Soluzioni degli esercizi:

1. Verifichiamo per prima cosa che la norma è continua: se $x_n \to \overline{x}$ nella topologia indotta dalla norma (cioè se $\|x_n - \overline{x}\| \to 0$), allora $\|x_n\| \to \|\overline{x}\|$. Questo è immediato, perché dalla disuguaglianza triangolare segue subito che
$$| \, \|x_n\| - \|\overline{x}\| \, | \leq \|x_n - \overline{x}\|.$$
Occorre poi verificare che le operazioni di spazio vettoriale $(t, x) \mapsto tx$ ($t \in \mathbf{R},\ x \in X$) e $(x, y) \mapsto x + y$ ($x, y \in X$) sono continue. Siccome il prodotto di due spazi metrici è metrizzabile, possiamo fare la verifica ragionando con le successioni: siano $\overline{t} \in \mathbf{R}$, $\overline{x} \in X$, $\overline{y} \in X$ e siano $t_n \to \overline{t}$, $x_n \to \overline{x}$ e $y_n \to \overline{y}$. Allora:
$$\begin{aligned}
&\|(x_n + y_n) - (\overline{x} + \overline{y})\| \leq \|x_n - \overline{x}\| + \|y_n - \overline{y}\| \to 0 \\
&\|t_n x_n - \overline{t}\overline{x}\| = \|t_n x_n - \overline{t} x_n + \overline{t} x_n - \overline{t}\overline{x}\| \leq \\
&|t_n - \overline{t}|\|x_n\| + |\overline{t}|\|x_n - x\| \to 0,
\end{aligned}$$
dove nell'ultimo passaggio usiamo il fatto che $\|x_n\|$ è limitata (grazie al fatto che $x_n \to \overline{x}$). Questa è esattamente la continuità che volevamo dimostrare.

2. Le due norme su $\mathbf{R}^n$ sono evidentemente omogenee e non degeneri. Anche la disuguaglianza triangolare segue subito dalla definizione (si noti che il massimo della somma è minore o uguale alla somma dei massimi...).

   Analoga dimostrazione per la norma $\| \cdot \|_\infty$ su C^0.

3. Come prima, è quasi ovvio! L'unica cosa che lo è un po' meno, è la non degenerazione della norma: occorre verificare che $\|f\|_1 = 0$ implica $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$.

   È sufficiente osservare che, per ogni fissato $n \in \mathbf{N}$, l'insieme
$$A_n = \{x \in \Omega : \ |f(x)| \geq 1/n\}$$
ha misura nulla (altrimenti la norma di f sarebbe positiva). L'unione di questi insiemi è precisamente
$$A = \{x \in \Omega : \ |f(x)| > 0\},$$
ed ha quindi misura nulla.

4. Il fatto che $\|T(x)\|$ sia omogenea e verifichi la disuguaglianza triangolare viene dalle proprietà della norma e dalla linearità di T. Che sia poi non degenere viene dall'invertibilità di T: ker $(T) = \{0\}$. Dunque $x \mapsto \|T(x)\|$ è una norma su $\mathbf{R}^n$ ed è quindi equivalente alla norma euclidea: esistono $C_1, C_2 > 0$ tali che

$$C_1|x| \leq \|T(x)\| \leq C_2|x| \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

La disuguaglianza di destra dice che T è un'applicazione lineare limitata (e quindi continua), quella di sinistra dice che lo è l'inversa: se poniamo $x = T^{-1}(y)$ essa diventa $|T^{-1}(y)| \leq \frac{1}{C_1}\|y\|$ per ogni $y \in X$.

5. L'unicità dell'estensione è abbastanza immediata: siano $\widetilde{F}$, $\widehat{F}$ *due* estensioni del funzionale F a tutto X. Sia poi $\overline{x} \in X \setminus Y$. Poiché $\overline{x} \in \overline{Y}$ esiste $\{y_n\} \subset Y$ tale che $y_n \to \overline{x}$. Ma allora $\widetilde{F}(\overline{x}) = \lim_{n\to+\infty} F(y_n) = \widehat{F}(\overline{x})$ grazie alla continuità delle due estensioni.

