Diario del Corso di Analisi - VI Unità Didattica

Corso di Laurea: Matematica
Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!

Lezione del 18/4/2006 (2 ore):

Quest'unità didattica è dedicata essenzialmente allo studio dei rudimenti dell'Analisi Funzionale lineare: concentreremo in particolare il nostro interesse sugli spazi di Banach e sugli spazi di Hilbert, vedendo numerosi esempi e qualche complemento di teoria della misura.

In realtà, soprattutto all'inizio quel che faremo non è altro che uno studio accurato dell'*algebra lineare* in spazi di dimensione infinita! Probabilmente saprete già che, dal punto di vista puramente algebrico, quando si passa dalla dimensione finita alla dimensione infinita le novità non sono molte: se ammettiamo l'assioma della scelta, uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{C}$ ammette sempre una base, ossia un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti. Inoltre, ogni elemento dello spazio si scrive come combinazione lineare *finita* di elementi della base...

Dal punto di vista dell'analista, tuttavia, questo non è sufficiente: per esempio, come minimo abbiamo bisogno di una nozione di continuità (e quindi di una topologia...o ancora meglio, se possibile, di una metrica), che sia *compatibile* con le operazioni di spazio vettoriale. Vogliamo cioè, come richiesta minima assolutamente irrinunciabile, una topologia tale che le *operazioni di spazio vettoriale* (somma e prodotto per scalare) siano continue.

DEFINIZIONE: Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{C}$, dotato di una topologia τ. Lo spazio (X, τ) si dice *spazio vettoriale topologico* se e soltanto se le operazioni di spazio vettoriale (somma e prodotto per scalare) sono continue rispetto alle ovvie topologie prodotto indotte da τ.

Gli esempi più semplici di spazi vettoriali topologici, nonché (quasi) i soli di cui ci occuperemo in questo corso, sono gli *spazi normati*:

DEFINIZIONE (Norma, spazio normato): Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ (le modifiche per spazi vettoriali su $\mathbf{C}$ sono ovvie...). Una *norma* su X è un'applicazione $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbf{R}$ tale che

(i) $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in X$, $\|x\| = 0$ sse $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ per ogni $x \in X$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (omogeneità);

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per ogni $x, y \in X$ (disuguaglianza triangolare).

Uno spazio vettoriale su cui è definita una norma si chiama *spazio normato*: esso è uno spazio metrico con la distanza definita da

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

È un semplice esercizio verificare che uno spazio normato (con la distanza naturale appena introdotta) è uno spazio vettoriale topologico.

Detto a margine, visto che uno spazio normato è uno spazio metrico, vale la pena di osservare che è perfettamente lecito testare la continuità con le successioni: per esempio una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ è continua se e solo se per ogni $\overline{x}$ e per ogni successione $x_k \to \overline{x}$ si ha $f(x_k) \to f(\overline{x})$.

Vediamo subito alcuni esempi di spazi normati:

1. Lo spazio $\mathbf{R}^n$ è uno spazio normato con l'usuale norma euclidea: se $x = (x_1, \ldots, x_n)$, essa è definita da $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Altre norme su $\mathbf{R}^n$ sono anche $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ e $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$: è un semplice ed utile esercizio verificarlo, e può anche essere istruttivo disegnare le palle della metrica indotta da queste norme.

   Più in generale, sono norme su $\mathbf{R}^n$ quelle definite nel modo seguente:

   $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

   In questo caso, la verifica della disuguaglianza triangolare è meno ovvia: avremo modo di vederla nel seguito del corso.

2. Un altro spazio normato che dovrebbe essere ben noto, ed è forse l'esempio più semplice di spazio normato di dimensione infinita, è lo spazio delle funzioni continue $C^0([a, b])$ (o più in generale $C^0(K)$, con K spazio metrico compatto) dotato della norma

   $$\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)| : x \in [a, b]\}.$$

3. Altro esempio di spazio normato in dimensione infinita: $C^0([a,b])$ con la norma
$$\|u\|_1 = \int_a^b |u(x)|\, dx$$
(lo si verifichi!).

4. Utili esempi di spazi normati di dimensione infinita sono gli *spazi di successioni* ℓ^p, $1 \le p \le +\infty$, che si definiscono nel modo seguente. Sia $1 \le p < +\infty$, e si consideri una successione di numeri reali $\{x_n\}_{n\in N}$: la sua *norma* ℓ^p si definisce come
$$\|\{x_n\}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$
Se poi $p = +\infty$, si definisce
$$\|\{x_n\}\|_\infty = \sup\{|x_n| :\ n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$
Infine, per $1 \le p \le +\infty$ definiamo
$$\ell^p = \{\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} :\ \|\{x_n\}\| < +\infty\}.$$
Questo è uno spazio normato con la norma $\|\cdot\|_p$... (Se diamo per buono che le p-norme che abbiamo definito negli spazi euclidei (al punto 1.) siano, appunto, delle norme, la verifica della disuguaglianza triangolare si ottiene semplicemente passando al limite...).

Esattamente come succedeva negli spazi euclidei, una proprietà altamente desiderabile per uno spazio normato è la *completezza*:

DEFINIZIONE (Spazio di Banach): Uno spazio vettoriale normato X si dice *di Banach* se è completo, ossia se ogni successione di Cauchy a valori in X converge.

