Esercizi per il corso di Analisi 6.

1. Si verifichi che uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale topologico con la topologia indotta dalla norma. Si verifichi poi che la norma è una funzione continua rispetto alla stessa topologia.

2. Si mostri che le seguenti sono norme su $\mathbf{R}^n$:

$$\begin{aligned} |(x_1, \dots, x_n)|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \\ |(x_1, \dots, x_n)|_\infty &:= \max\{|x_i| : \ i = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

   e che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su $C^0([a,b])$, dove $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\}$ è la norma della convergenza uniforme.

3. Si mostri che lo spazio $L^1(\Omega)$, definito a lezione, è uno spazio normato.

4. Si mostri che, dato uno spazio vettoriale normato $(X, \|\cdot\|)$, di dimensione finita n su R, ogni isomorfismo lineare $T : \mathbf{R}^n \to X$ è continuo con inversa continua. *(Sugg.: Sia T un isomorfismo lineare come sopra. Allora $x \mapsto \|T(x)\|$ è una norma su $\mathbf{R}^n$, che sarà quindi equivalente alla norma euclidea...)*

5. Si mostri che se Y è un sottospazio *denso* di uno spazio normato X, ossia se $\overline{Y} = X$ e se $F : Y \to \mathbf{R}$ è un funzionale lineare continuo, allora l'estensione di F data dal teorema di Hahn-Banach è unica. Vi viene in mente un modo per dimostrare l'esistenza di questa estensione senza ricorrere al teorema di Hahn-Banach?

6. Si consideri lo spazio $\mathbf{R}^2$ dotato della norma $|(x,y)|_1 := |x| + |y|$. Si mostri che la norma duale di un generico funzionale lineare $F(x,y) = ax + by$ è data da $\|F\| = \max\{|a|, |b|\}$. Si consideri poi un funzionale lineare non nullo $G : Y \to \mathbf{R}$, dove $Y = \mathbf{R}\{e_1\}$ è l'asse delle x: si mostri che esiste un'infinità di possibili estensioni di G a funzionali lineari definiti su tutto $\mathbf{R}^2$, che abbiano la stessa norma di G. Cosa succede se ripetiamo l'esercizio con $\mathbf{R}^2$ dotato dell'usuale norma euclidea?

7. Si faccia vedere che se Ω ha misura di Lebesgue finita, allora una funzione in $L^p(\Omega)$ appartiene a $L^r(\Omega)$ per ogni $r \in [1,p]$ (cioè gli spazi L^p diventano sempre più piccoli all'aumentare dell'esponente). Stessa cosa vale per gli spazi $L^p(\mu)$, con μ misura *finita*.

Si mostri con un esempio che questo non è più vero se la misura di Ω è infinita. *[SUGG.: Applicare la disuguaglianza di Hölder al prodotto $|u(x)|^r \cdot 1$, prendendo come esponenti p/r ed il coniugato... Il controesempio richiesto può essere ottenuto lavorando sulla semiretta $[1, +\infty)$...]*

8. Sia μ la counting measure sull'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali, cioè la misura definita, per ogni $A \subset \mathbf{N}$, da

$$\mu(A) = \begin{cases} \textit{numero di elementi di } A & \textit{se } A \textit{ è finito,} \\ +\infty & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Per questa misura, tutti gli insiemi sono misurabili, e quindi tutte le funzioni da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{R}$ (che sono poi le successioni!) sono μ-misurabili.

Si mostri che

- Se $\{a_n\}$ è una successione a valori non negativi, allora

$$\int_{\mathbf{N}} a_n \, d\mu(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

- Per una successione a termini di segno qualunque, $\{a_n\} \in L^1(\mu)$ se e soltanto se la serie converge assolutamente. In tal caso,

$$\int_{\mathbf{N}} a_n \, d\mu(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

9. Sia c_0 il sottospazio (chiuso) di ℓ^∞ costituito dalle *successioni che tendono a* 0, normato con la norma di ℓ^∞. Mostrare che ogni funzionale lineare $T \in (c_0)'$ si può rappresentare isometricamente come "prodotto scalare" con una successione $\{y_k\} \in \ell^1$. In particolare, ℓ^1 è isomorfo e isometrico al duale dello spazio normato c_0, ed è quindi uno spazio di Banach.

10. Si mostri che se $C = B_1(0)$ è la palla aperta unitaria di uno spazio normato e $p(x)$ è il funzionale di Minkowski associato a C, allora $p(x) = \|x\|$.

11. Nel piano $\mathbf{R}^2$, si considerino i convessi aperti contenenti l'origine

$$C_1 = \{(x, y) : \ y > |x| - 1\}, \qquad C_2 = \{(x, y) : \ y > x^2 - 1\}.$$

Si scrivano i funzionali di Minkowski associati a C_1 e C_2.

