale che ci sarà piuttosto utile, è l'additività rispetto all'intervallo di integrazione:

PROPOSIZIONE: Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è integrabile, $c \in (a, b)$ si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

È comodo definire l'integrale anche su intervalli "orientati alla rovescia": se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è integrabile secondo Riemann, poniamo *per definizione*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Con questa posizione, la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo vale *in generale*, anche se c non è compreso tra a e b (in tal caso, f dovrà essere ovviamente integrabile sul più grande tra gli intervalli coinvolti...).

22 Lezione del 27/1/2009 (1 ora + 1 ora esercitazione opzionale)

Per il calcolo effettivo degli integrali, lo strumento fondamentale risulta il seguente

TEOREMA (teorema fondamentale del calcolo integrale): Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua, e definiamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Allora F è derivabile, e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Evidentemente, se siamo in grado di calcolare la funzione integrale $F(x)$ associata a f, siamo a maggior ragione in grado di calcolare l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ (che sarà uguale semplicemente a $F(b)$).

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale $F(x)$ è da ricercarsi tra le funzioni la cui derivata è data da $f(x)$ (che si chiamano *primitive* di f). Si capisce quindi che se siamo in grado di trovare le primitive di una data funzione $f(x)$, saremo anche in condizione di trovare la funzione integrale ad essa associata: vedremo meglio come fare dopo aver dimostrato il teorema fondamentale.

Per dimostrare il teorema fondamentale ci servirà il seguente risultato:

TEOREMA (Della media integrale): Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a).$$

DIM.: Sia $M = \max\{f(x) : \ x \in [a,b]\}$, $m = \min\{f(x) : \ x \in [a,b]\}$.

Sappiamo che l'integrale è monotono: al crescere della funzione cresce l'integrale! Confrontando dunque l'integrale di f con quello delle funzioni costanti m e M otteniamo $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$, per cui la quantità

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(che è detta *media integrale*) è compresa tra m e M.

Per il teorema dei valori intermedi, f assume tutti i valori compresi tra m e M, e quindi anche il valore corrispondente alla media integrale! Q.E.D.

DIM. DEL TEOREMA FONDAMENTALE: Consideriamo il rapporto incrementale della funzione F nel punto x. Ricordando l'additività dell'integrale rispetto all'intervallo si ha:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Applicando il Teorema della media all'ultimo integrale troviamo un punto c compreso tra x e $x+h$ tale che

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c).$$

Passando al limite per $h \to 0$, avremo $c \to x$ e $f(c) \to f(x)$ (perché f è continua), da cui

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Q.E.D.
DEFINIZIONE: Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, una *primitiva* di f è una funzione $G : [a, b] \to \mathbf{R}$ tale che $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale è una primitiva dell'integranda. Ora, spesso è facile "indovinare" una primitiva di una funzione f (e vedremo presto delle tecniche per trovare in modo più sistematico le primitive di moltissime funzioni elementari). Se ci riusciamo, siamo anche in grado di calcolare l'integrale di f:

PROPOSIZIONE: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua, $G : [a, b] \to \mathbf{R}$ una qualunque primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

DIM.: Per il Teorema fondamentale, anche la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ è una primitiva di F. Ne segue che la funzione $F(x) - G(x)$ ha derivata nulla in $[a, b]$, e quindi è costante: esiste $C \in \mathbf{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + C$$

per ogni $x \in [a, b]$. Siccome $F(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$, ponendo $x = a$ nell'ultima identità troviamo $C = -G(a)$, da cui $F(x) = G(x) - G(a)$. In particolare, per $x = b$ si ha la tesi. Q.E.D.

ESEMPI:

- Se $f(x) = x^2$, una primitiva è $G(x) = x^3/3$. Dunque $\int_0^1 x^2\, dx = G(1) - G(0) = 1/3$. Questo l'abbiamo "indovinato" ieri a lezione approssimando al calcolatore l'integrale con dei rettangoli...

- Se $f(x) = e^x$, riconosciamo subito che una primitiva è data dalla funzione $G(x) = e^x$, e quindi

$$\int_0^a e^x\, dx = G(a) - G(0) = e^a - 1.$$

- Se $f(x) = mx$, si vede che una primitiva è $G(x) = mx^2/2$, quindi

$$\int_a^b mx\, dx = m(b^2 - a^2)/2.$$

  Possiamo convincerci della veridicità di questa formula se osserviamo che geometricamente l'integrale appena calcolato rappresenta l'area di un trapezio rettangolo di altezza $(b - a)$ e basi ma e mb.

- Se $f(x) = \sin x$, una primitiva sarà $G(x) = -\cos x$. Quindi

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -cos(\pi) - (-cos(0)) = 2,$$

risultato che non sarebbe stato facile prevedere in altro modo!

Nella seconda ora di lezione, abbiamo corretto la prova scritta della scorsa settimana (per il testo e la correzione, vedi il sito web del corso).

23 Lezione del 2/2/2009 (2 ore)

Cerchiamo ora di studiare una maniera un po' più sistematica per trovare le primitive di una data funzione elementare.

Conviene stabilire una notazione per l'insieme di tutte le primitive di una funzione f:

DEFINIZIONE: Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua, l'insieme delle primitive $G : [a, b] \to \mathbf{R}$ (cioè l'insieme delle funzioni derivabili la cui derivata è uguale ad f), si denota con il simbolo $\int f(x) \, dx$:

$$\int f(x) \, dx = \{G : [a, b] \to \mathbf{R} : \; G'(x) = f(x) \; \forall x \in [a, b]\}.$$

L'insieme delle primitive di f si chiama talvolta *integrale indefinito* di f.

Grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale e a quanto osservato la volta scorsa, sappiamo che la funzione integrale è una primitiva di f, e anche che due primitive diverse definite su uno stesso intervallo differiscono per una costante, dunque:

$$\int f(x) \, dx = \{\int_a^x f(t) \, dt + C : \; C \in \mathbf{R}\}.$$

Con lieve abuso di notazione, se G è una qualunque primitiva di f si scrive $\int f(x) \, dx = G(x) + C$, con C *costante arbitraria.*

Se prendiamo una tabella delle derivate delle funzioni elementari, e la leggiamo al contrario, troviamo la seguente tabella di integrali indefiniti "immediati":

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^a (con $a \neq -1$)	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
$1/x$	$\log\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Altre regole di integrazione vengono direttamente dalle regole di derivazione della somma e del prodotto:

- $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ (additività),
- $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$,
- $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ (formula di integrazione per parti).

Dalla formula per la derivata della funzione composta viene un'utile formula di *integrazione per sostituzione*: se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Se "cambiamo variabile" ponendo $y = g(x)$, l'identità appena scritta diventa $\int f(y)\,dy = \int f(g(x))g'(x)\,dx$. Questa formula può essere ricordata nel seguente modo, poco ortodosso ma efficace: usando la notazione di Leibniz per la derivata, abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(g(x))}{dx} = g'(x),$$

e moltplicando ambo i membri per dx (cosa che *ovviamente* non ha alcun senso!) otteniamo l'identità $dy = d(g(x)) = g'(x)\,dx$, che sostituita nell'integrale $\int f(y)\,dy$ ci restituisce la formula voluta...

Evidentemente, abbiamo commesso più di un crimine matematico: la derivata NON è un rapporto, e il simbolo dx nell'integrale NON ha un significato matematico ben definito (se non quello di indicare la variabile indipendente rispetto alla quale si integra). D'altra parte, la notazione per la derivata e l'integrale si è rivelata suggestiva: agendo senza farci troppi scrupoli, abbiamo comunque ottenuto un risultato corretto (infatti lo avevamo già giustificato partendo dalla formula di derivazione di funzioni composte!).

ESEMPI:

1. Si voglia calcolare $\int \cos^2 x \; dx$. Per una nota identità trigonometrica, abbiamo $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ da cui
$$\int \cos^2 x \; dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \; dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2x \; d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$
2. Calcoliamo $\int \log x \; dx$. Integrando per parti si ha: $\int \log x \; dx = \int 1 \cdot \log x \; dx = \int (x)' \log x \; dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \; dx = x \log x - x + C$.
3. Calcoliamo $\int e^x \sin x \; dx$. Integrando due volte per parti si ottiene: $\int e^x \sin x \; dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \; dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \; dx$. Portando l'ultimo integrale a primo membro si ottiene subito
$$\int e^x \sin x = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C.$$
4. Calcoliamo
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx.$$
Poniamo $y = 1 - x^2$, da cui: $dy = -2x \; dx$ e l'integrale diventa
$$-\frac{1}{2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{y} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$
Oppure, con un uso disinvolto della formula di integrazione per sostituzione:
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

24 Lezione del 3/2/2009 (1 ora+ 2 ore esercitazione opzionale)

Applichiamo le tecniche di integrazione per trovare l'area del cerchio! La funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ è definita sull'intervallo $[-1,1]$. Il suo grafico è una semicirconferenza di raggio 1: l'integrale di questa funzione deve quindi essere $\pi/2$. In effetti, l'integrale si calcola facilmente ponendo $x = \sin y$, da cui (OK, non è ortodosso ma abbiamo verificato che funziona): $dx = \cos y \; dy$ e
$$\int \sqrt{1-x^2} \; dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y \; dy = \int \cos^2 y \; dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + C.$$

Ora, $y = \arcsin x$ e $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, da cui $\sin 2y = 2x\sqrt{1-x^2}$ e l'integrale cercato vale $\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$.

L'integrale definito di questa funzione tra -1 e 1 vale allora $\pi/2$... proprio come ci aspettavamo!

Oltre all'ovvia, immediata applicazione al calcolo di aree, l'integrale può essere usato anche per calcolare lunghezze di curve e volumi di solidi. Con considerazioni euristiche, si scopre facilmente che:

- La lunghezza del grafico della funzione $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è data dalla formula
$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$
Per esempio, la funzione $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ha come grafico (sull'intervallo $[-r, r]$) una semicirconferenza di raggio r: la formula sopra predice correttamente il valore della sua lunghezza!

- Volume di un solido di rotazione: se abbiamo $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $f \geq 0$, il volume del solido ottenuto ruotando il sottografico di f attorno all'asse x è dato da
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$
Abbiamo usato questa formula per ritrovare i valori corretti del volume di una sfera o di un cono circolare retto.

- Più in generale, vale il *principio di Cavalieri*: per calcolare il volume di un solido, basta affettarlo in una certa direzione ed integrare le aree delle fette. Abbiamo usato questo principio per trovare il volume del cono fatto sopra una regione arbitraria del piano!

