Argomenti delle lezioni del Corso di Calcolo delle Variazioni

Corso di Laurea in Matematica

Quel che segue è il diario delle lezioni che ho tenuto per il corso di Calcolo delle Variazioni. Le lezioni precedenti sono state tenute da Italo Tamanini.

- *Lezione del 10/5/2006 (2 ore):* Abbiamo visto degli esempi di problemi variazionali integrali (regolarissimi e in dimensione 1) che non ammettono soluzioni di classe C^1: il primo era

  $$\int_0^1 (1-(u'(x))^2)^2\,dx \to \min,\ u(0)=u(1)=1,$$

  il secondo

  $$\int_0^1 [(1-(u'(x))^2)^2+(u(x))^2]\,dx \to \min,\ u(0)=u(1)=1.$$

  In entrambi i casi, l'inf del problema variazionale è 0, ma non c'è alcuna funzione regolare che soddisfa le condizioni al contorno e tale che il funzionale vale 0. Abbiamo visto che il primo esempio ammette comunque una "pseudosoluzione" lipschitziana, il secondo nemmeno quella!

  Abbiamo poi visto, in modo ingenuo e a grandi linee, in cosa consiste il metodo diretto del Calcolo delle variazioni...e cosa può andare male! Ad esempio, ci siamo divertiti a dimostrare che un funzionale integrale del tipo

  $$F(u)=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx$$

  con f funzione continua di tre variabili, è *continuo* rispetto alla distanza C^1 (sullo spazio delle funzioni ammissibili u), ma che in generale una successione minimizzante del nostro problema variazionale non avrà sottosuccessioni convergenti in quella distanza. Ad esempio, per le successioni minimizzanti degli esempi visti sopra si ha solo convergenza in C^0.

  Alla fine della lezione, abbiamo visto l'enunciato del Teorema di Ascoli-Arzelà.

- *Lezione del 15/5/2006 (2 ore):* Questa lezione è stata dedicata in gran parte alla dimostrazione del Teorema di Ascoli-Arzelà:

  TEOREMA (Ascoli-Arzelà): Sia $u_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ una successione di funzioni continue. Se la successione $\{u_n\}$ è equilimitata (cioè se esiste

$M > 0$ tale che $|u_n(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$) ed equicontinua (cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in [a,b]$ con $|x-y| < \delta$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ valga $|u_n(x) - u_n(y)| \leq \varepsilon$), allora esiste una sottosuccessione che converge uniformemente ad una funzione continua $u : [a,b] \to \mathbf{R}$.

Abbiamo poi visto che la nostra dimostrazione ci permette, senza troppe modifiche, di ottenere la compattezza di una successione di funzioni equicontinue $u_n : [a,b] \to K$, dove K è un qualunque *spazio metrico compatto*. In questo caso, l'ipotesi di compattezza di K sostituisce quella di equilimitatezza (che era sufficiente in $\mathbf{R}$ ma non è più sufficiente per funzioni a valori in uno spazio metrico generale).

Una funzione continua $\gamma : [a,b] \to K$ può essere vista in modo naturale come una *curva continua* a valori in K. Abbiamo dunque definito la lunghezza di una curva continua, e impostato il problema variazionale di trovare la curva di lunghezza minima che congiunge due punti di K. Abbiamo anticipato che questo problema ha soluzione a patto che esista almeno una curva continua di lunghezza finita che congiunge i due punti dati: dimostreremo questo teorema la prossima volta.

- *Lezione del 16/5/2006 (2 ore):* Dato uno spazio metrico compatto K e due punti $p, q \in K$ tali che esista almeno un cammino continuo di lunghezza finita che congiunge p e q, abbiamo dimostrato che esiste sempre un cammino di lunghezza *minima* con questa proprietà (geodetica minimizzante). Abbiamo usato il metodo diretto del calcolo delle variazioni, partendo da una *successione minimizzante* costituita da cammini le cui lunghezze tendano all'inf. Due difficoltà: mancanza di compattezza a causa dell'invarianza della lunghezza per riparametrizzazione, non continuità del funzionale lunghezza rispetto alla convergenza uniforme dei cammini. Abbiamo risolto la prima difficoltà scegliendo *parametrizzazioni con velocità costante* delle curve della successione minimizzante. La seconda *non è* una vera difficoltà: se è vero che il funzionale lunghezza non è continuo rispetto alla convergenza uniforme delle curve, è comunque *semicontinuo inferiormente*...e si dà il caso che sia proprio questa la disuguaglianza che ci serve!

- *Lezione del 17/5/2006 (2 ore):* In questo incontro abbiamo formalizzato il concetto di semicontinuità inferiore (sequenziale e topologica) per una funzione definita su uno spazio topologico. Abbiamo poi visto un tipico teorema di esistenza di minimo, che richiede la semicontinuità inferiore del funzionale e la compattezza di un sottolivello non vuoto.