   L'estensione può essere ottenuta senza il teorema di Hahn-Banach, usando un noto risultato di topologia degli spazi metrici: una funzione *uniformemente continua* definita su un sottinsieme si estende (in modo unico) alla chiusura di questo. Infatti, un funzionale lineare è uniformemente continuo in quanto lipschitziano!

6. Si ha $F(x,y) = ax + by \leq |a||x| + |b||y| \leq (\max\{|a|,|b|\})(|x|+|y|)$, da cui $\|F\| \leq \max\{|a|,|b|\}$. Per ottenere la disuguaglianza opposta, basta osservare che è facile trovare vettori di norma 1 su cui il funzionale vale $|a$ o $|b|$: nel primo caso basta prendere il vettore $(\mathrm{sgn}(a), 0)$, nel secondo $(0, \mathrm{sgn} b)$. Dunque, c'è sempre un vettore di norma 1 su cui F vale $\max\{|a|,|b|\}$.

   Seconda parte dell'esercizio: il funzionale G sarà del tipo $G(x) = ax$ con $a \neq 0$. Per l'estensione, grazie a quanto visto sopra basta prendere $\tilde{G}(x,y) = ax + by$ con $|b| \leq |a|$: si tratta di un funzionale che estende G ed ha la stessa norma!

   Nel caso euclideo, si vede facilmente che la norma del funzionale $F(x,y) = ax+by$ è data da $\sqrt{a^2+b^2}$ (la norma eulcidea del vettore (a,b): si usino le proprietà del prodotto scalare standard). In quel caso l'estensione di G è unica: dobbiamo prendere per forza $b = 0$, altrimenti la norma aumenta!

7. Usando la disuguaglianza di Hölder con esponente p/r si ha

$$\int_\Omega |u(x)|^r\,dx \leq \left(\int_\Omega (|u|^r)^{p/r}\,dx\right)^{r/p} \left(\int_\Omega 1^{p/(p-r)}\,dx\right)^{(p-r)/p} < +\infty.$$

Tra l'altro, elevando ambo i membri alla $1/r$ si vede che la mappa di inclusione di L^p in L^r è continua!

Per vedere che l'inclusione non è vera se la misura di Ω è infinita, consideriamo per esempio la semiretta $[1, +\infty)$ dotata della misura di Lebesgue. La funzione $u(x) = 1/x$ non appartiene a L^1, ma appartiene a L^p per tutti i $p > 1$.

8. Ricordiamo che l'integrale di una funzione non negativa è definito come l'estremo superiore degli integrali di funzioni semplici minori o uguali alla funzione. Nel nostro caso, una funzione semplice è semplicemente una successione che ha soltanto un numero finito di termini diversi da 0 (e il suo integrale si vede subito che è la somma di tali termini!). Se ne deduce immediatamente che per una successione $\{a_n\}$ a termini non negativi si ha

$$\int_{\mathbf{N}} a_n \, d\mu(n) = \sup\{\sum_{n\in I} a_n : \ I \ sottinsieme \ finito \ di \ \mathbf{N}\}.$$

La serie è invece il sup delle somme parziali:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup\{\sum_{n=0}^{N} a_n : \ N \in \mathbf{N}\}.$$

Siccome le somme parziali sono particolari somme di sottinsiemi finiti, abbiamo che l'integrale è maggiore o uguale alla serie.

Viceversa, dato I sottinsieme finito di $\mathbf{N}$, esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che $I \subset \{0, 1, \ldots, N\}$ (basta prendere $N = \max I$). Allora la somma dei termini con indici appartenenti a I è maggiorata dalla somma parziale N-esima... e abbiamo la disuguaglianza opposta!

La seconda parte dell'esercizio è facile: per definizione, una funzione è in L^1 se il suo modulo ha integrale finito, cioè se la serie dei moduli è finita (grazie alla parte precedente dell'esercizio).