Viste queste applicazioni, continuiamo con la nostra lista di esempi per apprendere le tecniche di integrazione:

5. Si voglia calcolare $\int \sin\sqrt{x}\, dx$. Si ottiene subito il risultato ponendo $\sqrt{x} = y$, e integrando per parti.

6. Per calcolare l'integrale $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$, si operi la sostituzione $\sqrt{1+x^2} = y - x$...

7. Integrazione di funzioni razionali: $f(x) = A(x)/B(x)$, con $A(x)$, $B(x)$ polinomi. Possiamo supporre che il grado di A sia strettamente minore del grado di B (altrimenti facciamo la divisione e scriviamo $A(x)/B(x) = Q(x) + R(x)/B(x)$, dove Q ed R sono rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione (e $\deg(R) < \deg(B)$). Siccome un polinomio

è di integrazione immediata, ci siamo ricondotti al caso di cui sopra). Vediamo per semplicità come si affronta il caso in cui il polinomio a denominatore abbia grado 2: la situazione è nettamente diversa a seconda che $B(x)$ abbia due radici reali distinte, una radice doppia, nessuna radice reale. Cominciamo dal primo caso: si voglia calcolare $\int \frac{2x+5}{x^2-3x+2}\,dx$. Abbiamo $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$: la tecnica da usare è quella della *decomposizione in somma di frazioni parziali*, cerchiamo cioè di scrivere

$$\frac{2x+5}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1}.$$

Si trova subito che dobbiamo scegliere $a = 9$, $b = -7$ per cui

$$\int \frac{2x+5}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{9}{x-2}\,dx + \int \frac{-7}{x-1}\,dx =$$
$$9 \log|x-2| - 7\log|x-1|.$$

8. Caso delle radici reali distinte: si voglia calcolare $\int \frac{3x+5}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{3x+5}{(x-1)^2}\,dx$. Scriviamo $3x+5 = \frac{3}{2} \cdot 2(x-1) + 8$ (dove $2(x-1)$ è la derivata di $(x-1)^2$.... L'integrale diventa immediato e vale: $3\log|x-1| - 8/(x-1) + C$.

9. Caso del polinomio di secondo grado irriducibile: vogliamo calcolare $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+6}\,dx$. In questo caso, la mossa vincente è scrivere il denominatore come somma di quadrati: $x^2+2x+5 = (x+1)^2+5$. Cambiamo poi variabile, ponendo $y = \frac{x+1}{\sqrt{5}}$...

10. Tecniche simili siano applicabili a funzioni razionali con denominatore di grado qualunque. In generale, il denominatore può essere decomposto in fattori irriducibili di primo e secondo grado. La tecnica della decomposizione in frazioni parziali funziona ancora: ad esempio

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$
$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Questi due esempi mostrano cosa succede quando c'è un fattore lineare ripetuto, oppure quando ci sono fattori di secondo grado irriducibili.

Altro esempio "esotico"

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Durante l'esercitazione, abbiamo calcolato anche un po' di altri integrali...

25 Lezione del 9/2/2009 (2 ore)

Avendo imparato delle efficaci tecniche di integrazione, vogliamo ora cominciare un discorsetto introduttivo sulle *equazioni differenziali ordinarie.*

Per non allontanarci trooppo dalla realtà, sarà bene cominciare con un esempio concreto.

Supponiamo di trovarci in un laboratorio di microbiologia, e di avere una capsula di vetro contenente un brodo di coltura. Il nostro esperimento consiste nell'introdurre nella soluzione un certo numero iniziale y_0 di batteri (tutti uguali), per poi osservare l'evoluzione della colonia nei tempi successivi. Vogliamo cioè studiare la funzione $y(t)$ che rappresenta il numero di batteri presenti nella capsula all'istante t. Per comodità, decidiamo che l'istante $t = 0$ corrisponde all'inizio dell'esperimento.

I batteri si riproducono per divisione cellulare: a un certo punto, se le condizioni sono favorevoli, la cellula che costituisce il microorganismo si suddivide, dando luogo a due individui identici. Anche se il fenomeno che stiamo descrivendo è di natura essenzialmente discreta (il numero di batteri è intero!), assumeremo al contrario che la funzione $y(t)$ vari con continuità: in sostanzia, è come se stessimo tenendo conto anche di suddivisioni "parziali" di ogni batterio.

Denotiamo con α il "tasso di suddivisione pro capite" della nostra specie di batteri: α rappresenta il *numero (medio) di suddivisioni che un individuo subisce nell'unità di tempo.*

Se consideriamo un breve intervallo temporale, compreso tra gli istanti t_0 e $t_0 + h$, e se scegliamo h tanto piccolo che sia improbabile che un batterio abbia modo di suddividersi più di una volta, vediamo subito che $y(t_0 + h) = (1 + \alpha h)y(t_0)$[14], ossia

$$\frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} = \alpha y(t_0).$$

Se poi facciamo tendere h a 0, otteniamo l'equazione $y'(t_0) = \alpha y(t_0)$, valida qualunque sia t_0.

[14]Infatti, degli $y(t_0)$ batteri presenti all'inizio, una frazione pari a $\alpha h y(t_0)$ giunge a suddividersi, dando luogo ad altrettanti nuovi individui. Se però il singolo batterio avesse il tempo di suddividersi due volte nell'intervallo temporale, l'espressione che abbiamo scritto sottostimerebbe grossolanamente il numero finale di organismi: infatti, ognuno dei *due* individui nati da ogni cellula nella prima suddivisione, si suddividerebbe nuovamente generando *quattro* nuove cellule!

Se ne deduce che la funzione $y(t)$ che rappresenta l'evoluzione della nostra colonia (almeno in questa prima, grezza approssimazione), soddisfa le seguenti due condizioni:

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) & \text{(equazione differenziale)} \\ y(0) = y_0 & \text{(condizione iniziale)} \end{cases}$$

Il problema di trovare una funzione $y(t)$ che soddisfa sia l'*equazione differenziale* (che è semplicemente un'equazione che prescrive un legame tra una certa funzione incognita e le sue derivate), che la *condizione iniziale*, è noto come *problema di Cauchy*.

In questo caso non è difficile "indovinarne" la soluzione. Se avessimo $\alpha = 1$, l'equazione differenziale diventerebbe $y'(t) = y(t)$, cioè staremmo cercando una funzione che è *uguale alla sua derivata*. Una funzione siffatta la conosciamo: è la funzione $y(t) = e^t$ (oppure, volendo, un suo multiplo). Se poi $\alpha \neq 1$, facendo un po'di prove si vede che le funzioni del tipo $y(t) = Ce^{\alpha t}$ sono tutte soluzioni dell'equazione data. Tra queste, quella che soddisfa la condizione iniziale è

$$y(t) = y_0 e^{\alpha t}.$$

In altre parole, abbiamo scoperto che la nostra colonia di batteri si espande in maniera esponenziale!

È realistico? Non troppo, almeno sui tempi lunghi. Infatti, quando i batteri diventano troppi, le risorse nutritive contenute nel brodo di coltura tenderanno ad impoverirsi, e con ogni probabilità il tasso riproduttivo pro-capite α calerà! In prima approssimazione, possiamo dire che la velocità di riproduzione pro-capite della colonia, data da $y'(t)/y(t)$, calerà in modo direttamente proporzionale al numero di batteri presenti $y(t)$: otteniamo così l'*equazione logistica*

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha - \beta y(t)$$

(con $0 < \beta << \alpha$). Questa equazione ci dice anche che se ci sono troppi batteri, il tasso di riproduzione diventa negativo: i nostri microorganismi, invece di riprodursi, cominceranno a morire!

Il problema di Cauchy per l'equazione logistica sarà

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) - \beta y^2(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{P}$$

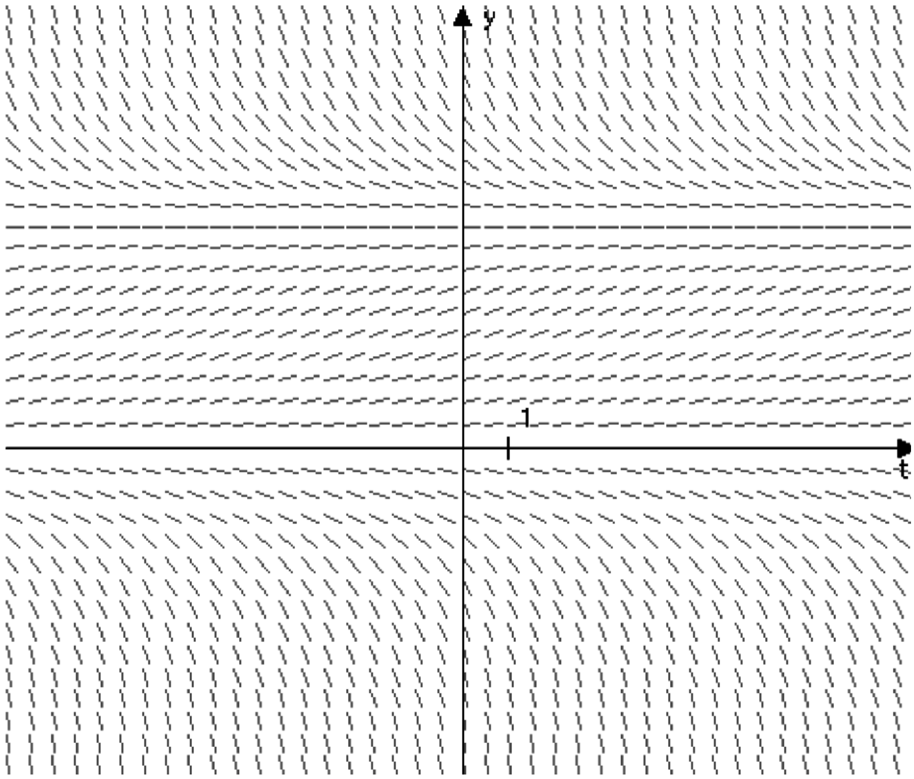
In questo caso, però, *non è affatto facile indovinare la soluzione!*.

In realtà, con tecniche che impareremo tra non molto, si potrebbe scoprire che

$$y(t) = \frac{\alpha y_0}{\beta y_0 + (\alpha - \beta y_0)e^{-\alpha t}}.$$

Ma, supponendo di non avere la soluzione esplicita, possiamo capire che aspetto avranno le soluzioni dell'equazione logistica $y'(t) = \alpha y(t) - \beta y^2(t)$ (per il momento, ignoriamo la condizione iniziale)?