12. Sia $\{T_k\} \subset X'$ una successione di funzionali lineari tale che $T_k(x) \to T(x) \in \mathbf{R}$ per ogni $x \in X$ (cioè T_n tende puntualmente ad una certa funzione reale T). Mostrare che allora $T \in X'$ e

$$\|T\| \leq \liminf_{k \to +\infty} \|T_k\|.$$

Si mostri poi con un esempio che non è detto che $T_k \to T$ in X'. *[Sugg.: L'enunciato è una conseguenza abbastanza diretta del Teorema di Banach-Steinhaus: la linearità di T è ovvia, mentre il teorema consente di dire che i T_k sono equilimitati in norma... dunque il limite puntuale T è limitato. La disuguaglianza sulle norme è una facile conseguenza. Infine, per il controesempio richiesto si consideri lo spazio ℓ^2 e la successione (di successioni) e^k costituita dai vettori della base canonica, vista come elemento del duale di ℓ^2...]*

13. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach, A un suo sottinsieme. Allora A è limitato se e soltanto se, per ogni $T \in X'$, l'immagine $T(A)$ è un sottinsieme limitato di $\mathbf{R}$. (*SUGG.: È ovvio che se A è limitato allora $T(A)$ è limitata per ogni $T \in X'$. Viceversa, basta far vedere che ogni successione $\{x_n\} \subset A$ tale che $\{T(x_n)\}$ è limitata per ogni $T \in X'$, è limitata in norma. Per avere questo risultato basta applicare il Teorema di Banach-Steinhaus alla successione $S_{x_n} \in X''$: essa è puntualmente limitata per ipotesi, per cui deve essere limitata in norma. Possiamo allora concludere perchè $\|x_n\| = \|S_{x_n}\|_{X''}$.*)

14. *** *ABBASTANZA DIFFICILE**** Si mostri che l'insieme dei punti di continuità di una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è intersezione numerabile di aperti. (*SUGG.: Si considerino le funzioni*

$$\begin{aligned} \phi(x,r) &= \sup\{|f(y_1) - f(y_2)| : y_1, y_2 \in B_r(x)\}, \\ \phi(x) &= \inf\{\phi(x,r) : \ r > 0\}. \end{aligned}$$

La funzione $\phi(x)$ è semicontinua superiormente, e i punti di continuità di f sono esattamente quelli tali che $\phi(x) = 0$. Grazie alla semicontinuità, gli insiemi $A_n = \{x \in \mathbf{R} : \ \phi(x) < 1/n\}$ sono aperti: l'insieme di continuità di f è l'intersezione di questi.)

15. Si mostri che non esiste alcuna funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ che sia continua *esattamente* sull'insieme $\mathbf{Q}$ dei razionali. (*SUGG.: Si usi il risultato dell'esercizio precedente ed il teorema di Baire*)

16. Si mostri che nello spazio ℓ^2, la successione e^n dei "vettori della base canonica" (cioè $e^n = \{\delta_{n,k}\}_k$) tende debolmente a zero, mentre non converge fortemente a nulla.

17. Sia X uno spazio di Banach, $C \subset X$ un insieme convesso e fortemente chiuso (cioè chiuso nella topologia indotta dalla norma). Allora C è debolmente sequenzialmente chiuso: se $\overline{x} \in X$ è limite debole di una successione a valori in C, allora $\overline{x} \in C$. *(SUGG.: Sia infatti $x_n \rightharpoonup \overline{x}$, con $\{x_n\} \subset C$. Se per assurdo $\overline{x} \notin C$ potremmo applicare la seconda conseguenza geometrica del Teorema di Hahn-Banach ai convessi $\{\overline{x}\}$ (compatto) e C (chiuso): esiste $T \in X'$, $\varepsilon > 0$ tale che $T(x) < T(\overline{x}) - \varepsilon$ per ogni $x \in C$...)*

18. Se X è uno spazio di Banach e $F : X \to \mathbf{R}$ è una funzione convessa e continua, allora F è (sequenzialmente) debolmente semicontinua inferiormente: per ogni successione $x_n \rightharpoonup \overline{x}$ si ha $F(\overline{x}) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(x_n)$. *(SUGG.: I sottolivelli di F sono chiusi convessi...)*

19. Se X è uno spazio di Banach riflessivo, C un convesso chiuso e $x_0 \in X$, mostrare che esiste un elemento di C di distanza minima da x_0. *(SUGG.: Sia $\{y_n\} \subset C$ una successione tale che $\|x_0 - y_n\| \to \mathrm{dist}(x_0, C)$. Evidentemente la nostra successione è limitata in norma: il teorema di Banach-Alaouglu garantisce allora che esiste una sottosuccessione debolmente convergente ad un punto $\overline{y}$. Il penultimo esercizio ci assicura che $\overline{y} \in C$, mentre l'ultimo applicato alla funzione convessa $y \mapsto \|x_0 - y\|$ permette di concludere che $\overline{y}$ è il punto di distanza minima cercato.)*

20. *(DIFFICILE!)* Se lo spazio di Banach X non è riflessivo, il risultato dell'esercizio precedente può essere falso. Si consideri infatti lo spazio $C^0([0,1])$ con la norma uniforme, e l'insieme

$$C = \{u \in C^0([0,1]) : \int_0^{1/2} u(x)\, dx - \int_{1/2}^1 u(x)\, dx = 1\}.$$

Questo è un chiuso convesso, e l'estremo inferiore delle norme dei suoi elementi è 1. D'altra parte, non esiste alcun elemento di C che ha norma 1: non c'è un punto di C di distanza minima dall'origine!