Riprendiamo per un momento i nostri esempi di spazi normati e vediamo se sono completi:

1. È ben noto che lo spazio $\mathbf{R}^n$ con la metrica euclidea è completo. Lo è anche con tutte le altre metriche indicate: vedremo tra poco che su $\mathbf{R}^n$ *tutte le metriche sono equivalenti*, ossia inducono la stessa topologia (hanno gli stessi insiemi aperti, per cui la convergenza rispetto ad una delle norme è equivalente a quella rispetto ad un'altra) e hanno le stesse successioni di Cauchy.

2. Anche $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ è un esempio di spazio di Banach. Sia infatti $\{f_n\}$ una successione di Cauchy nel nostro spazio: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ per ogni $m, n \geq \nu$. Allora, per ogni $x \in [a,b]$ si ha
$$(**) |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$
per $m, n \geq \nu$, e la successione reale $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy. Per la completezza di $\mathbf{R}$, esiste un numero reale $f(x)$ tale che $f_n(x) \to f(x)$. Passando al limite per $m \to +\infty$ nella (**) otteniamo
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \nu,$$
e passando al sup su $x \in [a,b]$ $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ per $n \geq \nu$. Dunque $f_n \to f$ uniformemente. La funzione f è poi continua perché sappiamo già che limite uniforme di funzioni continue è continuo.

3. Invece $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_1)$ non è uno spazio di Banach perché non è completo. Prendiamo per esempio $[a,b] = [-1,1]$ e consideriamo la successione
$$u_n(x) = \begin{cases} -1 & sex \leq -1/n, \\ 1 & se\ x \geq 1/n, \\ nx & se\ \ -1/n < x < 1/n. \end{cases}$$
Questa successione è di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$, ma non converge ad alcuna funzione continua: in effetti, è immediato verificare che converge in norma alla funzione discontinua $\mathrm{sgn}(x)$. Durante il corso, studieremo diffusamente il completamento di questo spazio: si tratta dello spazio di Banach $L^1([a,b])$ delle funzioni sommabili secondo Lebesgue dotato della norma $\|\cdot\|_1$ (N.B.: Affinché questa sia effettivamente una norma si deve avere l'accortezza di convenire che due funzioni sommabili sono *equivalenti* se coincidono quasi ovunque in $[a,b]$. Questo perché una funzione quasi ovunque nulla ha evidentemente norma 0.)

4. Anche tutti gli spazi ℓ^p sono onesti spazi di Banach: li studieremo più in dettaglio durante il corso!

Nel nostro discorsetto sulla completezza di $\mathbf{R}^n$ con le varie norme, è saltato fuori il concetto di *norme equivalenti*: due norme su uno stesso spazio vettoriale si dicono equivalenti se inducono la stessa topologia, ossia se gli insiemi aperti indotti dalle due norme sono gli stessi.

Supponiamo dunque di avere uno spazio vettoriale X e due norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ su di esso.Verifichiamo che le due norme sono equivalenti *se e solo se* esistono due costanti $c, C > 0$ tali che
$$(*)\ c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

Infatti, come ben sappiamo in ogni spazio metrico gli aperti si definiscono a partire dalle palle aperte: dunque, è immediato verificare che la topologia indotta è la stessa se e solo se, data comunque una palla "di uno dei due tipi" (cioè una palla rispetto ad una delle due metriche), è possibile scegliere una palla "dell'altro tipo", di raggio convenientemente piccolo, avente lo stesso centro ed in essa contenuta. Grazie all'omogeneità della norma ed alla definizione della metrica, le palle in uno spazio normato si ottengono tutte dalla palla unitaria centrata nell'origine tramite un'omotetia ed una traslazione....et voila: le due disuguaglianze (*) implicano che $B^{(1)}(0, 1/C) \subset B^{(2)}(0, 1)$ e che $B^{(2)}(0, c) \subset B^{(1)}(0, 1)$. La prossima volta vedremo che vale anche il viceversa: se le due norme inducono la stessa topologia, allora deve valere (*).

Lezione del 20/4/2006 (2 ore): L'ultima volta, ci rimaneva da dimostrare che se due norme sono equivalenti (cioè inducono la stessa topologia), allora esistono $C, c > 0$ tali che

$$(*)\ c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

La dimostrazione del viceversa l'abbiamo già vista: se vale (*) allora le due norme sono equivalenti.

Supponiamo ora per assurdo che le due norme inducano la stessa topologia, ma che la disuguaglianza di sinistra in (*) non valga per alcuna costante c. Poiché la disuguaglianza è sempre verificata per $x = 0$, dovrebbe esistere una successione $\{x_n\} \subset X$ mai nulla, tale che $\|x_n\|_2/\|x_n\|_1 \to 0$. Grazie all'omogeneità delle norme non è restrittivo supporre che sia $\|x_n\|_1 = 1$ per ogni n (basta eventualmente sostituire x_n con $x_n/\|x_n\|_1$, cosa che non cambia il rapporto), da cui $\|x_n\|_2 \to 0$: la successione converge a 0 rispetto alla seconda norma. Ma allora dovrebbe convergervi anche rispetto alla prima (la topologia è la stessa per ipotesi!), il che è assurdo proprio perché $\|x_n\|_1 = 1$ per ogni n. Scambiando il ruolo delle norme, vediamo poi che deve valere anche la disuguaglianza di destra.

Grazie a (*), vediamo anche che due norme equivalenti hanno le stesse successioni di Cauchy: la completezza o meno dello spazio rimane invariata se si passa ad una norma equivalente. Viceversa, le due norme $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ sullo spazio delle funzioni continue $C^0([a, b])$ non sono equivalenti (perché la prima è una norma completa, la seconda non lo è). In effetti, la topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|_\infty$ è strettamente *più forte* (ha più aperti) di quella indotta dalla norma $\|\cdot\|_1$... Le palle aperte rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ non sono aperte rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$, mentre il viceversa è vero.