Innanzitutto, cerchiamo di chiarire il significato geometrico dell'equazione stessa. Essa ci dice che se il *grafico di una soluzione* $y(t)$ passa per il punto $(\bar{t}, \overline{y})$ del piano cartesiano ty (cioè, se $y(\bar{t}) = \overline{y}$), allora in quel punto la *pendenza del grafico stesso*[15] è uguale a $\alpha\overline{y} - \beta\overline{y}^2$... In altre parole, il secondo membro dell'equazione determina nel piano ty un *campo di direzioni* al quale le *soluzioni dell'equazione devono essere tangenti.*



In sostanza, la soluzione del nostro problema di Cauchy (P) sarà quell'(unica) funzione $y(t)$ il cui grafico passa per il punto iniziale $(0, y_0)$, ed è tangente al dato campo di direzioni in ogni punto.

A questo punto dovrebbe essere chiaro che, al fine di studiare il comportamento qualitativo della soluzione di (P) al variare del dato iniziale y_0, sarà utile un'analisi del secondo membro dell'equazione logistica, cioè della funzione di una variabile $f(y) = \alpha y - \beta y^2$. Infatti, $f(\overline{y})$ rappresenta la pendenza del grafico di una qualunque soluzione della nostra equazione differenziale,

[15]Per "pendenza del grafico di $y(t)$ nel punto t, intendiamo il coefficiente angolare della tangente al grafico in quel punto.

nei punti in cui essa ha altezza $\overline{y}$, ossia in tutti i punti del piano ty della forma $(t, \overline{y})$. In particolare, vediamo subito che

$$f(y) \begin{cases} < 0 & \textit{se } y < 0 \textit{ oppure } y > \alpha/\beta, \\ = 0 & \textit{se } y = 0 \textit{ oppure } y = \alpha/\beta, \\ > 0 & \textit{se } 0 < y < \alpha/\beta. \end{cases}$$

Poiché, come ben sappiamo, il segno della derivata permette di stabilire la crescenza o decrescenza di una funzione, ne deduciamo che le soluzioni dell'equazione logistica saranno *strettamente crescenti* quando il loro grafico passa nella striscia

$$S_1 = \{(t, y) : \ 0 < y < \alpha/\beta\},$$

mentre sono *strettamente decrescenti* all'interno dei semipiani

$$S_2 = \{(t, y) : \ y < 0\}, \qquad S_3 = \{(t, y) : \ y > \alpha/\beta\}.$$

Altrettanto importante, le soluzioni hanno tangente orizzontale sulle rette $y = 0$ e $y = \alpha/\beta$: se ne deduce subito che le funzioni costanti $y(t) = 0$ e $y(t) = \alpha/\beta$ *sono soluzioni dell'equazione che stiamo studiando*[16] (più precisamente, sono le sole soluzioni costanti)!

Per proseguire nel nostro studio qualitativo, è importante conoscere la seguente informazione teorica, che deriva da un importante *Teorema di esistenza e unicità locale* che enunceremo più avanti:

Proprietà fondamentale delle soluzioni dell'equazione logistica: *Per ogni punto del piano ty passa una ed una sola soluzione dell'equazione logistica. In particolare, due soluzioni distinte dell'equazione non possono mai incrociarsi.*

Inoltre, per ogni soluzione dell'equazione si danno due possibilità: o $y(t)$ è definita per ogni t reale, oppure il grafico di $y(t)$ ha un asintoto verticale (cioè $y(t)$ tende a $\pm\infty$ quando t si avvicina a un certo valore $\overline{t}$).

Ne deriva che le due soluzioni costanti $y(t) = 0$ e $y(t) = \alpha/\beta$ costituiscono una *barriera invalicabile* per tutte le altre soluzioni dell'equazione. In particolare:

- Se $0 < y_0 < \alpha/\beta$, la soluzione rimane confinata nella striscia S_1, e sarà dunque sempre crescente.

[16] Nel quadro del nostro esperimento di biologia, questo significa che se partiamo con 0 batteri rimarremo sempre con 0 batteri, ma anche (cosa meno ovvia!) che se partiamo con α/β batteri, la popolazione rimane costante: α/β rappresenta un livello di equilibrio per la nostra colonia.

- Se $y_0 < 0$ o $y_0 > \alpha/\beta$, la soluzione rimane confinata rispettivamente nei semipiani S_2 e S_3, e sarà quindi decrescente.

Visto che y_0 rappresenta il numero iniziale di batteri nella nostra capsula di vetro, ci interessano solo i casi (i) $0 < y_0 < \alpha/\beta$ e (ii)$y_0 > \alpha/\beta$.

- **(i):** $0 < y_0 < \alpha/\beta$ In questo caso il numero $y(t)$ di batteri resta compreso tra 0 e α/β, e cresce sempre perché la derivata è positiva. Evidentemente, asintoti verticali non ce ne possono essere perché la funzione si mantiene limitata.

  Quindi, esso tenderà necessariamente ad un certo valore $y_\infty = \lim_{t\to+\infty} y(t)$. Graficamente, la retta $y = y_\infty$ è un asintoto orizzontale della soluzione $y(t)$.

  Affermo che si ha necessariamente $y_\infty = \alpha/\beta$, cioè la popolazione di batteri tende al livello di equilibrio.

  Supponiamo infatti per assurdo che si abbia $y_\infty < \alpha/\beta$. Allora

  $$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} f(y(t)) = f(y_\infty) > 0,$$

  per cui la derivata della soluzione tenderebbe ad un limite strettamente positivo. D'altra parte, è facile convincersi che se una funzione ha un asintoto orizzontale e la derivata della funzione ammette limite per $t \to +\infty$, allora necessariamente questo limite è 0. L'unico modo di sfuggire a questo assurdo è supporre $y_\infty = \alpha/\beta$, come volevasi dimostrare.

- **(ii):** $y_0 > \alpha/\beta$ In questo caso la soluzione è decrescente, e deve restare sopra il livello di equilibrio α/β. Anche in questo caso, la soluzione rimarrà limitata per tempi positivi[17]. Ragionando esattamente come prima, si deduce che anche in questo caso la colonia tende asintoticamente al livello di equilibrio.

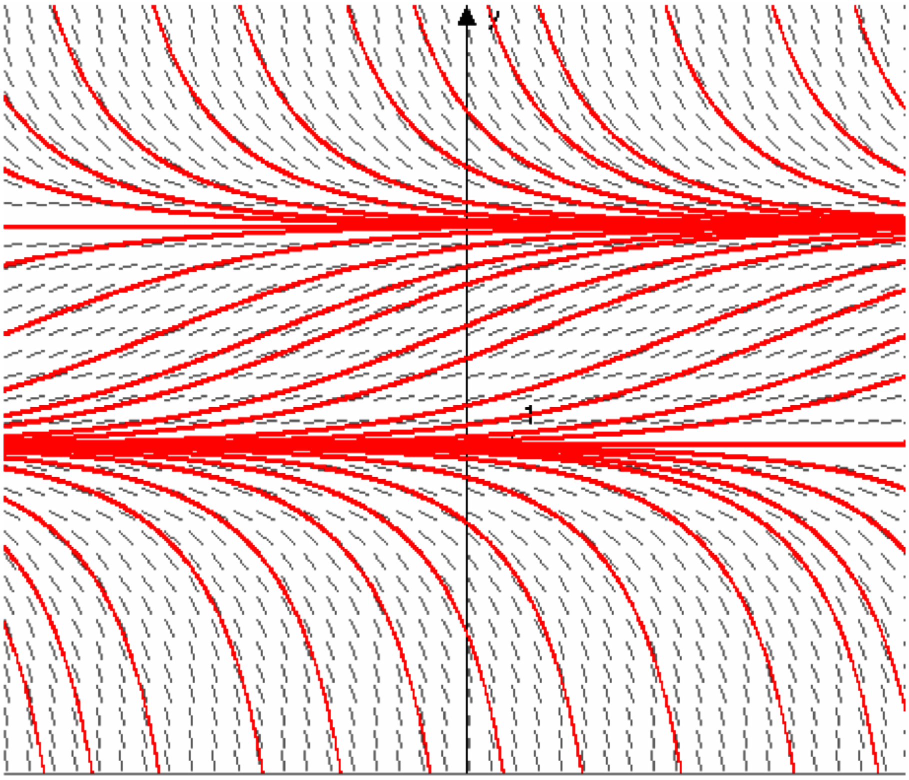
CONCLUSIONE: Studiando il comportamento delle soluzioni del problema (P), abbiamo scoperto una cosa non ovvia: *qualunque sia* il numero iniziale di batteri y_0 immesso nella colonia, essa tende a stabilizzarsi sulla popolazione di equilibrio $y = \alpha/\beta$.

Maggiori informazioni sull'andamento qualitativo delle soluzioni di (P) si possono ottenere per esempio studiando il segno della loro derivata seconda: derivando l'equazione otteniamo $y''(t) = \alpha y'(t) - 2\beta y(t)y'(t) = (\alpha -$

[17]Invece, non possiamo escludere che la soluzione abbia un asintoto verticale per tempi negativi. In effetti, ce l'ha (anche se non è facile dedurlo da uno studio qualitativo).

$2\beta y(t))(\alpha y(t) - \beta y(t)^2)$. Se ne deduce che le soluzioni sono convesse in S_3, concave in S_2. Invece, nella striscia S_1 esse cambiano concavità: si ha infatti un flesso nei punti in cui $y = \frac{\alpha}{2\beta}$.

Alcune soluzioni di (P) sono mostrate nella seguente figura:



Se volete visualizzare le soluzioni di questa ed altre equazioni differenziali, ecco un programmino interattivo[18] che vi consente di farlo.

L'esempio dell'equazione logistica ci dovrebbe aver motivato a capire quali risultati di esistenza ed unicità possiamo aspettarci: a questo scopo è utile vedere un paio di esempi.

ESEMPIO: Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Scrivendo l'equazione nella forma $x'(t)/x^2(t) = 1$ e integrando, si trova che l'unica soluzione è $x(t) = 1/(1-t)$. Siccome una soluzione ci aspettiamo che

[18] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/divulgazione/Cauchy/equadiff.html`

sia continua e derivabile in un intervallo che contiene il punto iniziale, se ne deduce che la soluzione del problema *non è definita su tutta la retta reale, ma solo sulla semiretta* $(-\infty, 1)$.