Se poi $\{a_n\} \in L^1(\mu)$, ricordiamo che il suo integrale è definito come la differenza tra l'integrale della *parte positiva* e quello della *parte negativa*: per verificare che questo coincide con la serie, basta ricordare che *la somma di una serie assolutamente convergente non dipende dall'ordine in cui si somma.*

TUTTO l'esercizio può essere svolto in maniera ancora più semplice usando i teoremi di convergenza integrale. Sia infatti $\{a_n\}$ una successione a termini positivi. Indichiamo con $\{a_n^N\}_n$ la successione "troncata" ai primi N termini, cioè $a_n^N = a_n$ se $1 \leq n \leq N$, mentre $a_n^N = 0$

altrimenti. Per $N \to +\infty$, queste successioni convergono puntualmente e in modo crescente alla successione originale. Il teorema di Beppo Levi permette allora di dire che l'integrale di $\{a_n\}$ è il limite degli integrali delle successioni troncate: ma gli integrali delle successioni troncate sono semplicemente le somme parziali della serie (tali successioni sono "funzioni semplici" per la nostra misura!).

La seconda parte dell'esercizio segue poi allo stesso modo grazie al teorema della convergenza dominata: se la serie è assolutamente convergente, per quanto appena visto $\{a_n\} \in L^1(\mu)$. Le nostre successioni troncate sono allora dominate da $|a_n|$ e convergono puntualmente ad a_n per $N \to +\infty$: ancora una volta, il loro integrale non è altro che la somma parziale n-esima della serie. Il teorema della convergenza dominata permette allora di concludere che l'integrale del limite è il limite degli integrali, cioè la serie.

9. Abbiamo visto già che ℓ^1 si immerge isometricamente nel duale di ℓ^∞, e quindi a maggior ragione nel duale di c_0. Ci resta da vedere la suriettività di questa immersione.

   Sia dunque T un funzionale lineare continuo su c_0: dobbiamo trovare una successione $\{y_k\} \in \ell^1$ tale che
   $$T(\{x_k\}) = \sum_k x_k y_k \quad \forall \{x_k\} \in c_0.$$
   Se indichiamo con e^n l'n-esimo "vettore della base canonica" di c_0, cioè la successione che vale 1 all'n-esimo posto e 0 altrimenti, vediamo che dobbiamo necessariamente porre $y_k = T(e^k)$. La dimostrazione si conclude esattamente come nel teorema a pagina 20 degli appunti del corso: il sottospazio Y delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da 0 è infatti denso in c_0: se $\{x_n\} \in c_0$, $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $|x_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$. Ma allora la successione in Y i cui primi termini coincidono con quelli di $\{x_n\}$, mentre tutti i successivi valgono 0, dista da $\{x_n\}$ meno di ε in norma ℓ^∞.

10. Basta scrivere la definizione di funzionale di Minkowski:
    $$p(x) = \inf\{t > 0 : \ \|\frac{x}{t}\| < 1\} = \inf\{t > 0 : \ \|x\| < t\} = \|x\|.$$

11. Per il convesso C_1 abbiamo
    $$p(x, y) = \inf\{t > 0 : \ \frac{y}{t} > \frac{x}{t} - 1\} = \inf\{t > 0 : \ t > |x| - y\},$$

da cui

$$p(x,y) = \begin{cases} |x| - y & se\ y < |x|, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Per il convesso C_2 abbiamo poi

$$p(x,y) = \inf\{t > 0 : \ \frac{y}{t} > \frac{x^2}{t^2} - 1\} = \inf\{t > 0 : \ t^2 + ty - x^2 > 0\}$$

da cui, risolvendo la disequazione di secondo grado

$$p(x,y) = \frac{\sqrt{y^2 + 4x^2} - y}{2}.$$

12. È assolutamente ovvio che la linearità passa al limite: T è certamente un'applicazione lineare. È poi chiaro che i T_k sono puntualmente limitati: una successione di numeri reali che ammette limite finito è necessariamente limitata. Dunque, per il teorema di Banach-Steinhaus esiste una costante $C > 0$ tale che $\|T_k\| \leq C$ per ogni $k \in \mathbf{N}$. Si ha allora, per ogni $x \in X$:

$$(*)\ T(x) = \lim_{k \to +\infty} T_k(x) \leq C\|x\|,$$

dove l'ultima disuguaglianza viene dal fatto che $T_k(x) \leq \|T_k\|\|x\| \leq C\|x\|$: abbiamo allora che $T \in X'$ e $\|T\| \leq C$. D'altra parte, supponiamo che in $(*)$ sia $\|x\| \leq 1$: possiamo maggiorare il limite della successione $T_k(x)$ con il liminf della sua maggiorante $\|T_k\|$, ottenendo

$$T(x) \leq \liminf_{k \to +\infty} \|T_k\|.$$

Passando al sup su tutti gli $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ otteniamo la seconda parte dell'esercizio.

Per vedere che la disuguaglianza può essere stretta e non vi è, in generale, convergenza in norma, consideriamo la successione $\{e^k\} \subset \ell^2$, dove $e^k = \{\delta_{hk}\}_{h \in \mathbf{N}}$ è la successione che ha tutti i termini nulli, tranne il k-esimo che vale 1. Abbiamo visto come e^k possa essere identificata con un elemento T_{e^k} di $(\ell^2)'$: se $\{x_h\}_{h \in \mathbf{N}} \in \ell^2$, avremo per definizione

$$T_{e^k}(\{x_h\}) = \sum_h \delta_{hk} x_h = x_k.$$

Sarà dunque

$$\lim_{k \to +\infty} T_{e^k}(\{x_h\}_h) = \lim_{k \to +\infty} x_k = 0 :$$

la nostra successione di elementi del duale tende puntualemnte al funzionale nullo. D'altra parte, ciascuno dei funzionali T_{e^k} ha norma 1.

13. Se A è limitato e $T \in X'$, allora $T(A)$ è evidentemente limitato grazie alla continuità del funzionale T. Per mostrare che vale il viceversa, basta far vedere che ogni successione $\{x_n\} \subset X$ con la proprietà che $\{T(x_n)\}$ è limitata in $\mathbf{R}$ per ogni $T \in X'$, è necessariamente limitata in norma. Ora, consideriamo gli elementi S_{x_n} di X'': per definizione di S_{x_n} e per la nostra ipotesi abbiamo che $\{S_{x_n}(T)\} = \{T(x_n)\}$ è una successione limitata per ogni fissato T. Ma allora, per Banach-Steinhaus, la successione $\{S_{x_n}\}$ è limitata in norma e si ha la tesi poiché l'immersione J di X in X'' è un'isometria!

14. Ricordiamo che una funzione $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice semicontinua superiormente se per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni successione $\{x_n\}$ con $x_n \to x$ si ha $\phi(x) \geq \limsup\limits_{n\to+\infty} \phi(x_n)$. È pressoché immediato verificare che la controimmagine di una semiretta sinistra aperta secondo una tale ϕ è aperta.

    Mostriamo che la funzione ϕ del suggerimento è semicontinua superiormente. Possiamo notare intanto che in realtà $\phi(x) = \lim\limits_{\delta\to0^+} \phi(x,\delta)$ perchè, fissato x, $\phi(x,\delta)$ è crescente come funzione di δ. Sia $x \in \mathbf{R}$, $x_n \to x$. Poniamo $r_n = |x_n - x|$: questa è una successione che tende a zero. Poiché inoltre $B_{r_n}(x) \subset B_{2r_n}(x_n) \subset B_{3r_n}(x)$ si ha

$$\phi(x, r_n) \leq \phi(x_n, 2r_n) \leq \phi(x, 3r_n).$$

    Passando al limite per $n \to +\infty$, il primo e terzo termine di questa catena di disuguaglianze tendono a $\phi(x)$. Dunque, per il teorema dei carabinieri, $\phi(x_n, 2r_n) \to \phi(x)$. Poiché poi $\phi(x_n, 2r_n) \geq \phi(x_n)$ si ha

$$\phi(x) = \lim_{n\to+\infty} \phi(x_n, 2r_n) \geq \limsup_{n\to+\infty} \phi(x_n),$$

    che è la disuguaglianza di semicontinuità che dovevamo dimostrare.