21. Sia X uno spazio di Hilbert, $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia ortonormale (non necessariamente massimale). Provare che per ogni $x \in X$ è ben definita la somma della serie

$$\sum_{\alpha \in I} < x, e_\alpha > e_\alpha.$$

(SUGG.: Si consideri il sottospazio $Y = \overline{\mathrm{span}\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}}$. Si mostri che la serie converge precisamente alla proiezione ortogonale di x su Y...)

22. Mostrare che $L^\infty((a,b))$ non è separabile.

23. Mostrare che vale la seguente continuità delle traslazioni in $L^p(\mathbf{R}^n)$: sia $u \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $y \in \mathbf{R}^n$. Poniamo $u_y(x) := u(x-y)$ (funzione traslata del vettore y). Mostrare che allora

$$\lim_{y \to 0} \|u - u_y\|_{L^p} = 0.$$

(SUGG:Se $u \in C^0_C(\mathbf{R}^n)$, l'asserto è una semplice conseguenza dell'uniforme continuità. Per una funzione generica, si approssimi la funzione data con una funzione continua.)

24. Mostrare che la successione di funzioni $u_n(x) = \sin nx$ converge debolmente a 0 in $L^p([0,1])$ per $1 < p < +\infty$. *(SUGG.: Si faccia vedere che*

$$\int_a^b \sin nx \; dx \to 0 \quad \forall 0 \le a < b \le 1.$$

Per la linearità dell'integrale, questo implica che $\int_0^1 \sin nx \; \phi(x) \; dx \to 0$ per ogni funzione a scala ϕ. Usando la densità delle funzioni a scala in L^1, possiamo conludere che $\int_0^1 \sin nx \; v(x) \; dx \to 0$ per ogni $v \in L^1([0,1])$. Questo vale a maggior ragione per $v \in L^q$, q esponente coniugato di p...)

25. *(Regolarità delle regolarizzate per convoluzione)* Sia $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione $L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ (cioè $u \in L^1(K)$ per ogni K compatto in $\mathbf{R}^n$), $\phi \in C^1_C(\mathbf{R}^n)$ una funzione C^1 a supporto compatto,

$$v(x) := \int_{\mathbf{R}^n} u(y)\phi(x-y) \; dy.$$

Allora $v \in C^1(\mathbf{R}^n)$ e

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} u(y) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x-y) \; dy.$$

In particolare, se $\phi \in C^\infty_C(\mathbf{R}^n)$ (come nel caso delle regolarizzate per convoluzione) si ha $v(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

26. *(Teorema di Radon-Nicodym per le misure σ-finite)* Siano μ, ν due misure positive σ-finite, definite sulla stessa σ-algebra $\mathcal{S}$ di sottinsiemi di X e con $\nu << \mu$. Mostrare che esiste una funzione misurabile $u : X \to [0, +\infty)$ tale che

$$\nu(A) = \int_A u(x) \; d\mu(x) \qquad \forall A \in \mathcal{S}.$$

27. Mostrare con un esempio che il risultato dell'esercizio precedente può essere falso senza l'ipotesi di σ-finitezza.
(Sugg.: si prenda μ = counting measure su $\mathbf{R}$, ν = Lebesgue).

28. Sia μ una misura positiva finita su X, $u \in L^\infty(\mu)$. Mostrare che esiste una successione $\{u_n\}$ di funzioni *semplici* tali che $u_n \to u$ in L^∞.

29. (Teorema di Egoroff) Sia μ una misura positiva finita su X, $\{u_n\}$, u funzioni misurabili tali che $u_n(x) \to u(x)$ per μ-quasi ogni $x \in X$ (convergenza puntuale quasi ovunque). Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme misurabile C con $\mu(C) < \varepsilon$ tale che $u_n \to u$ uniformemente in $X \setminus C$. *(Sugg.: Per ogni fissato $k \in \mathbf{N}$, considerare gli insiemi*

$$A_{n,k} = \{x \in X : \ |u_m(x) - u(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall m \geq n\} \ldots$$

30. Mostrare che il teorema di Egoroff non è vero per una generica misura σ-finita.

31. Si consideri una funzione 1-periodica $u : \mathbf{R} \to [0, 1]$, e sia $\alpha = \int_0^1 u(x)\, dx$. Mostrare che la successione $u_n(x) := u(nx)$ converge debolmente alla costante α in $L^p([0, 1])$, per $1 < p < +\infty$.

32. Mostrare che la sfera unitaria di $L^1([0, 1])$ contiene dei segmenti, mentre al contrario la sfera unitaria di uno spazio di Hilbert non contiene alcun segmento.