Dunque, anche se il secondo membro dell'equazione è estremamente regolare, possiamo sperare solo in un teorema di esistenza e unicità *locale*, che ci assicuri l'esistenza di una soluzione in un opportuno *intorno dell'istante iniziale* t_0.

ESEMPIO: Si noti che, affinché la nostra equazione differenziale abbia senso, sembra ragionevole assumere che la funzione a secondo membro sia continua.

La sola continuità non è però sufficiente a garantire l'unicità della soluzione del problema di Cauchy: ad esempio il problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni. Infatti, si vede subito che $x(t) = 0$ è una soluzione. Inoltre, applicando lo stesso trucco usato sopra scopriamo che la funzione $x(t) = t^2/4$ è una soluzione del problema per $t > 0$... e indoviniamo così che tutte le funzioni del tipo

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_0)^2}{4} & se\ t \geq t_0 \\ 0 & se\ t < t_0 \end{cases}$$

sono soluzioni del problema di Cauchy ($t_0 > 0$ è una costante).

A questo punto, sappiamo che il nostro teorema di esistenza e unicità potrà darci soltanto un *risultato di esistenza locale*, e che per avere l'unicità dovremo chiedere più che la continuità della funzione a secondo membro dell'equazione...

26 Lezione del 10/2/2009 (1 ora + 2 ore esercitazione opzionale)

Il trucchetto che abbiamo usato prima per trovare le soluzioni dei problemi di Cauchy negli esempi della volta scorsa, si generalizza a tutta una classe di equazioni differenziali dette *a variabili separabili*: supponiamo che $A(t)$ e $B(x)$ siano due funzioni continue, definite rispettivamente in un intorno di t_0 e di x_0. Supponiamo anche che $B(x_0) \neq 0$. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{A(t)}{B(x(t))} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che $x(t)$ sia una soluzione del problema: moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per $B(x(t))$ e integriamo tra t_0 e t. Se denotiamo con $F(t)$ e $G(x)$ delle primitive di $A(t)$ e $B(x)$ rispettivamente, si ottiene $G(x(t)) = F(t) - F(t_0) + G(x_0)$.

Questa è un'equazione che ci fornisce la soluzione $x(t)$ *in forma implicita*: se per caso sapessimo che la funzione G è invertibile in un intorno di x_0 (e si può vedere abbastanza facilmente che questo è proprio vero!), potremmo ottenere esplicitamente la soluzione come $x(t) = G^{-1}(F(t) - F(t_0) + G(x_0))$.

Si noti che vale anche il viceversa: la funzione $x(t)$ appena trovata è una soluzione del problema di Cauchy (basta ripercorrere a ritroso i passaggi che abbiamo fatto!): in questo caso abbiamo trovato esplicitamente la soluzione del problema, ed abbiamo anche dimostrato che essa è unica.

Un'altra classe di equazioni del primo ordine che si possono risolvere esplicitamente è costituita dalle *equazioni lineari del primo ordine*: esse sono della forma

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t),$$

dove a e b sono date funzioni continue definite su un certo intervallo (a, b).

Se imponiamo anche la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ (con $t_0 \in (a, b)$), mostreremo ora che esiste un'unica soluzione, definita su tutto l'intervallo (a, b): in questo caso particolarmente fortunato abbiamo *esistenza e unicità globale*, e possiamo anche scrivere esplicitamente la soluzione.

Il trucco consiste nel moltiplicare ambo i membri dell'equazione per il *fattore integrante*

$$F(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}.$$

Facendo questo, a primo membro avremo la derivata del prodotto $x(t)F(t)$, e integrando ambo i membri tra t_0 e t troviamo la soluzione esplicita del problema di Cauchy:

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} b(t)\, dt \right).$$

La prossima volta vedremo finalmente il teorema di esistenza e unicità locale!

Nelle due ore di esercitazione opzionale abbiamo calcolato un po' di integrali, per esempio:

$$\int \cos(3 \log x)\, dx; \qquad \int_0^{\pi/2} \sin(2t) e^{\sin t}\, dt;$$
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} e^{4 \tan x}\, dx.$$

Abbiamo poi risolto alcuni problemi di Cauchy per equazioni a variabili separabili:

$$
\begin{aligned}
&y'(t) = \frac{t^2}{y(t)}, \quad y(1) = 1;\\
&\sqrt{y(t)}y'(t) = 2y(t)(1 + y(t)), \quad y(\pi/4) = 1;\\
&y'(x) = \frac{2}{x}\log(x^{(1+y(x)^2}), \quad y(1) = 1;\\
&y'(t) = \alpha y(t) - \beta y^2(t), \quad y(0) = y_0.
\end{aligned}
$$

ed anche per equazioni lineari del primo ordine:

$$
\begin{aligned}
&y'(t) + ty(t) = t, \quad y(1) = 1;\\
&y'(t) - \frac{1}{1+t^2}y(t) = e^{\arctan(t)}, \quad y(0) = 6;\\
&y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = t^2, \quad y(1) = 3/2;\\
&y'(t) + 2t\cos(t^2)y(t) = e^{-\sin(t^2)}t^5, \quad y(0) = 0;\\
&y'(t) - e^{-t}y(t) = e^{-e^{-t}}, \quad y(0) = 0.
\end{aligned}
$$

27 Lezione del 16/2/2009 (2 ore)

Torniamo ai risultati teorici sul problema di Cauchy: dagli esempi visti la volta scorsa, abbiamo capito che quel che vogliamo è teorema di *esistenza e unicità locale* per le soluzioni del problema di Cauchy

$$
\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}
$$

In sostanza, vogliamo un risultato che ci dica che se la funzione f è *sufficientemente buona*, allora il problema ammette un'unica soluzione, e questa soluzione è definita *in un opportuno intorno* dell'istante iniziale t_0.

Un tipico risultato di questo tipo è il seguente:

TEOREMA (Di esistenza e unicità locale o di Cauchy-Lipschitz): Sia $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ *una funzione di due variabili continua, derivabile con continuità rispetto alla seconda variabile.*

Siano poi $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$. Allora esiste $\delta > 0$ ed una funzione derivabile $y(t) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbf{R}$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Questa soluzione è unica, nel senso che ogni altra soluzione del problema coincide con $y(t)$ nell'intervallo in cui sono definite entrambe.

Non dimostreremo questo teorema, perché servirebbero degli strumenti che esulano dagli scopi di questo corso. Val la pena di fare comunque qualche osservazione sulle ipotesi del teorema e sul loro significato.

OSSERVAZIONI:

- Per capire l'enunciato, ci occorre la definizione di funzione continua in due variabili. In realtà, essa non cambia molto rispetto all'analoga definizione in una variabile: se $(x_0, y_0) \in A \subset \mathbf{R}^2$ e $f : A \to \mathbf{R}$, diremo che f è continua in (x_0, y_0) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

  $$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

  ogni volta che la distanza tra i punti $(x,y) \in A$ e (x_0, y_0) è minore di δ.

  Esattamente come in una variabile, si verifica facilmente che somma, prodotto, rapporto di funzioni continue è una funzione continua (se non si annulla il denominatore), che composizione di funzioni continue è continua, che i polinomi e le altre funzioni elementari sono continue. Inoltre, vale il teorema di Weierstrass: una funzione continua su un rettangolo chiuso e limitato ammette massimo.

- L'ipotesi che f sia derivabile con continuità rispetto alla seconda variabile significa che esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$, e che essa sia una funzione continua in tutto il rettangolo $[a,b] \times [c,d]$.

  La derivata parziale rispetto a y si definisce nel modo seguente:

  $$\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0, y_0 + h) - f(t_0, y_0)}{h},$$

  a patto che il limite esista finito. Questo equivale a derivare f guardandola come una funzione della sola variabile y, considerando t come un parametro fissato.

- Abbiamo visto che in generale non ci possiamo aspettare che la soluzione sia definita su tutto l'intervallo $[a, b]$: con le ipotesi generali che abbiamo scelto possiamo pretendere soltanto *esistenza locale*. Per avere *esistenza globale* ci sarà bisogno di avere qualche informazione supplementare sulla funzione f: per esempio, abbiamo visto che nel caso delle equazioni lineari si ha sempre esistenza globale (e si riesce anche a scrivere esplicitamente la soluzione!).

Conclusa la nostra brevissima introduzione alle equazioni differenziali, passiamo a considerare una interessante generalizzazione dell'integrale di Riemann.

In effetti, la nostra definizione di integrale di Riemann è abbastanza soddisfacente, ma nella pratica può essere utile definire l'integrale di una funzione su intervalli che siano *illimitati*. Precisamente, proponiamo in modo abbastanza naturale la seguente definizione:

DEFINIZIONE: Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua. L'integrale (improprio o generalizzato) di f sulla semiretta $[a, +\infty)$ si definisce come

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\, dx$$

a patto che il limite esista.

A titolo di esempio, abbiamo verificato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx = 1$, mentre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$ e infine $\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$ non esiste.

In modo analogo possiamo definire l'integrale (generalizzato) di una funzione continua su un intervallo *aperto in uno dei suoi estremi*: se per esempio $f : (a, b] \to \mathbf{R}$ è continua, definiamo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta \to a^+} \int_\delta^b f(x)\, dx,$$

a patto che il limite esista.

Anche in questo caso, l'integrale può essere finito, infinito o non esistere.

Per esempio, un semplice conticino mostra che l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\ dx$ è finito se e soltanto se $\alpha < 1$, mentre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx$ è finito se e solo se $\alpha > 1$ (e per $\alpha = 1$, *entrambi* gli integrali sono infiniti). Invece, l'integrale della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin(1/x)$ non esiste su $(0, 1]$.

A questo proposito, vale la pena di notare che se $f \geq 0$, l'integrale improprio *esiste sempre* (sia nel caso delle semirette che nel caso degli intervalli semiaperti). Infatti, in quel caso il limite nella definizione di integrale improprio è il limite di una funzione monotona, e sappiamo bene che questo esiste sempre (finito o infinito). Dunque, nel caso delle funzioni non negative, l'integrale improprio può essere finito (e in quel caso diremo che *converge*), oppure può *divergere a* $+\infty$.

Un'altra semplicissima osservazione (che deriva dalla proprietà monotonia dell'integrale) è la seguente

PROPOSIZIONE (Principio del confronto per gli integrali impropri, prima versione): Siano $f, g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ *due funzioni continue non negative, e supponiamo di sapere che* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in [a, +\infty)$. *Allora, se l'integrale di* g *converge, converge anche l'integrale di* f. *Se invece l'integrale di* f *diverge, diverge anche l'integrale di* g.