Invece, come abbiamo già accennato, tutte le norme su $\mathbf{R}^n$ sono equivalenti:

TEOREMA: Tutte le norme sullo spazio $\mathbf{R}^n$ sono equivalenti.

DIM.: Poiché l'equivalenza tra norme gode della proprietà transitiva, sarà sufficiente mostrare che la norma euclidea $|\cdot|$ è equivalente ad una qualunque altra fissata norma $\|\cdot\|$. Dobbiamo far vedere che vale la coppia di disuguaglianze (*): esistono due costanti $c, C > 0$ tali che $c|x| \leq \|x\| \leq C|x|$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$. Dividendo il tutto per $|x|$ e sfruttando l'omogeneità della norma, vediamo che la nostra coppia di disuguaglianze è vera se e solo se vale

$$(**)\ c \leq \|x\| \leq C \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n, |x| = 1.$$

Ora, osserviamo che la funzione $x \mapsto \|x\|$ è continua rispetto alla topologia euclidea: essa è addirittura lipschitziana, come mostra la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} |\|x\| - \|y\|| \quad &\leq \quad \|x-y\| = \|\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\|e_i\| \leq \\ &\quad |x-y|(\sum_{i=1}^n \|e_i\|), \end{aligned}$$

in cui gli e_i sono i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^n$ e si è usata l'omogeneità della norma e la disuguaglianza triangolare.

D'altra parte, la sfera unitaria $S = \{x \in \mathbf{R}^n : \ |x| = 1\}$ è un compatto euclideo: allora la (**) è vera a patto di prendere $c = \min\{\|x\| : \ x \in S\}$, $C = \max\{\|x\| : \ x \in S\}$, e questi oggetti esistono finiti grazie al teorema di Weierstrass (e $c \neq 0$ grazie al fatto che la norma $\|\cdot\|$ è non degenere). Q.E.D.

Da questo risultato segue che tutte le norme su uno spazio vettoriale reale di dimensione finita sono equivalenti, e che ogni isomorfismo lineare tra un tale spazio normato e $\mathbf{R}^n$ con la norma euclidea è anche un omeomorfismo (esercizio!). In sostanza, tutti gli spazi vettoriali (reali) normati di dimensione finita sono equivalenti allo spazio euclideo.

Invece, in dimensione infinita si possono mettere norme *non equivalenti* sullo stesso spazio: abbiamo visto che $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ e $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_1)$ non hanno la stessa topologia. Precisamente, la volta scorsa abbiamo costruito una successione di funzioni continue che converge a 0 nella norma $\|\cdot\|_1$ ma non nella norma $\|\cdot\|_\infty$. Questo ha una conseguenza a prima vista sorprendente: la *mappa identica* $Id : (C^0([a,b]), \|\cdot\|_1) \to (C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ non è continua nell'origine. Abbiamo dunque un esempio di mappa *lineare e invertibile* tra due spazi normati di dimensione infinita che non è nemmeno continua!

Questo fatto non è legato alla scelta di norme esotiche e non complete (come la norma $\|\cdot\|_1$), ma è intrinseco della dimensione infinita:

PROPOSIZIONE: Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio vettoriale normato (su* $\mathbf{R}$*) di dimensione infinita. Allora esistono sempre funzionali lineari* $T : X \to \mathbf{R}$ *che sono discontinui.*

DIM.: Esibiremo esplicitamente un funzionale lineare su X (un elemento del *duale algebrico* di X) che è discontinuo.

Prendiamo una base $\mathcal{B} = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ del nostro spazio: essa è evidentemente infinita. Non è restrittivo (normalizzando opportunamente gli elementi della base) supporre che sia $\|x_\alpha\| = 1$ per ogni $\alpha \in I$. Sappiamo bene dal corso di algebra lineare che per specificare un'applicazione lineare $T : X \to \mathbf{R}$ basta definirla sugli elementi della base: per linearità, essa sarà allora ben definita su tutto lo spazio. A questo fine, scegliamo un sottinsieme numerabile $\mathcal{B}' = \{\tilde{x}_n\} \subset \mathcal{B}$ e poniamo $T(\tilde{x}_n) = n$, $n = 1, 2, \ldots$, mentre poniamo $T(x_\alpha) = 0$ se $x_\alpha \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$. Il funzionale lineare così definito risulta discontinuo: la successione $y_n = x_n/\sqrt{n}$ tende a 0 in norma, ma $T(y_n) = \sqrt{n} \to +\infty$. Q.E.D.

La devastante conseguenza della proposizione precedente è la seguente: quando un analista parla di *duale* di uno spazio vettoriale normato X (o più in generale di uno s.v. topologico), non si riferisce *mai* al duale "dei geometri", cioè alla totalità dei funzionali lineari su X (*duale algebrico*), ma alla totalità dei funzionali lineari continui:

DEFINIZIONE (Duale topologico): Dato uno spazio vettoriale normato (spazio vettoriale topologico) X, il suo *duale topologico* (o più semplicemente il suo duale) è lo spazio vettoriale dei funzionali lineari *continui* $T : X \to \mathbf{R}$. Esso si denota con X'.