    Dunque ϕ è semicontinua superiormente e gli insiemi $A_n = \{x \in \mathbf{R} : \phi(x) < 1/n\}$ sono aperti. L'insieme dei punti di continuità di f si caratterizza come $\{x : \phi(x) = 0\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$, come volevasi dimostrare.

15. Supponiamo per assurdo che esista una funzione reale di variabile reale continua esattamente in $\mathbf{Q}$. Poiché l'insieme dei razionali è numerabile, possiamo scrivere $\mathbf{Q} = \{q_n : n \in \mathbf{N}\}$. Grazie all'esercizio precedente avremmo poi $\mathbf{Q} = \bigcap\limits_{n\in N} A_n$, con A_n aperti. Gli A_n sarebbero evidentemente densi perché tale è $\mathbf{Q}$.

Poniamo poi $\tilde{A}_n = A_n \setminus \{q_n\}$: questi sono ancora aperti densi, ma la loro intersezione è vuota. Questo contraddice il lemma di Baire: in uno spazio metrico completo intersezione numerabile di aperti densi è densa.

16. Se T è un elemento di $(\ell^2)'$, abbiamo visto che esiste un unico $\{y_k\}_k \in \ell^2$ tale che $T(\{x_k\}_k) = \sum x_k y_k$ per ogni $\{x_k\}_k \in \ell^2$. Allora si ha $T(e^n) = y_n$, e questa successione di numeri reali tende a zero perché il termine generale di una serie convergente è infinitesimo.

17. Basta seguire il suggerimento: per ipotesi di convergenza debole dovrebbe essere $T(\overline{x}) = lim_n T(x_n)$, mentre per costruzione di T abbiamo $T(x_n) < T(\overline{x}) - \varepsilon$, contraddizione.

18. Sia $x_n \rightharpoonup \overline{x}$, $\ell = \liminf_{n\to+\infty} F(x_n)$. Estraendo eventualmente una sottosuccessione, possiamo anche supporre che l'ultimo $\liminf$ sia un limite.

    Se il $\liminf$ vale $+\infty$, non c'è nulla da dimostrare. In caso contrario, sia $\varepsilon > 0$ e consideriamo l'insieme $C_{\ell+\varepsilon} = \{x \in X : \ F(x) \leq \ell + \varepsilon\}$. Questo è un insieme chiuso (F è fortemente continua) e convesso (perhé F è convessa). Inoltre, esso contiene la successione $\{x_n\}$ tranne eventualmente un numero finito di termini che possiamo eliminare.

    L'insieme $C_{\ell+\varepsilon}$ è debolmente chiuso per l'esercizio precedente, per cui $\overline{x} \in C_{\ell+\lambda}$, cioè $F(\overline{x}) \leq \ell + \varepsilon$. L'arbitrarietà di ε permette di concludere.

19. Seguire il suggerimento.

20. La convessità di C è evidente, come pure la sua chiusura: basta osservare che $\Phi : u \mapsto \int_0^{1/2} u(x)\ dx - \int_{1/2}^1 u(x)\ dx$ è un funzionale lineare continuo sul nostro spazio, per cui C è un iperpiano (affine) chiuso.

    Verifichiamo innanzitutto che $\mathrm{dist}(0, C) \geq 1$: maggiorando gli integrali, si vede subito che nessuna funzione di norma minore di 1 può appartenere a C (la nostra differenza di integrali si maggiora appunto con

    $$1/2\,(\mathrm{essup}\{u(x) : x \in [0, 1/2]\} - \mathrm{essinf}\{u(x) : x \in [1/2, 1]\})\,,$$

    che è minore o uguale a $\|u\|_\infty$).