Un analogo principio di confronto vale anche per gli integrali impropri di funzioni continue su intervalli semiaperti.

Come conseguenza abbiamo la seguente Proposizione, che ha anch'essa un'ovvia estensione agli integrali impropri di funzioni continue su intervalli semiaperti:

PROPOSIZIONE (Principio dell'equivalenza asintotica): Siano $f, g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ *due funzioni continue non negative tali che* $f(x) \sim g(x)$ *per* $x \to +\infty$ *(questo significa che* $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 1$, *e si legge "$f$ è asintoticamente equivalente a g"). Allora gli integrali impropri*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx, \qquad \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$

hanno lo stesso comportamento: sono entrambi convergenti, oppure entrambi divergenti a $+\infty$.

DIM.: Per definizione di limite all'infinito, visto che $f \sim g$ esisterà $\overline{a} \geq a$ tale che

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x) \quad \forall x \geq \overline{a}.$$

La tesi segue allora dal principio del confronto applicato agli integrali impropri sulla semiretta $[\overline{a}, +\infty)$. Q.E.D.

28 Lezione del 17/2/2009 (1 ora + 1 ora esercitazione opzionale)

Meno ovvia è la seguente versione del principio del confronto, valida per una funzione f *di segno qualunque*:

PROPOSIZIONE (della convergenza assoluta): Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora, se l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

converge, esiste finito anche l'integrale improprio di f.

DIM.: Consideriamo la funzione $h(x) = f(x) + |f(x)|$.

Segue subito che $0 \le h(x) \le 2|f(x)|$, per cui l'integrale improprio di h è convergente. Possiamo scrivere allora:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\, dx =$$
$$\lim_{M\to+\infty} \left[\int_a^M h(x)\, dx - \int_a^M |f(x)|\, dx \right],$$

e l'ultimo limite esiste finito perché i due integrali impropri coinvolti sono convergenti. Q.E.D.

Il teorema del confronto si rivela spesso utilissimo per dimostrare la convergenza (o la divergenza, nel caso di funzioni non negative) dell'integrale improprio di una funzione di cui *non si sappia calcolare esplicitamente una primitiva.* Purtroppo, però, la convergenza assoluta è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la convergenza di un integrale improprio:

ESEMPIO: L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ esiste finito, mentre $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty$.

Infatti, integrando per parti si ha

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\, dx \to \ \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ converge per il principio del confronto, perché $\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ e abbiamo visto che l'integrale dell'ultima funzione è finito. Dunque, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ esiste finito.

Facciamo vedere che invece $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty$.

Infatti, per ogni $n \in \mathbf{N}$ $(n \ge 2)$ avremo

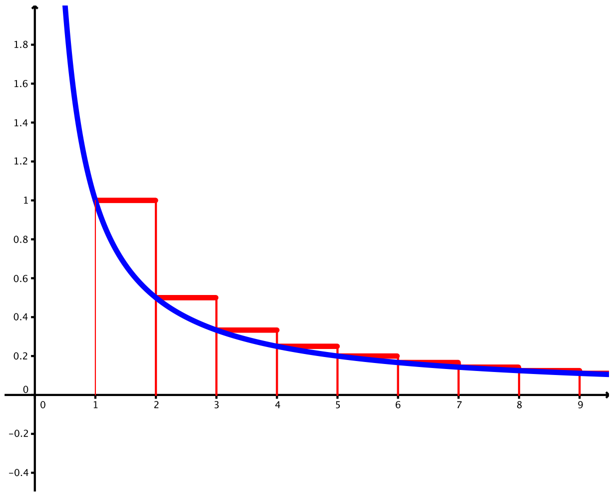
$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \ge \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ abbiamo quindi trovato la seguente disuguaglianza:

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots)$$

La serie nell'ultima disuguaglianza (cioè la serie dei reciproci dei numeri naturali) si chiama *serie armonica*: mostreremo ora che essa *diverge a* $+\infty$, concludendo così la dimostrazione della divergenza del nostro integrale.

Per farlo, useremo ancora una volta il principio del confronto per gli integrali impropri! Infatti, possiamo interpretare la serie armonica come l'integrale tra 2 e $+\infty$ della funzione a scala (con infiniti scalini) $\phi(x) = \frac{1}{[x]}$[19].



Visto che $\phi(x) \geq \frac{1}{x}$, e visto che$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$, il principio del confronto ci dice che l'integrale di ϕ (che è poi la serie armonica) diverge.

La discussione appena fatta per mostrare la divergenza dell'integrale improprio di $\frac{|\sin x|}{x}$, ci suggerisce un utilissimo *criterio di convergenza per le serie*. Ricordiamo a questo proposito, la fondamentale *definizione di serie* che abbiamo già visto parlando di polinomi di Taylor: se $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è una successione di numeri reali, ricordo che si pone *per definizione*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

a patto che il limite a secondo membro esista. La successione

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

si chiama *successione delle somme parziali* della serie, per cui la somma della serie è semplicemente il limite delle somme parziali!

[19]Si noti che la definizione di integrale improprio si può estendere senza cambiare nulla a funzioni anche non necessariamente continue, che siano però integrabili secondo Riemann su tutti gli intervalli limitati. Quindi, è perfettamente lecito fare l'integrale improprio di ϕ.

Ora, una serie può essere vista come... l'integrale di un'opportuna funzione a scala. Se ne ricava facilmente il seguente risultato:

PROPOSIZIONE (Criterio integrale di convergenza per le serie): Sia $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ *una funzione non negativa e decrescente. Allora l'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Con questo vogliamo dire che se l'integrale converge, converge anche la serie, mentre se l'integrale diverge a $+\infty$*, diverge anche la serie.*

Vedremo la prossima volta la dimostrazione!

Abbiamo utilizzato l'ora di esercitazione per studiare la convergenza di un po' di integrali impropri (e calcolarne anche alcuni):

$$\int_0^1 \sin(1/x)\, dx; \quad \int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\, dx \quad \int_0^{+\infty} x^3 e^{-2x^2}\, dx$$

$$\int_{-1}^3 \frac{xe^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\, dx; \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2(1+x^2)}\, dx; \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)}\, dx;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}; \quad \int_0^3 (x+1)\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+1};$$

$$\int_0^4 \frac{x}{x^2-2x-3}\, dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}; \quad \int_1^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx;$$

$$\int_0^{+\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x)\, dx; \quad \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\, dx;$$

29 Lezione del 23/2/2009 (2 ore)

Per dimostrare il criterio integrale di convergenza delle serie, che abbiamo enunciato la volta scorsa, basta osservare che $f([x+1]) \leq f(x) \leq f([x])$, e interpretare la serie come l'integrale della funzione costante a tratti $f([x])$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_1^{+\infty} f([x])\, dx.$$

È disponibile in rete un'animazione costruita con GeoGebra[20], che tenta di illustrare la dimostrazione appena fatta.

ESEMPIO: La *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$: basta usare il criterio integrale con la funzione $f(x) = 1/x^\alpha$.

Da quanto abbiamo appena visto, non ci stupirà scoprire che esistono delle analogie tra integrali impropri e serie! Cominciamo infatti con un elenco di alcune proprietà delle serie che ricordano quanto abbiamo già visto per gli integrali:

- Se $a_n \geq 0$, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *esiste sempre*, finita o infinita: infatti, le somme parziali costituiscono una successione monotona. In sostanza *una serie a termini positivi converge a una somma finita, oppure diverge a* $+\infty$.

- Vale il seguente *criterio del confronto per le serie a termini positivi*: se $0 \leq a_n \leq b_n$, allora la convergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ implica la convergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, mentre la divergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ implica la divergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.

- Vale anche un *criterio dell'equivalenza asintotica*: se $a_n, b_n > 0$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

  allora le serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ hanno lo stesso comportamento.[21]

- Se una serie è *assolutamente convergente*, cioè se converge $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$, allora anche la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ esiste finita.[22]

[20] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/aa2008/serie_geogebra/serie.html`

[21] Questo criterio è falso per le serie a termini di segno qualunque.

[22] Anche in questo caso, non vale il viceversa: vedremo che una serie può convergere anche se non converge assolutamente.

Un'altra proprietà interessante (che per gli integrali impropri *non* vale) è la seguente:

PROPOSIZIONE: Se la serie (a termini di segno qualunque) $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *converge, allora*

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$$

.

DIM.: Se s_n denota la somma parziale n-esima della serie e s la sua somma (cioè $s_n \to s$), si ha $a_n = s_n - s_{n-1}$, e passando al limite per $n \to +\infty$ si ha la tesi. Q.E.D.

Si noti che il viceversa *non è vero*: il termine generale della serie può essere infinitesimo senza che la serie converga. Come esempio, c'è il caso della serie armonica: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

ESEMPIO FONDAMENTALE (Serie geometrica): Utilizziamo ora la formula per la somma della progressione geometrica per studiare la *serie geometrica*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k,$$

in cui a è un numero reale chiamato *ragione* della serie.

Se $s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$ denota la somma parziale n-esima della serie, abbiamo visto che $s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Se studiamo il limite di questa espressione per $n \to +\infty$, vediamo che la serie converge a $1/(1-a)$ per $|a| < 1$, diverge a $+\infty$ per $a \geq 1$, non esiste per $a < -1$.

Usando il nostro studio della serie geometrica e il criterio del confronto, possiamo ottenere abbastanza facilmente i seguenti, semplici criteri di convergenza. Omettiamo la dimostrazione.

PROPOSIZIONE (Criteri della radice e del rapporto): Sia a_n *il termine generale di una serie,* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

- *Supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell_1.$$

Allora, se $\ell_1 > 1$ *la serie non converge, se* $\ell_1 < 1$ *converge.*

- *Sia $a_n \neq 0$, e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell_2.$$

Allora, se $\ell_2 > 1$ la serie non converge, se $\ell_2 < 1$ converge[23].

OSSERVAZIONE: I criteri della radice e del rapporto falliscono se i limiti ℓ_1, ℓ_2 sono uguali ad 1. Per esempio, si consideri la serie armonica generalizzata di termine generale $a_n = 1/n^\alpha$. In questo caso, i limiti di radice e rapporto sono entrambi uguali a 1, ma abbiamo visto che la serie converge se $\alpha > 1$, mentre diverge per $\alpha \leq 1$.