La continuità associata alla linearità permette la seguente caratterizzazione degli elementi del duale di uno spazio normato:

TEOREMA (Caratterizzazione dei funzionali lineari continui su uno spazio normato): Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato,* $T : X \to \mathbf{R}$ *un funzionale lineare. I seguenti fatti sono equivalenti:*

(i) T *è continuo;*

(ii) T *è continuo nell'origine;*

(iii) T *è limitato: esiste una costante* $C > 0$ *tale che*

$$|T(x)| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X;$$

(iv) Il nucleo di T, $\ker(T)$ è un sottospazio chiuso di X.

DIM.: È ovvio che $(i) \Rightarrow (ii)$, mentre che $(ii) \Rightarrow (i)$ è conseguenza del fatto che $|T(x) - T(\overline{x})| = |T(x - \overline{x})|$ grazie alla linearità. È anche ovvio che $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Mostriamo viceversa che $(ii) \Rightarrow (iii)$: grazie alla definizione di continuità nell'origine (con $\varepsilon = 1$), esiste $\delta > 0$ tale che $|T(x)| \leq 1$ ogniqualvolta $\|x\| \leq \delta$. Allora, per ogni $y \in X$, $y \neq 0$, si ha

$$|T(y)| = |T(\frac{\|y\|}{\delta} \cdot y\frac{\delta}{\|y\|})| = \frac{\|y\|}{\delta}|T(y\frac{\delta}{\|y\|})| \leq \frac{1}{\delta}\|y\|,$$

che è proprio la limitatezza di T.

È poi ovvio che $(i) \Rightarrow (iv)$: la controimmagine del chiuso $\{0\}$ secondo la funzione continua T è un chiuso.

Mostriamo infine che $(iv) \Rightarrow (ii)$: se $T \equiv 0$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, sia $\ker(T)$ chiuso e supponiamo per assurdo che T non sia continuo in 0. Allora è possibile trovare una successione $\{x_n\} \subset X$ tale che $T(x_n) \not\to 0$. Estraendo eventualmente una sottosuccessione, questo implica che esiste una costante $c > 0$ tale che $|T(x_n)| \geq c$ per ogni n.

Sia poi $y \in X$ qualunque, e consideriamo la successione $y_n = y - \frac{x_n}{T(x_n)}F(y)$: è immediato verificare che $y_n \in \ker(T)$ e che $y_n \to y$ in norma. Ne deriva che $y \in \overline{\ker(T)} = \ker(T)$, da cui $\ker(T) = X$ (in quanto y è arbitrario) e $T \equiv 0$, contro la nostra ipotesi che il funzionale fosse non nullo. Q.E.D.

Lezione del 21/4/2006 (2 ore): Abbiamo visto ieri che un funzionale lineare $T : X \to \mathbf{R}$ (con X spazio vettoriale normato) è continuo se e solo se T è limitato, cioè se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|T(x)| \leq C\|x\| \quad \forall x \in X.$$

La *norma* di $T \in X'$ si definisce come la *più piccola* delle costanti C per cui la disuguaglianza è vera: precisamente, definiamo

$$(*) \ \|T\|_{X'} := \sup\{\frac{|T(x)|}{\|x\|} : \ x \in X, \ x \neq 0\} = \sup\{|T(x)| : \ x \in X, \ \|x\| \leq 1\}.$$

TEOREMA (duale di uno spazio normato): Sia X uno spazio vettoriale normato su $\mathbf{R}$ (non necessariamente completo). Consideriamo il duale topologico X' di X, dotato della norma duale definita in (*). Allora $(X', \|\cdot\|_{x'})$ è uno spazio di Banach.

DIM.: La verifica che $\|\cdot\|_{X'}$ è una norma su X è semplice ed è lasciata per esercizio.

Rimane da verificare la completezza: sia dunque $\{T_n\} \subset X'$ una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{X'}$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\|T_n - T_m\|_{X'} \le \varepsilon$ per $m, n \ge \nu$. Allora, per ogni $x \in X$ e per $m, n \ge \varepsilon$ si ha

$$(**)\ |T_n(x) - T_m(x)| \le \varepsilon \|x\|,$$

per cui la successione di numeri reali $\{T_n(x)\}$ è di Cauchy e converge ad un numero reale che chiameremo $T(x)$. È immediato verificare la linearità di questo limite puntuale $T : X \to \mathbf{R}$. D'altra parte, passando al limite per $m \to +\infty$ in $(**)$ si ottiene

$$|T_n(x) - T(x)| \le \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X,\ \forall n \ge \nu,$$

cioè $\|T_n - T\|_{X'} \le \varepsilon$ per $n \ge \nu$. È anche ovvio che T è un funzionale lineare limitato in quanto, grazie alla disuguaglianza precedente, abbiamo

$$\|T\|_{X'} \le \|T_\nu\|_{X'} + \|T_\nu - T\|_{X'} < +\infty.$$

Q.E.D.

OSSERVAZIONE/ESERCIZIO: Procedendo alla stessa maniera, potete dimostrare il seguente importante fatto. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati, il secondo dei quali è di Banach. Allora lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(X;Y)$ delle applicazioni lineari e continue di X in Y è uno spazio di Banach con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} = \sup\{\|T(x)\|_Y :\ x \in X,\ \|x\|_X \le 1\}.$$

ESEMPIO: Mostriamo con un esempio che il sup nella definizione di norma duale non è necessariamente un massimo. Consideriamo lo spazio vettoriale $\ell^1 = \{\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} :\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$, dotato della norma

$$\|\{x_n\}\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Vedremo che questo è uno spazio di Banach.