    Se poi $\|u\|_\infty = 1$, questa stessa maggiorazione ci dice che per appartenere a C la funzione u dovrebbe valere quasi ovunque 1 su $[0, 1/2]$, -1 su $[1/2, 1]$: evidentemente, non esiste alcuna funzione continua con questa caretteristica.

Infine, che la distanza sia proprio 1 si vede prendendo la successione di funzioni continue $u_n(x)$ che vale $1+1/n$ su $[0, 1/2-1/(n+1)]$, vale $-1-1/n$ su $[1/2+1/(n+1), 1]$ ed è lineare su $[1/2-1/(n+1), 1/2+1/(n+1)]$: queste funzioni appartengono a C, con $\|u_n\|_\infty = 1 + 1/n \to 1$.

21. Grazie alla disuguaglianza di Bessel, i coefficienti di Fourier $< x, e_\alpha >$ appartengono a $\ell^2(I)$.

    La famiglia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ è una base di Hilbert del sottospazio $Y = \overline{\mathrm{span}\,\{e_\alpha : \ \alpha \in I\}}$ (che è di Hilbert, essendo un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert): ne segue che la serie $\sum_I < x, e_\alpha > e_\alpha$ è ben definita e converge ad un elemento $\tilde{x} \in Y$. Si ha poi $< x - \tilde{x}, e_\alpha >= 0$ per ogni $\alpha \in I$, per cui $\tilde{x}$ è la proiezione ortogonale di x su Y.

22. Per ogni $t \in (a, b)$, consideriamo la funzione $u_t(x) = \mathbf{1}_{(a,t)}(x)$. Queste funzioni formano una famiglia più che numerabile di elementi di L^∞.

    D'altra parte, se $s \neq t$ si ha $\|u_t - u_s\|_{L^\infty} = 1$: due elementi distinti della nostra famiglia hanno distanza 1 tra di loro. Ma allora nessun sottinsieme numerabile di L^∞ può distare meno di 1 da tutti gli elementi della famiglia: L^∞ non è separabile.

23. Sia $\varepsilon > 0$. Mostriamo come sia possibile trovare $\delta > 0$ tale che $\|u - u_y\|_{L^p} < \varepsilon$ ogni volta che $|y| < \delta$. Per prima cosa, grazie alla densità delle funzioni continue possiamo trovare $v \in C^0_C(\mathbf{R}^n)$ tale che $\|u - v\|_{L^p} < \varepsilon/4$. Sia K un compatto che contiene un intorno di raggio 1 del supporto di v. Siccome v è uniformemente continua, esiste $1 > \delta > 0$ tale che $|y| < \delta$ implica

    $$|v(x - y) - v(x)| < \frac{\varepsilon}{2}|K|^{-1/p}.$$

    Da questo si deduce subito che $\|v_y - v\|_{L^p} < \varepsilon/2$. Ma allora

    $$\|u - u_y|_{L^p} \leq \|u - v\|_{L^p} + \|v - v_y\|_{L^p} + \|v_y - u_y\|_{L^p} < \varepsilon.$$

24. Il suggerimento è già lo svolgimento dell'esercizio...

25. La regolarità di v è una facile conseguenza del teorema della convergenza dominata. Verifichiamo per esempio che v è derivabile e che le derivate sono date dalla formula nel testo dell'esercizio: con metodi del tutto simili si dimostra che v è continua e che le derivate sono continue.

Fissato x, scriviamo i rapporti incrementali di v in direzione e_i:

$$(*) \quad \frac{v(x+he_i)-v(x)}{h} = \int_{\mathbf{R}^n} u(y)\frac{\phi(x+he_i-y)-\phi(x-y)}{h}\,dy = \int_K u(y)\frac{\phi(x+he_i-y)-\phi(x-y)}{h}\,dy,$$

dove K è un compatto che contiene il supporto della funzione integranda per ogni $|h|<1$.