OSSERVAZIONE: Senza fare la dimostrazione, osserviamo tuttavia che il criterio della radice è abbastanza plausibile: per n grande si ha $\sqrt[n]{|a_n|} \simeq \ell_1$, da cui $|a_n| \simeq \ell_1^n$. È allora ragionevole attendersi che la serie $\sum |a_n|$ abbia lo stesso comportamento della serie geometrica $\sum \ell_1^n$: quest'ultima converge se $\ell_1 < 1$. Se viceversa $\ell_1 > 1$, il termine generale della serie geometrica non tende a zero, per cui non tenderà a 0 neanche a_n... Quest'idea può essere trasformata in una vera dimostrazione con non troppa fatica!

Che altro dire delle serie a termini di segno qualunque? Se esse non convergono assolutamente, abbiamo ben pochi strumenti a nostra disposizione. Uno di questi è il seguente (anche in questo caso, tralasciamo la dimostrazione):

PROPOSIZIONE (Criterio di Leibniz): Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri non negativi, e si consideri la serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

Se a_n è decrescente e tende a zero, allora la serie converge.

Il criterio di Leibniz ci dice ad esempio che la versione a segni alterni della serie armonica, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, è convergente (in realtà, si può far vedere che converge a $\log 2$). La convergenza di questa serie (e, in una certa misura, l'idea della dimostrazione del criterio di Leibniz), può essere visualizzata con un'animazione costruita con GeoGebra[24] disponibile in rete.

[23] Si potrebbe far vedere che se esiste il limite del rapporto ℓ_2, allora esiste anche il limite della radice ℓ_1, e questi due limiti sono uguali: per questo, il criterio del rapporto è in realtà una conseguenza del criterio della radice.

[24] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/aa2008/serie_geogebra/leibniz.html`

30 Lezione del 2/3/2009 (esercitazione opzionale - 2 ore)

Abbiamo studiato la convergenza di un certo numero di serie, del tipo di quelle che seguono[25]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k^2}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{1/k}}{k^{3/2}}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sin(1/k)\frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(e^{1/k}-1)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\log k}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{5+3^k}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\sqrt{k^3(k^2+2k+1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 2^n}{3^n}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{\sqrt{n^3}+7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2n}}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2n}}x^n\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(4n+1)!}x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n^3+5}x^n\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}x^n\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}x^n$$

31 Lezione del 3/3/2009 (2 ore)

In questa lezione vogliamo mostrare come una qualunque *funzione periodica* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ possa essere vista, in un senso che preciseremo, come *serie di funzioni sinusoidali* aventi frequenza multipla di quella di f.

Supponiamo per semplicità che f sia 2π-periodica (ci si può sempre ricondurre a questa situazione con un cambio di variabili): quel che stiamo dicendo è che f si può scrivere nel modo seguente

$$(F_1)\quad f(x)=A_0/2+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(nx-\phi_n),$$

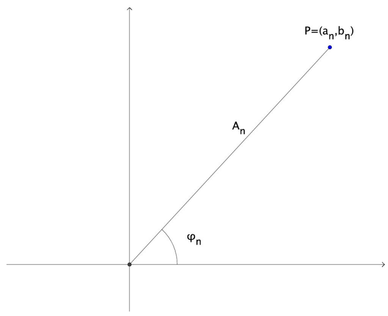
dove A_n e ϕ_n sono successioni di costanti da determinarsi. La scrittura di destra è chiamata *serie di Fourier di* f, mentre i singoli addendi si chiamano *armonici* di f.

[25]Per le serie di potenze, ci si chiede *per quali* x esse convergono!

Come vedremo, una decomposizione di questo tipo ha innumerevoli applicazioni pratiche (acustica, compressione dei suoni e delle immagini, fisica, *bioinformatica...*): essa ci consente di vedere un fenomeno periodico anche molto complicato, come somma pesata di fenomeni periodici del tipo più semplice, quelli appunto sinusoidali!

Possiamo paragonare la nostra scrittura all'effetto di un prisma: quest'ultimo scompone la luce bianca nelle sue componenti monocromatiche, la serie di Fourier scompone un segnale periodico nelle sue componenti sinusoidali.

Prima di proseguire nella nostra discussione, è utile osservare come i singoli armonici $A_n \cos(nx - \phi_n)$ possano essere scritti equivalentemente come $a_n \cos nx + b_n \sin nx$, dove $a_n = A_n \cos \phi_n$, $b_n = A_n \sin \phi_n$: per passare dalla prima scrittura alla seconda basta applicare le formule di addizione per il coseno. Viceversa, è facile trovare A_n e ϕ_n da a_n, b_n: basta tracciare nel piano cartesiano il punto $P = (a_n, b_n)$ e osservare che A_n è la distanza di questo punto dall'origine ($A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$), mentre ϕ_n è l'angolo formato dal semiasse positivo delle x con il segmento OP.

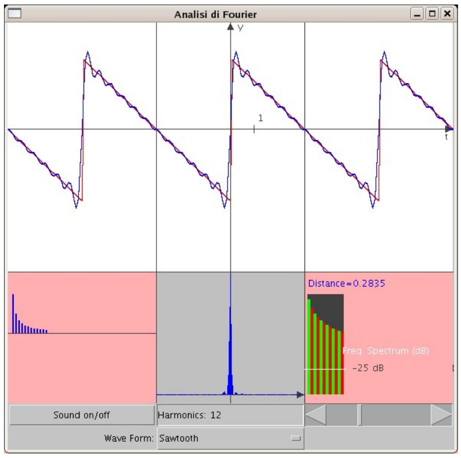


In conclusione, nel seguito il nostro compito sarà quello di trovare due successioni di coefficienti a_n, b_n in modo che (con opportune ipotesi sulla funzione 2π-periodica f ed in un senso da precisare) si abbia

$$(F_2) \quad f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

Come piccolo "test di plausibilità" sulla decomponibilità di una qualunque funzione in somma di sinusoidi, ci siamo messi a giocare un po' con un programmino java[26] che ho scritto proprio a questo scopo

[26] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/divulgazione/Fourier_bis/fourier.html`



Il programmino ci ha anche fatto capire come la decomposizione in serie di Fourier abbia grande importanza in acustica: abbiamo potuto infatti constatare che il nostro orecchio *non si accorge se si cambiano gli angoli di fase* ϕ_n *nella scrittura* (F_1)...

A questo punto, però, viene naturale chiedersi come si possano trovare i coefficienti a_n, b_n della serie di Fourier!

Iniziamo con un semplice esercizio di calcolo integrale: non è affatto difficile convincersi che valgono le seguenti *relazioni di ortogonalità* per il seno ed il coseno

$$(*a) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt = \begin{cases} 0 & se\ m \neq n \\ \pi & se\ m = n \end{cases}$$

$$(*b) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\ \sin(mt) = \begin{cases} \pi & se\ m = n \\ 0 & se\ m \neq n \end{cases}$$

$$(*c) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\ \sin(mt) = 0,$$

dove m, n sono numeri naturali.

A questo punto, prendiamo la scrittura (F_1): se essa è vera con un'opportuna scelta dei coefficienti, possiamo moltiplicare ambo i membri per $\cos nx$ ed integrare tra $-\pi$ e π. Supponendo che si possa scambiare la somma con l'integrale (cosa non ovvia perché si tratta di una somma infinita!) ed usando le relazioni di ortogonalità troviamo subito

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\ dx = \pi a_n.$$

Analogo risultato si ottiene moltiplicando per $\sin nx$ ed integrando: se il conto formale che abbiamo fatto ha senso, abbiamo trovato una formula che ci fornisce i coefficienti

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx.$$

Per definizione, i numeri a_n e b_n dati da queste formule si chiamano *coefficienti di Fourier* di f.

Ovviamente, i conti che abbiamo fatto finora non ci garantiscono affatto che scegliendo i coefficenti in questo modo la serie converga *davvero* alla funzione f! Per rendere la cosa più plausibile, vogliamo arrivare alla serie di Fourier per una via traversa, che consiste nel risolvere un *problema di approssimazione ottimale.*

Innanzitutto, introduciamo la seguente *distanza* tra due funzioni 2π-periodiche ed integrabili secondo Riemann:

$$d(f,g) := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 \, dx}.$$[27]

Alcuni esperimenti che abbiamo fatto con l'applet di cui sopra e con Geogebra sembrano indicare che questo tipo di distanza sia abbastanza adatta a studiare quanto bene le somme parziali delle serie di Fourier approssimano una funzione periodica f...

Ci proponiamo il seguente

PROBLEMA: Sia data una funzione 2π-periodica f, abbastanza regolare (diciamo, continua tranne eventualmente in un numero finito di punti di salto). Fissiamo un numero $N \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Tra tutte le somme di N armoniche, cioè tra tulle le funzioni del tipo

$$g(x) = \alpha_0/2 + \sum_{n=1}^{N} [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx],$$

ci proponiamo di trovare quella *di distanza minima da* f (dove, ovviamente, la distanza è quella introdotta sopra).

Vedremo la prossima volta che questo problema non è affatto difficile... e che la soluzione si ottiene scegliendo come coefficienti proprio i coefficienti di Fourier di f!

Nel frattempo, vi lascio il link ad un foglio GeoGebra[28] che permette di visualizzare l'approssimazione di una funzione periodica fornita dall'utente, con la somma di un dato numero di armonici.

[27] Questa si chiama *distanza* L^2 tra f e g.

[28] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/divulgazione/dft/dft.html`

32 Lezione del 9/3/2009 (2 ore)

Cerchiamo di affrontare il problema della volta scorsa: data una funzione $f(x)$ che sia 2π-periodica e "abbastanza decente", vogliamo approssimarla con una funzione del tipo

$$g(x) = \alpha_0/2 + \sum_{n=1}^{N} [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx],$$

scegliendo i coefficienti in modo da *minimizzare la distanza tra f e g*. La funzione g, somma di al più N armonici, è nota anche come *polinomio trigonometrico di grado N*. Il problema è quindi quello di trovare il polinomio trigonometrico di grado N *più vicino* alla nostra funzione periodica f.