Dopo qualche richiamo sugli spazi $L^p([a,b])$, abbiamo poi visto la definizione e le principali proprietà dello spazio $AC([a,b])$ delle funzioni assolutamente continue (senza dimostrarle). Abbiamo poi introdotto gli spazi di Sobolev $W^{1,p}([a,b])$, limitandoci per ora alla definizione ed alla dimostrazione dell'unicità della derivata debole.

- *Lezione del 22/5/2006 (2 ore):* Abbiamo verificato che lo spazio di Sobolev $W^{1,p}([a,b])$ è uno spazio di Banach. In seguito, abbiamo verificato un'importante caratterizzazione degli spazi di Sobolev in dimensione 1: si ha $u \in W^{1,p}([a,b])$ se e soltanto se u coincide quasi ovunque con una funzione assolutamente continua la cui derivata puntuale appartiene a L^p (e tale derivata classica concide quasi ovunque con la derivata debole di u). Grazie a questo teorema, possiamo supporre che una funzione di Sobolev sia assolutamente continua! Abbiamo poi visto che se $1 < p < +\infty$, allora le funzioni (assolutamente continue) $u \in W^{1,p}$ sono $(1-1/p)$-hölderiane con costante di Hölder controllata da $\|u'\|_{L^p}$.

- *Lezione del 23/5/2006 (2 ore):* Abbiamo concluso il discorso della lezione precedente, mostrando con un esempio che non è detto che una funzione in $W^{1,1}([a,b])$ sia hölderiana. Invece, lo spazio $W^{1,\infty}([a,b])$ coincide con quello delle funzioni lipschitziane.

  Dopo qualche richiamo sulla convergenza debole negli spazi L^p, abbiamo dimostrato un teorema di compattezza in $W^{1,p}([a,b])$ con $1 < p < +\infty$: una successione $\{u_n\}$ equilimitata in norma ha una sottosuccessione che converge uniformemente ad una funzione $u \in W^{1,p}([a,b])$, con le derivate che convergono debolmente in L^p ad u'.

  Abbiamo visto con un esempio che il teorema non vale in $W^{1,1}$.

- *Lezione del 24/5/2006 (2 ore):* In questa lezione abbiamo applicato gli spazi di Sobolev per dimostrare l'esistenza del minimo del semplice funzionale convesso

  $$F(u) = \int_a^b [(u')^2 + u^2 + fu]\, dx,$$

  tra tutte le funzioni in $W^{1,2}([a,b])$ con valori fissati agli estremi. La funzione f presente nel funzionale è fissata a priori, ed è almeno in L^2.

  Innanzitutto, abbiamo mostrato con il metodo diretto del calcolo delle variazioni che una successione minimizzante ha una sottosuccessione che converge (uniformemente e con le derivate che convergono debolmente in L^2) ad un minimo del funzionale. Il minimo è unico grazie alla stretta convessità.

Abbiamo poi visto che il minimo u soddisfa ad un'equazione di Eulero in forma debole, da cui si deduce che $u \in W^{2,2}$ (e quindi, in particolare, $u \in C^1$) e che l'equazione di Eulero forte (quella del secondo ordine) è soddisfatta quasi ovunque. Se poi $f \in C^0$, allora $u \in C^2$ e l'equazione di Eulero vale classicamente.

- *Lezione del 29/5/2006 (2 ore):* Abbiamo dimostrato il teorema di semicontinuità di Tonelli (con ipotesi un po' addomesticate...) per il funzionale integrale $F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$. Se l'integranda $f(x, u, p)$ è non negativa, continua e con derivata f_p continua, ed inoltre $f(x_0, u_0, \cdot)$ è convessa per ogni x_0, u_0, allora il funzionale F è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza uniforme delle funzioni e L^1-debole delle derivate.

- *Lezione del 30/5/2006 (2 ore):* Il risultato di semicontinuità dimostrato ieri conduce facilmente ad un risultato di esistenza di minimi in uno spazio di Sobolev se l'integranda f soddisfa una disuguaglianza del tipo $f(x, u, p) \geq C|p|^m$ con $m > 1$.

  Abbiamo poi visto un risultato che mostra la *necessità* della convessità di f rispetto a p affinché si abbia semicontinuità inferiore.

- *Lezione del 31/5/2006 (2 ore):* Come applicazione della teoria vista, abbiamo dimostrato che le geodetiche minimizzanti su una varietà riemanniana M (di classe C^∞) compatta, connessa e senza bordo sono regolari. Infatti, abbiamo visto in una lezione precedente che se prendiamo due punti $p, q \in M$, esiste un cammino lipschitziano di lunghezza minima che li congiunge. Questo cammino può essere sempre parametrizzato con velocità costante. Abbiamo visto che, allora, la nostra geodetica minimizzante è anche un minimo del funzionale energia, che in carte locali assume la forma

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 g_{ij}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\, dt$$

  con la matrice g_{ij} simmetrica e definita positiva. Abbiamo derivato l'equazione di Eulero debole soddisfatta dal nostro minimo lipschitziano, e con semplici considerazioni ne abbiamo dedotto la regolarità della nostra geodetica lipschitziana: essa è in realtà una curva di classe C^∞ che soddisfa in senso classico l'equazione di Eulero.