Consideriamo poi il funzionale lineare $T : \ell^1 \to \mathbf{R}$ definito da

$$T(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n) x_n.$$

Si verifica facilmente che questo funzionale è ben definito su ℓ^1 (perché la serie converge assolutamente) ed è lineare. È poi limitato:

$$(***)|T(\{x_n\})| \leq \sum_{n=1}^{\infty}(1-1/n)|x_n| \leq \|\{x_n\}\|_{\ell^1},$$

e si noti che *l'ultima disuguaglianza è stretta se* $\{x_n\}$ *è una successione non identicamente nulla.*

La (***) dice che $\|T\|_{(\ell^1)'} \leq 1$. D'altra parte, la norma duale vale proprio 1: facciamo vedere che esiste una successione e_k di elementi di ℓ^1 (una successione di successioni...) tale che $\|e_k\|_{\ell^1} = 1$ e $T(e_k) \to 1$. Basta prendere come e_k il "k-esimo elemento della base canonica", cioè la successione il cui k-esimo elemento vale 1, mentre tutti gli altri valgono 0: si ha dunque $T(e_k) = 1 - 1/k$ e ne deduciamo che

$$\|T\|_{(\ell^1)'} = 1.$$

Siccome però la disuguaglianza (***) è stretta per le successioni non nulle, deduciamo che il sup nella definizione di norma duale non è un massimo.

Uno dei risultati più utili (e famosi) per lo studio del duale, è il teorema di Hahn-Banach:

TEOREMA (Hahn-Banach): Sia X *uno spazio vettoriale reale,* $p : X \to [0, +\infty)$ *un'applicazione tale che*

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *per ogni* $x \in X$, *per ogni* $\lambda > 0$ *(positiva omogeneità);*

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *per ogni* $x, y \in X$ *(subadittività).*

Sia poi Y *un sottospazio vettoriale proprio di* X, $T : Y \to \mathbf{R}$ *un funzionale lineare su* Y *tale che* $T(x) \leq p(x)$ *per ogni* $x \in Y$. *Allora esiste un funzionale lineare* $\tilde{T} : X \to \mathbf{R}$ *che estende* T *(cioè* $\tilde{T}(x) = T(x)$ *per ogni* $x \in Y$*) e tale che* $\tilde{T}(x) \leq p(x)$ *per ogni* $x \in X$.

Come caso particolare, se X *è normato ogni funzionale lineare continuo su* Y *si estende ad un funzionale lineare continuo definito su tutto* X *avente la stessa norma.*

DIM.: La parte più corposa della dimostrazione consiste nel provare il seguente asserto: *se* Z *è un sottospazio proprio di* Y *e* $T : Z \to \mathbf{R}$ *è lineare con* $T(x) \leq p(x)$ *per ogni* $x \in Z$, *il funzionale si può estendere ad un sottospazio strettamente più grosso in modo che la disuguaglianza continui a valere.*

Sia infatti $x_0 \in X \setminus Z$: estendiamo T ad un funzionale $\tilde{T}$ definito sullo spazio $Z \oplus \mathbf{R}\{x_0\}$. Per linearità avremo, per ogni $x \in Z$ e per ogni $t \in \mathbf{R}$:

$$\tilde{T}(x + tx_0) = T(x) + t\alpha,$$

dove $\alpha = T(x_0)$ è un numero reale da scegliere in modo che valga

$$T(x) + t\alpha = p(x + tx_0) \quad \forall x \in Z,\ \forall t \in \mathbf{R}.$$

Usando la linearità di T e la positiva omogeneità di p, e distinguendo i casi $t > 0$ e $t < 0$, si vede facilmente che la nostra disuguaglianza è equivalente alla coppia di disuguaglianze

$$\begin{aligned} T(x) + \alpha \leq p(x + x_0)\ \forall x \in Z, \\ T(y) - \alpha \leq p(y - x_0)\ \forall y \in Z. \end{aligned}$$

cioè α deve soddisfare

$$T(y) - p(y - x_0) \leq \alpha \leq p(x + x_0) - T(x) \quad \forall x, y \in Z.$$

Questo è possibile a patto che il membro di sinistra sia sempre minore o uguale del membro di destra, per ogni scelta di $x, y \in Z$. Ma questo è vero perché $T(x) + T(y) = T(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$ per ogni $x, y \in Z$. Il nostro asserto risulta dunque provato.

La dimostrazione del teorema segue abbastanza facilmente dall'asserto usando una delle versioni equivalenti del Lemma di Zorn. Consideriamo infatti la famiglia $\mathcal{F}$ dei funzionali lineari definiti su sottospazi Z di X contenenti Y, che siano estensioni del nostro funzionale originale T e siano dominati dalla funzione p. Mettiamo una relazione d'ordine su $\mathcal{F}$: se $R : Z_1 \to \mathbf{R}$ e $S : Z_2 \to \mathbf{R}$ sono due elementi di $\mathcal{F}$, diciamo che $R \preceq S$ se $Z_1 \subset Z_2$ e S estende R. Il principio di massimalità di Hausdorff ci assicura che possiamo trovare un sottinsieme totalmente ordinato massimale $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$,

$$\mathcal{G} = \{S_\sigma : Z_\sigma \to \mathbf{R}, \sigma \in I\}.$$

Questo insieme ammette un maggiorante: si tratta del funzionale S definito sul sottospazio

$$Z = \bigcup_{\sigma \in I} Z_\sigma$$

(verificare che si tratta di un sottospazio!) ponendo $S(x) = S_\sigma(x)$ se $x \in S_\sigma$ (questa è una buona definizone perché $\mathcal{G}$ è totalmente ordinato).