Supponiamo che f sia una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann. Ricordando la definizione di distanza data la volta scorsa, abbiamo

$$(*) \qquad d^2(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 \, dx =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) \, dx.$$

Calcoliamo esplicitamente gli ultimi due termini in (*): ricordando la definizione dei coefficienti di Fourier a_n, b_n della funzione f e le relazioni di ortogonalità si ottiene subito che

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx &= \pi[a_0\alpha_0/2 + \sum_{n=1}^{N} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)], \\ \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) \, dx &= \pi[\alpha_0^2/2 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n^2 + \beta_n^2). \end{aligned}$$

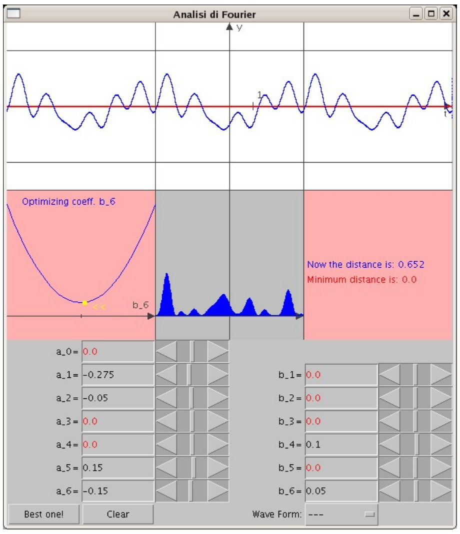
Sostituendo in (*) otteniamo dunque

$$d^2(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx + \pi \left\{ (\alpha_0^2 - 2\alpha_0 a_0)/2 + \sum_{n=1}^{N} [(\alpha_n^2 - 2\alpha_n a_n) + (\beta_n^2 - 2\beta_n b_n)] \right\}.$$

Per minimizzare questa quantità, basta scegliere i coefficienti in modo da minimizzare ciascuno dei polinomi quadratici tra parentesi tonde: si vede subito che questo corrisponde a scegliere $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. I coefficienti ottimali sono proprio i coefficienti di Fourier!

Abbiamo visto in classe un'applet java[29] che cerca di "rendere visibile" questo processo di minimizzazione.

[29] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/divulgazione/Fourier1/fourier1.html`



Indichiamo con $\tilde{g}$ l'approssimazione ottimale che abbiamo trovato (e che possiamo chiamare *polinomio trigonometrico di Fourier*). La distanza minima è data dalla formula

$$d^2(f,\tilde{g}) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \pi[a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)].$$

Poichè il quadrato della distanza è una quantità positiva, questo ci fornisce in particolare la *disuguaglianza di Bessel*

$$[a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)] \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Passando al limite per $N \to +\infty$, essa ci garantisce che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < +\infty.$$

Una conseguenza interessante e non ovvia di questo è che i coefficienti di Fourier a_n e b_n *tendono a* 0 per $n \to +\infty$.

Il conto appena fatto ci dice certamente che, al crescere di N, l'approssimazione non può che migliorare: infatti i polinomi trigonometrici di grado N sono un sottinsieme dei polinomi trigonometrici di grado $N+1$... Dalle nostre considerazioni, non si può invece dedurre che la distanza tra $f(x)$ ed il suo polinomio trigonometrico di grado N *tende a* 0 per $N \to +\infty$: questo è vero, ma per dimostrarlo occorrono delle tecniche attualmente non alla nostra portata. Da questo risultato di convergenza segue la seguente identità di Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx = \pi[a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)].$$

Passando al limite, la disuguaglianza di Bessel è diventata un'uguaglianza!

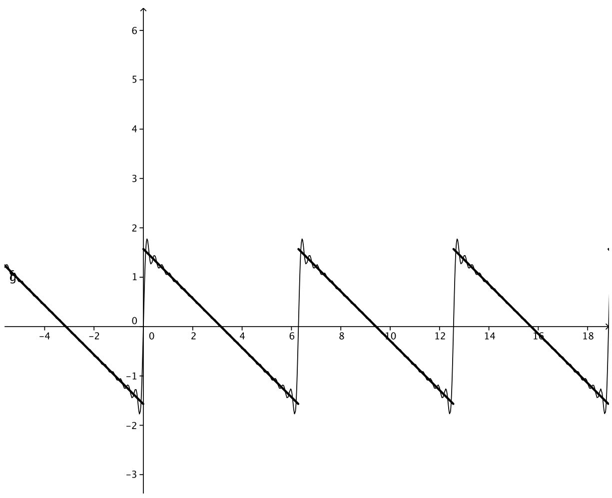
ESEMPIO: Troviamoci la serie di Fourier di un'onda a dente di sega, già incontrata "sperimentalmente" la volta scorsa. Precisamente, sia $f(x)$ l'unica funzione 2π-periodica e dispari tale che $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ in $[0, \pi]$. Grazie al fatto che $f(x)$ è dispari, otteniamo subito che i coefficienti di Fourier del coseno si annullano: $a_k = 0$ per ogni $k \in \mathbf{N}$. I coefficienti di Fourier del seno si calcolano invece facilmente: usando il fatto che la funzione è dispari abbiamo trovato

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) \sin kx\ dx = \frac{1}{k}.$$

La serie di Fourier del dente di sega è quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx.$$

In figura, è raffigurata la funzione $f(x)$ assieme alla somma parziale di ordine 20 della sua serie di Fourier:



È interessante poi quel che si trova usando l'identità di Parseval: scopriamo infatti che

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\ dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Abbiamo calcolato esplicitamente l'integrale di sinistra, ottenendo $\frac{\pi^3}{6}$, da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Abbiamo trovato esplicitamnete la somma della serie armonica generalizzata di esponente 2...

33 Lezione del 10/3/2009 (esercitazione opzionale - 2 ore)

Abbiamo studiato un po' di serie, tra cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n\sqrt{n}+n+5} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n!}{n^3}$$

$$(*)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/\sqrt{n}}-1)\sin(2/n) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nx}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{\log n} \quad (*)\ \sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt{n}}$$

Altre ne faremo la prossima volta: se volete provarci da soli, eccone alcune:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}(\cos x)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{n(x+1)}x^4 n^5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\pi}{2}-\arctan n^x) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(x-5)^n}{n3^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^x(\log n)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+\sin n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-\sqrt{n}}{n+1}\right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\sin(1/3^n) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\log n}{n!}$$

Come esercizio sugli integrali impropri, ci siamo poi divertiti a studiare la *funzione* Γ *di Eulero*

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Abbiamo verificato che questa funzione è ben definita per $x > 0$, che vale l'identità $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ per ogni $x > 0$, e che $\Gamma(n+1) = n!$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$

34 Lezione del 16/3/2009 (2 ore)

La volta scorsa abbiamo visto che la serie di Fourier di una funzione continua e 2π-periodica tende alla funzione stessa rispetto alla *distanza tra funzioni* che abbiamo introdotto. Questo, a priori, non garantisce che la serie converga alla funzione originale in tutti i punti.

Se però f è abbastanza regolare, siamo in realtà in grado di dimostrare che la serie di Fourier converge proprio a $f(x)$ in tutti i punti: in classe non abbiamo avuto il tempo di vedere la dimostrazione, che però metto di seguito per chi sia interessato.

Premettiamo un lemma, che si può dimostrare facilmente per induzione su N:

LEMMA: Se $N = 1, 2, 3, \ldots$, vale la seguente identità

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos N\alpha = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\alpha)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Possiamo ora dimostrare il seguente

TEOREMA (Di convergenza puntuale delle serie di Fourier): Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione 2π-periodica, ovunque derivabile. Allora si ha, per ogni fissato $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

dove a_n, b_n sono i coefficienti di Fourier di f.

DIM.: Se denotiamo con S_N la somma parziale N-esima della serie, ricordando la definizione (**) dei coefficienti di Fourier si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(u-x)]\, du = \\ & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos n(y)]\, dy = \\ & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{y}{2}}\, dy, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabili $y = u - x$ ed il Lemma.

Siccome si ha evidentemente

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos(ny)]\, dy = 1,$$

possiamo scrivere

$$(B) \quad S_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+y) - f(x)}{2\sin\frac{y}{2}} \sin(N + \frac{1}{2})y\, dy.$$

Poniamo allora

$$g(y) = \frac{f(x+y) - f(x)}{2\sin\frac{y}{2}}.$$

Questa è una funzione continua su tutto l'intervallo di periodicità (in particolare, per $y \to 0$ la funzione tende a $f'(x)$), e la (B) diventa:

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin(y/2)\cos Ny\, dy + \\ & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos(y/2)\sin Ny\, dy. \end{aligned}$$

I due integrali nell'ultima formula tendono a 0 per $N \to +\infty$: si tratta infatti dei coefficienti di Fourier delle funzioni (continue) $g(y)\sin(y/2)$ e $g(y)\cos(y/2)$... e abbiamo visto come conseguenza della disuguaglianza di Bessel che i coefficienti di Fourier di una funzione continua tendono a zero! Questo conclude la dimostrazione del teorema. Q.E.D

Abbiamo visto che i coefficienti di Fourier di una funzione periodica f si ottengono calcolando alcuni integrali: un compito molto pesante dal punto di vista computazionale, soprattutto quando la funzione f viene ottenuta in tempo reale da un qualche processo di misurazione...e si vogliano trovare immediatamente i coefficienti! E' allora abbastanza evidente che, nella pratica, l'integrale "esatto" che definisce i coefficienti di Fourier dovrà essere sostituito da una sua opportuna approssimazione discreta.

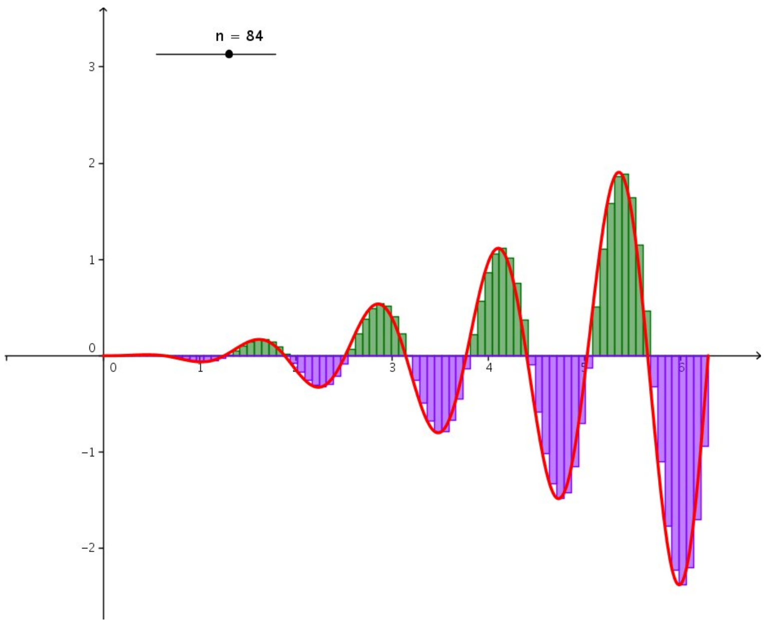
Supponiamo dunque di aver scelto una funzione $f(t)$, periodica di periodo 2π e fatta non troppo male. Sappiamo che i coefficienti di Fourier di f sono dati da

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\, dt,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Se per esempio prendiamo $f(t) = t^2$ (estesa periodicamente fuori dall'intervallo$[0, 2\pi]$), per trovare il coefficiente b_n dovremmo calcolare l'integrale $\int_0^{2\pi} t^2 \sin nt$.