Basta evidentemente mostrare che per ogni successione $h_k \to 0$ vale

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{v(x+h_ke_i)-v(x)}{h_k} = \int_K u(y)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x-y)\,dy.$$

Infatti, se passiamo il limite in $(*)$ vediamo subito che si ha la convergenza puntuale delle integrande. La successione delle integrande è poi dominata dalla funzione $L|u(x)|$, dove L è la costante di Lipschitz di ϕ: questa è una funzione $L^1(K)$, per cui è possibile applicare il teorema della convergenza dominata.

26. Ricordiamo che una misura positiva μ si dice σ-finita se esiste una successione $\{X_j\}$ di insiemi misurabili tali che $X = \bigcup_{j\in\mathbf{N}} X_j$, e $\mu(X_j) < +\infty$ per ogni j. Ovviamente, possiamo supporre senza perdita di generalità che la stessa successione di insiemi vada bene sia per μ che per ν (basta prendere le intersezioni tra gli insiemi che hanno la proprietà voluta per μ, e quelli che la possiedono per ν: la famiglia che si ottiene è ancora numerabile e soddisfa la nostra richiesta). Inoltre, possiamo anche supporre che gli elementi della successione $\{X_j\}$ siano due a due disgiunti (se non lo sono, li sostituiamo con $X_1, X_2 \setminus X_1, X_3 \setminus (X_1 \cup X_2), \ldots$).

Definiamo poi le seguenti misure, restrizione di μ e di ν agli insiemi X_i:

$$\mu_i(A) := \mu(X_i \cap A), \quad \nu_i(A) := \nu(X_i \cap A) \quad \forall A \in \mathcal{S}.$$

È chiaro che $\mu(A) = \sum_j \mu_j(A)$ per ogni $A \in \mathcal{S}$, e che una formula analoga vale per ν. Le misure appena introdotte sono poi finite, con $\nu_i << \mu_i$: il teorema di Radon-Nicodym ci permette allora di trovare funzioni misurabili u_i tali che

$$\nu_i(A) = \int_A u_i(x)\,d\mu_i(x).$$

È anche ovvio che possiamo scegliere $u_i(x) = 0$ per $x \notin X_i$ (il complementare di X_i è di misura nulla per μ_i. La funzione che soddisfa la tesi sarà allora

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x).$$

27. Sia μ la counting measure su $\mathbf{R}$, ν la misura di Lebesgue (sempre su $\mathbf{R}$), entrambe ristrette alla σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue. È chiaro che la counting measure non è σ-finita!

    Evidentemente, $\nu << \mu$. Mostriamo che non esiste alcuna funzione misurabile $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $|A| = \int_A u(x)\, d\mu(x) = \sum_{x \in A} u(x) \quad \forall A\ Lebesgue-misurabile.$Infatti, se per assurdo ci fosse una tale funzione u e $0 < |A| < +\infty$, l'insieme $B = \{x \in A : u(x) > 0\}$ sarebbe al più numerabile (altrimenti la somma sarebbe infinita). D'altra parte, un insieme numerabile ha misura di Lebesgue nulla: $|A| = |A \setminus B|$. Questo è assurdo perché secondo la nostra formuletta dovrebbe essere $|A \setminus B| = \sum_{x \in A \setminus B} u(x) = 0$.

28. Ricordiamo che una funzione semplice è una combinazione lineare *finita* di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili, che possiamo supporre due a due disgiunti senza perdita di generalità. Sia $M = \|u\|_\infty$. Per ogni $k \in \mathbf{N}$, suddividiamo l'intervallo $[-M, M]$ in k intervallini uguali, tramite i punti di suddivisione $y_i = -M + i \cdot 2M/k$, $i = 0, \ldots, k$. Poniamo poi $A_{i,k} = \{x \in X : u(x) \in [y_i, y_{i+1})\}$ (per $i = k$, prendiamo l'intervallo chiuso anche a destra). Questi sono insiemi misurabili due a due disgiunti, la cui unione è tutto X tranne eventualmente un insieme di misura nulla. Allora $u_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} y_i \mathbf{1}_{A_{i,k}}(x)$ ha la proprietà che $\|u_k - u\|_\infty \leq 1/k$.