Possiamo ora dire che $Z = X$ e S è l'estensione cercata: se così non fosse, l'asserzione dimostrata prima ci permetterebbe di estendere S ad un sottospazio strettamente più grande, contro la massimalità dell'insieme totalmente ordinato $\mathcal{G}$: questo conclude la dimostrazione dell'enunciato principale del teorema.

Il "caso particolare" in uno spazio normato segue subito ponendo $p(x) = \|T\|_{Y'}\,\|x\|$. Q.E.D.

Lezione del 27/4/2006 (2 ore): Una delle molte conseguenze del Teorema di Hahn-Banach è la seguente: *se $x \in X$ è possibile trovare $T \in X'$ tale che $\|T\| = 1$ e $T(x) = \|x\|$.*

Infatti, il funzionale può essere definito sulla retta $\mathbf{R}\{x\}$ ponendo $T(tx) = t\|x\|$ (ed ha evidentemente norma 1), e può poi essere esteso a tutto X grazie al Teorema di Hahn-Banach.

Questo implica anche che per ogni $x \in X$ vale

$$\|x\| = \max\{T(x) : \ T \in X', \ \|T\| \leq 1 :$$

la disuguaglianza è ovvia, l'uguale si ottiene usando il funzionale appena costruito!

Altra conseguenza dell'asserto appena dimostrato è il fatto che *il duale di uno spazio normato X separa i punti*: dati due punti $x, y \in X$ qualunque, è sempre possibile trovare un elemento del duale che assume *valori diversi* su di essi. Per convincersene, basta prendere un funzionale che vale $\|x - y\|$ sul vettore $x-y$: allora $T(x)-T(y) = T(x-y) \neq 0$. Val la pena di dire che questa proprietà non è vera per uno spazio vettoriale topologico generale: esistono onestissimi s.v.t. (metrizzabili e persino completi) il cui duale contiene solo il funzionale identicamente nullo!

ESERCIZIO: In generale, dato un funzionale lineare T limitato su un sottospazio Y di $(X, \|\cdot\|)$, la sua estensione ad un elemento $\tilde{T} \in X'$ con la stessa norma, data dal Teorema di Hahn-Banach, non è evidentemente unica: è facilissimo fare degli esempi anche in dimensione finita.

Si mostri però che se Y è un sottospazio *denso* di X, ossia se $\overline{Y} = X$, allora l'estensione è unica. Vi viene in mente un modo per dimostrare l'esistenza di questa estensione senza ricorrere al teorema di Hahn-Banach?

La nostra analisi sulle conseguenze del Teorema di Hahn-Banach è ben lungi dall'essere conclusa. Prima di procedere, però, è utile fare una digressione un po' più concreta, in modo da "fabbricare" un numero sufficiente di esempi di spazi di Banach in dimensione infinita. In particolare, nella prima lezione abbiamo introdotto gli spazi ℓ^p senza dimostrare nulla: vogliamo dunque verificare che la norma $\|\cdot\|_{\ell^p}$ è una norma e che si tratta di spazi completi. Già che ci siamo, introduciamo anche degli spazi funzionali strettamente imparentati con questi: gli spazi $L^p(\Omega)$ (con Ω aperto di $\mathbf{R}^n$).

DEFINIZIONE (Spazi $L^p(\Omega)$): Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$ (o, più in generale, un sottinsieme misurabile di $\mathbf{R}^n$: che Ω sia aperto è utile affinché valgano certi teoremi di densità), $1 \leq p < +\infty$. Sia poi $u : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ una funzione misurabile secondo Lebesgue. Definiamo la *norma L^p di u* come segue:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} .$$

Allora, $L^p(\Omega)$ è per definizione lo spazio vettoriale delle funzioni misurabili la cui norma L^p è finita, quozientato rispetto alla relazione di equivalenza

$$u_1 \sim u_2 \Leftrightarrow u_1(x) = u_2(x) \text{ per q.o. } x \in \Omega.$$

Si definiscono anche la norma L^∞ ed il relativo spazio:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{esssup}\{|u(x)| : \; x \in \Omega\} := \inf\{t \in \mathbf{R} : \; m(\{x \in \Omega : \; |u(x)| > t\}) = 0\} .$$

Si tratta sostanzialmente del sup di $|u(x)|$ *a meno di insiemi di misura nulla*. Naturalmente, $L^\infty(\Omega)$ sarà lo spazio delle funzioni con norma finita, quozientato rispetto alla solita relazione di equivalenza.

Gli spazi $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ si possono generalizzare agli spazi $L^p(\mu)$, dove μ è una misura esterna qualunque: la teoria rimane essenzialmente la stessa, e ne parleremo in questo corso quando studieremo qualche complemento di teoria della misura. È interessante osservare che, in questo quadro, gli spazi ℓ^p possono essere visti come caso particolare degli spazi $L^p(\mu)$, quando si scelga come μ un'opportuna misura su $\mathbf{N}$ (la "misura che conta")...

Con queste nuove definizioni, ci siamo messi un po' nei guai: ora dobbiamo mostrare che sono norme sia le norme ℓ^p che le norme L^p!

Lo strumento essenziale per farlo è la disuguaglianza di Hölder:

PROPOSIZIONE (Disuguaglianza di Hölder, in tre diverse incarnazioni): Dato un numero reale $p \in (1, +\infty)$, il suo esponente coniugato q è l'unico numero reale tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Come naturale estensione, l'esponente coniugato di $p = 1$ è $q = +\infty$, e viceversa.