Un modo facile, anche se non precisissimo, per calcolare l'integrale voluto, consiste nell'approssimare l'area che ci interessa con opportuni rettangoli: dividiamo l'intervallo $[0, 2\pi]$ in K parti uguali, e chiamiamo $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_K$ gli estemi di questi intervalli (da sinistra a destra: in particolare, $t_0 = 0,\ t_K = 2\pi$). La larghezza di questi intervallini sarà $2\pi/K$.

Ora, se K è abbastanza grande, possiamo pensare di sostituire la regione che ci interessa all'interno dell'i-esimo intervallino (cioè l'area catturata tra il grafico della funzione e l'asse t tra t_i e t_{i+1}, col segno giusto...) con un rettangolo di base l'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ e altezza $f(t_i)$. In figura, si vede proprio questa approssimazione dell'integrale precedente, con $n = 5$ e con 84 rettangoli:



In altre, parole, abbiamo

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt \simeq \frac{2\pi}{K}\left(f(t_0)\sin(nt_0) + f(t_1)\sin(nt_1) + f(t_2)\sin(nt_2) + \ldots + f(t_K)\sin(nt_K)\right)$$

(e si noti che i segni sono già quelli giusti!), da cui

$$(*)\ b_n \simeq \frac{2}{K}\left(f(t_0)\sin(nt_0) + f(t_1)\sin(nt_1) + f(t_2)\sin(nt_2) + \ldots + f(t_K)\sin(nt_K)\right).$$

Analogamente, avremo

$$(**)\ a_n \simeq \frac{2}{K}\left(f(t_0)\cos(nt_0) + f(t_1)\cos(nt_1) + f(t_2)\cos(nt_2) + \ldots + f(t_K)\cos(nt_K)\right).$$

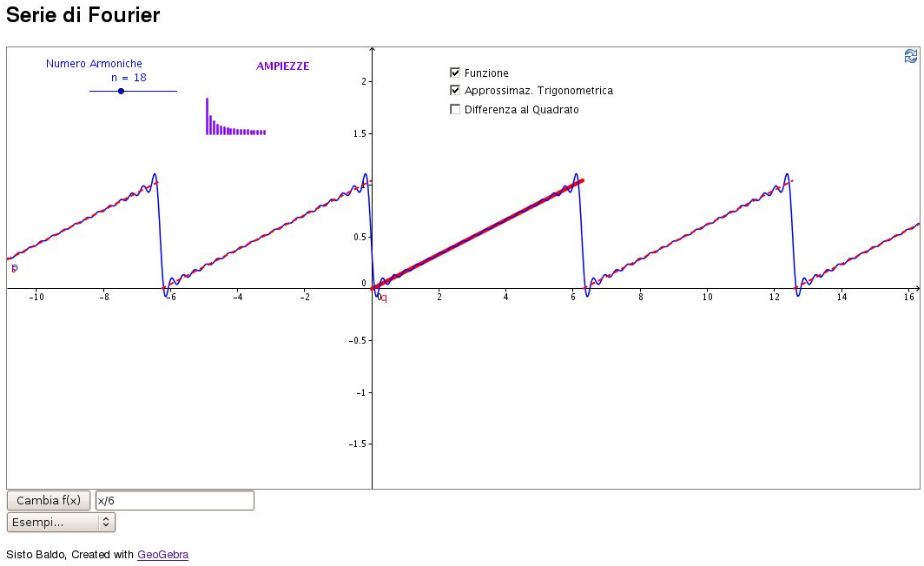
La figura mostra chiaramente che questa è un'approssimazione abbastanza grezza: le aree dei rettangoli sono evidentemente ora più piccole, ora più grandi dell'area che veramente ci interesserebbe... Però l'approssimazione migliora aumentando il numero di suddivisioni.[30]

Questo metodo si implementa molto facilmente: per esempio, esso è usato dal foglio GeoGebra[31] che vi ho già segnalato, e che permette di visualizzare

[30] I più astuti potrebbero pensare di migliorare l'approssimazione sostituendo i rettangoli con dei trapezi: l'idea è di sostituire il grafico della funzione, in ogni intervallino, con un segmento di retta che congiunge i valori agli estremi. La figura che si ottiene e' un trapezio, che assomiglia all'area che vogliamo calcolare molto più dei rettangoli! Però, nel caso di funzioni periodiche e di una suddivisione in parti uguali, il risultato che si ottiene è *esattamente* quello del metodo dei rettangoli: sapete spiegare perché?

[31] `http://profs.sci.univr.it/~baldo/divulgazione/dft/dft.html`

le somme parziali della serie di Fourier di una funzione data: ovviamente, i coefficienti di Fourier sono approssimati (con il metodo appena descritto)![32]



Se sperimentiamo usando come f una funzione che *è già un polinomio trigonometrico*, scopriamo una cosa *molto sorprendente*: se la funzione di partenza è un polinomio trigonometrico di grado abbastanza basso, i suoi coefficienti di Fourier *vengono ricostruiti esattamente*: si può provare ad esempio con le funzioni $\sin t$, $\cos 4t$, $\cos t + 0.5 \sin 3t + 0.2 \cos 6t$, o un'altra a vostro piacimento. A priori, è difficile aspettarsi una cosa del genere: la nostra approssimazione degli integrali è stata infatti molto grezza! Si tratta di un piccolo "miracolo algebrico" che dipende dalla distribuzione dei valori delle funzioni seno e coseno nei punti di una suddivisione in parti uguali di $[-\pi, \pi]$. In sostanza, quel che succede è che un'opportuna versione delle relazioni di ortogonalità tra seno e coseno rimane vera quando si sostituisce l'integrale con il suo equivalente discreto.

In effetti, la nostra approssimazione *apparentemente grezza* dei coefficienti di Fourier, è un oggetto che gode di una sua autonoma (e notevole) dignità matematica, e di tutta una sfilza di ottime proprietà: è chiamata *Trasformata di Fourier Discreta (DFT: Discrete Fourier Transform)* ed è uno strumento fondamentale nell'analisi matematica dei segnali!

[32] Unica piccola differenza: nel foglio GeoGebra l'"intervallo di integrazione" è $[0, 2\pi]$. Ovviamente questo non modifica nulla per funzioni $f(x)$ che siano 2π-periodiche: cambia qualcosa solo se diamo come input una funzione non periodica che il programma "periodicizza d'ufficio"!

Tra l'altro, è possibile che abbiate anche sentito parlare di FFT *(Fast Fourier Transfor: Trasformata di Fourier Rapida)*: matematicamente, questa non è un oggetto distinto dalla DFT. Si tratta "semplicemente" di un algoritmo particolarmente efficiente (*enormemente* più efficiente del foglio GeoGebra, che calcola quella che potrei definire una ISFT - Incredibly Slow Fourier Transform. . .) per calcolare la DFT, utile quando si hanno una grande quantità di punti di suddivisione. Questo algoritmo risulta di grandissima importanza in tutte le applicazioni pratiche delle serie di Fourier, in acustica ma non solo in acustica!

Abbiamo concluso la lezione presentando brevemente una teoria, dovuta in gran parte all'intuizione di Helmholtz, che spiega le ragioni "fisiologiche" per cui alcuni intervalli musicali suonano più consonanti o dissonanti di altri: per una discussione più approfondita e per i link all'applet java che vi ho proposto per testare il modello, vi rinvio al testo di una conferenza[33] che ho preparato in passato per gli alunni di una scuola superiore.

35 Lezione del 17/3/2009 (esercitazione opzionale - 2 ore)

Abbiamo svolto alcuni esercizi di ricapitolazione sulla seconda parte del programma: per esempio, abbiamo calcolato i coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$ 2π-periodica e tale che $f(x) = x^2$ per $x \in [0, 2\pi)$. Abbiamo calcolato (se era possibile) o studiato la convergenza degli integrali impropri

$$\int_0^1 x^2 \log x \, dx; \quad \int_0^1 e^{\sin(1/x)} \, dx; \quad \int_0^1 \sin(1/x) e^{\sin(1/x)} \, dx$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(100 \arctan(x))}{1+x^2} \, dx \quad \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} \, dx.$$

Abbiamo poi risolto i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x^2 \cos x \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \frac{\cos x}{\log y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e studiato alcune serie, tra le quali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{1}{3^n})$$

[33] http://profs.sci.univr.it/~baldo/divulgazione/lezione_dissonanza.pdf

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{3^n})x^n.$$

36 Lezione del 23/3/2009 (esercitazione opzionale - 2 ore)

In quest'ultima lezione del corso, abbiamo svolto la seguente simulazione della seconda provetta di valutazione intermedia:

1.1 Enunciare il criterio integrale di convergenza delle serie.

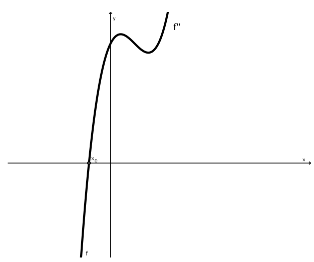
1.2 Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è continua e $\int_a^b f(x)\, dx > 0$, allora

- f è ovunque positiva;
- f è positiva in qualche punto;
- f è costante;
- f è ovunque maggiore o uguale a 0;

1.3 La serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(34)^{2k+1}}{(2k+1)!}$ vale

- e^{34};
- $\cos 34$;
- $+\infty$;
- $\sin 34$;

1.4 Quale delle seguenti affermazioni è corretta se il grafico rappresenta la derivata seconda di una certa funzione f?



- f è crescente sull'intera retta reale;
- f è decrescente sull'intera retta reale;
- f non è né concava né convessa sull'intera retta reale;
- f è convessa sull'intera retta reale;

1.5 Il seguente integrale improprio è assolutamente convergente (e quindi convergente): si giustifichi o si confuti questa affermazione

$$\int_0^1 \sin(\log x)\, dx.$$

Si calcoli poi il valore dell'integrale con un'opportuna sostituzione.

1.6 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + (2x+2)y(x) = e^{-x^2}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1.7 Si studi la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n x^n.$$