29. Per ogni fissato k, consideriamo gli insiemi

    $$A_{n,k} = \{x \in X : \ |u_m(x) - u(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall m \geq n\}.$$

    Questi insiemi formano una successione crescente al crescere di n, e grazie all'ipotesi di convergenza puntuale quasi ovunque si ha

    $$\mu(X \setminus \bigcup_n A_{n,k}) = 0.$$

    Ne segue, grazie alla continuità della misura lungo le successioni crescenti, che $\mu(A_n) \to \mu(X)$. Basta allora scegliere $\overline{n}(k)$ in modo che $\mu(X \setminus A_{\overline{n}(k),k}) < \varepsilon/2^k$. Poniamo poi $C = \bigcup_k (X \setminus A_{\overline{n}(k),k})$. Evidentemente, $\mu(C) < \varepsilon$. Inoltre, $u_n \to u$ uniformemente in $X \setminus C$.

30. Sia $X = \mathbf{R}$, con la misura di Lebesgue. Le funzioni $u_n(x) = x^2/n$ tendono puntualmente a 0 per ogni $x \in \mathbf{R}$, ma la misura degli insiemi

$$\{x \in \mathbf{R} : |u_n(x)| \geq \varepsilon\}$$

è infinita per ogni n.

31. Per mostrare la tesi possiamo muoverci come nell'esercizio 24: basta far vedere che

$$(*) \int_0^1 u_n(x)\mathbf{1}_{[a,b]}(x)\, dx \to \int_0^1 \alpha \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\, dx$$

ogniqualvolta $0 \leq a < b \leq 1$ e sfruttare poi la densità delle funzioni a scala, per concludere che si ha convergenza debole in L^p per $1 < p < +\infty$.

Facciamo vedere per prima cosa che per ogni $b \in (0,1)$ si ha $\int_0^b u(nx)\, dx \to \alpha b$: in effetti, se l'intervallo $[0,b]$ contenesse un numero intero esatto di periodi di $u(nx)$, varrebbe l'uguaglianza. Nel caso generale generale, possiamo prendere l'intervallo che comprende il massimo numero di periodi completi, contenuto in $[0,b]$: evidentemente b sovrastimerà al massimo di $1/n$ la lunghezza di questo intervallo, mentre nel pezzettino rimanente l'integrale di $u(nx)$ varrà meno di α/n. In conclusione, avremo

$$\int_0^b u(nx)\, dx = \alpha b + O(1/n) \to \alpha b.$$

Scrivendo $\int_a^b u(nx)\, dx = \int_0^b u(nx)\, dx - \int_0^a u(nx)\, dx$ la $(*)$ segue immediatamente.

32. Si considerino le funzioni

$$u_1(x) = \begin{cases} 2 & se\ x \in [0,1/2] \\ 0 & se\ x \in (1/2,1], \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in [0,1/2] \\ 2 & se\ x \in (1/2,1], \end{cases}$$

Esse hanno entrambe norma 1 in $L^1([0,1])$, e la stessa cosa vale per le loro combinazioni convesse.

In uno spazio di Hilbert questo fenomeno non può succedere: supponiamo per assurdo che la sfera unitaria contenga un segmento non banale C. Evidentemente, non è restrittivo supporre che il segmento sia chiuso: in tal caso, abbiamo un sottinsieme convesso, chiuso e non vuoto di H i cui infiniti punti distano tutti 1 dall'origine. Questo viola la parte "unicità" del teorema di proiezione su un chiuso convesso! Lo stesso risultato può essere ottenuto sfruttando l'identità del parallelogramma: siano x, y due punti distinti sulla sfera unitaria di H. Allora per il punto di mezzo $(x+y)/2$ del segmento si ha

$$\|\frac{x+y}{2}\|^2 = 1 - \frac{\|x-y\|^2}{4} < 1,$$

ossia tale punto non appartiene alla sfera unitaria!