Se p e q sono esponenti coniugati si ha, per ogni coppia di vettori $x, y \in \mathbf{R}^n$, per ogni coppia di successioni reali $\{x_k\}_k$, $\{y_k\}_k$ e per ogni coppia di funzioni misurabili $u, v : \Omega \to \overline{\mathbf{R}}$ (con $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue):

$$(*) \qquad |x \cdot y| \leq |x|_p \, |y|_q,$$

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|\{x_k\}\|_{\ell^p} \, \|\{y_k\}\|_{\ell^q},$$

$$(***) \qquad \int_\Omega |u(x)v(x)| \, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \, \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

DIM.: Affrontiamo dapprima il caso $1 < p < +\infty$: il caso $p = 1,\ q = \infty$ sarà studiato in seguito.

Se a, b sono numeri reali positivi qualunque e q è il coniugato di p, usando la concavità della funzione logaritmo otteniamo:

$$\log(ab) = \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q \leq \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right),$$

da cui

$$(****)\ ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Da questa disuguaglianza seguono facilmente le tre versioni della disuguaglianza di Hölder. Innanzitutto, notiamo che tutte le nostre p-norme e q-norme sono omogenee: moltiplicando l'argomento per $\lambda \in \mathbf{R}$, la norma risulta moltiplicata per $|\lambda|$.

Dimostriamo la (*): se $x, y \in \mathbf{R}^n$, grazie all'omogeneità non è restrittivo supporre $|x|_p = |y|_q = 1$ (basta sostituire x con $x/|x|_p$ e y con $y/|y|_q$). Allora, usando (****):

$$|x \cdot y| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q = 1,$$

e (*) risulta dimostrata. In maniera assolutamente identica dimostriamo anche (**) e (***)[1].

Rimane da vedere il caso limite $p = 1,\ q = +\infty$: la (*) e la (**) sono facilissime e vengono lasciate per esercizio. Per quanto riguarda la (***), possiamo supporre $\|v\|_{L^\infty} < +\infty$ (altrimenti la disuguaglianza è ovvia). Se $t > \|v\|_\infty$, allora $A = \{x \in \Omega :\ |v(x)| > t\}$ ha misura di Lebesgue 0: l'integrale di una qualunque funzione misurabile non negativa su Ω o su $\Omega \setminus A$ hanno lo stesso valore. Allora:

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leq t \int_\Omega |u(x)|\,dx = t\|u\|_{L^1},$$

da cui segue la disuguaglianza voluta facendo tendere t a $\|v\|_\infty$. Q.E.D.

Lezione del 28/4/2006 (2 ore): Dalla disuguaglianza di Hölder segue facilmente che le p-norme sono tali:

[1] I casi in cui una delle due norme vale 0 o $+\infty$ sono ovvi!

TEOREMA: Se $1 \le p \le +\infty$, *gli spazi* $(\mathbf{R}^n, |\cdot|_p)$, $(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$, $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ *sono spazi vettoriali normati.*

DIM.: Le nostre tre "candidate norme" sono evidentemente non negative ed omogenee. Inoltre, sono finite nei nostri spazi e sono non degeneri: quest'ultimo fatto è ovvio per $\mathbf{R}^n$ e ℓ^p, mentre per quanto riguarda $L^p(\Omega)$ è un semplice esercizio verificare che

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx = 0 \Rightarrow u(x) = 0 \textit{ per q.o. } x \in \Omega,$$

per cui la norma L^p è non degenere grazie alla relazione di equivalenza che abbiamo messo sulle funzioni misurabili. Rimane da dimostrare la disuguaglianza triangolare (che in questo caso particolare prende il nome di *disuguaglianza di Minkowski*). Ancora una volta, questa è quasi ovvia nei casi $p = 1$ e $p = +\infty$.

Proviamo la disuguaglianza di Minkowski per $1 < p < +\infty$.

Siano $x, y \in \mathbf{R}^n$: usando la disuguaglianza di Hölder abbiamo

$$\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \le \sum_{k=1}^n |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \le (|x|_p + |y|_p) \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{(p-1)/p},$$

da cui dividendo ambo i membri per $\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{(p-1)/p}$ si ha la disuguaglianza voluta:

$$|x + y|_p \le |x|_p + |y|_p.$$

La disuguaglianza di Minkowski in ℓ^p segue da quella in $\mathbf{R}^n$ passando al limite per $n \to +\infty$: si noti che essa vale anche quando una delle norme è infinita...da cui segue che ℓ^p è uno spazio vettoriale.

Per dimostrare la disuguaglianza di Minkowski per funzioni misurabili u, v, procediamo formalmente come in $\mathbf{R}^n$ usando l'appropriata disuguaglianza di Hölder:

$$\int_\Omega |u+v|^p \le \int_\Omega |u||u+v|^{p-1} + \int_\Omega |v||u+v|^{p-1} \le (\|u\|_p + \|v\|_p) \left(\int_\Omega |u + v|^p \right)^{(p-1)/p}.$$

Per l'ultimo passaggio (la divisione per $\left(\int_\Omega |u + v|^p \right)^{(p-1)/p}$), occorre però sapere che questa quantità è finita non appena lo sono $\|u\|_p$ e $\|v\|_q$: questo segue immediatamente dalla convessità della funzione $s \mapsto s^p$ in quanto

$$\left| \frac{|u(x)| + |v(x)|}{2} \right|^p \le \frac{1}{2}|u(x)|^p + \frac{1}{2}|v(x)|^p.$$

Eseguendo la divisione si ottiene la disuguaglianza voluta. Q.E.D.

A questo punto, occorre dimostrare che gli spazi ℓ^p e $L^p(\Omega)$ con le rispettive norme sono spazi di Banach. Lo facciamo per gli spazi $L^p(\Omega)$...tenendo presente che il teorema si può dimostrare esattamente allo stesso modo per gli spazi $L^p(\mu)$ con μ misura esterna qualunque: il teorema è dunque valido anche per gli spazi ℓ^p.[2]

TEOREMA (di Riesz-Fischer): Sia Ω un sottinsieme misurabile di $\mathbf{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$. Allora gli spazi $L^p(\Omega)$ sono completi. Inoltre, data una successione $\{f_n\}$ convergente ad una funzione f in norma L^p, è possibile estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per quasi ogni $x \in \Omega$.

DIM.: Dimostriamo dapprima il caso $1 \leq p < +\infty$: il caso $p = +\infty$ è diverso (e fortunatamente più facile!) e verrà trattato a parte.

Sia dunque $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$: è allora facile costruire una successione crescente di interi n_k tale che

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Consideriamo poi le funzioni

$$g_K(x) = \sum_{k=1}^{K} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

(dove l'ultima serie ha perfettamente senso perché i suoi termini sono non negativi). Usando la disuguaglianza triangolare e la nostra scelta di n_k vediamo subito che $\|g_K\|_{L^p} \leq 1$ per ogni K. Inoltre, per il teorema di Beppo Levi si ha $\|g_K\|_{L^p} \to \|g\|_{L^p}$, da cui si deduce che $g \in L^p(\Omega)$ e di conseguenza $|g(x)| < +\infty$ per quasi ogni $x \in \Omega$.

Sia ora $h > k$: si ha

$$|f_{n_h}(x) - f_{n_k}(x)| = |\sum_{i=k}^{h-1} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| = |g(x) - g_k(x)|,$$

da cui deduciamo che $f_{n_k}(x)$ è una successione di Cauchy per quasi ogni $x \in \Omega$. Indichiamo con $f(x)$ il limite puntuale (nell'insieme di misura nulla sul quale non c'è convergenza possiamo definire f a piacimento, per esempio $f(x) = 0$).

[2] Per questi ultimi spazi daremo anche una dimostrazione alternativa: mostreremo che essi sono duali di spazi normati, e quindi sono completi grazie al risultato generale che abbiamo dimostrato in precedenza.

Inoltre, dalla disuguaglianza precedente segue subito che

$$|f_{n_h}(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x) \in L^p,$$

e il teorema della convergenza dominata di Lebesgue ci permette di concludere che $f_{n_k} \to f$ in $L^p(\Omega)$. È poi un semplicissimo esercizio verificare che se una successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, in realà *tutta* la successione converge (questo fatto vale in uno spazio metrico qualunque).

Rimane da vedere il caso $p = +\infty$: sia dunque $\{f_n\}$ di Cauchy in L^∞. Per ogni $k \in \mathbf{N}$ esiste un indice n_k tale che $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ per ogni $m, n \geq n_k$. Allora gli insiemi

$$A_k = \{x \in \Omega : |f_n(x) - f_m(x)| > 1/k \textit{ per qualche } m, n \geq n_k\}, \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

hanno tutti misura nulla (per definizione di norma L^∞). Se ne deduce che per ogni $x \in \Omega \setminus A$ la successione $f_n(x)$ è di Cauchy in $\mathbf{R}$, e converge ad un limite $f(x)$ che al solito estendiamo ponendo $f(x) = 0$ per ogni $x \in A$. Passando al limite per $m \to +\infty$ nella disuguaglianza

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1/k \quad \forall x \in \Omega \setminus A, \ \forall m, n \geq n_k$$

si ottiene

$$|f_n(x) - f_(x)| \leq 1/k \quad \forall x \in \Omega \setminus A, \ \forall n \geq n_k,$$

da cui $\|f_n - f\|_\infty \leq 1/k$ per ogni $n > n_k$ e $f_n \to f$ in L^∞.

Per concludere, ci resta l'ultimo asserto sul fatto che la convergenza $f_n \to f$ in L^p implica la convergenza puntuale quasi ovunque di una sottosuccessione. Evidentemente, se f_n converge in L^p è una successione di Cauchy. Il teorema appena dimostrato fornisce una sottosuccessione che converge puntualmente quasi ovunque ed in L^p ad una certa funzione: quest'ultima deve coincidere con f quasi ovunque per l'unicità del limite in L^p. Q.E.D.

Lezione del 2/5/2006 (2 ore): Cominciamo con un'osservazione sul teorema di Riesz-Fischer:

OSSERVAZIONE: Abbiamo visto in classe che, in generale, se $1 \leq p < +\infty$, la convergenza in $L^p(\Omega)$ non implica la convergenza puntuale quasi ovunque di *tutta* la successione. Questa implicazione è invece vera nel caso di L^∞ (e segue dalla nostra dimostrazione del teorema di completezza!).

Un esempio di successione $\{u_i\}$ che converge a 0 il $L^p([0, 1])$ (per ogni $1 \leq p < +\infty$) ma non converge puntualmente in nessun punto dell'intervallo $[0, 1]$ si può costruire come segue: se $i \in [2^k, 2^{k+1} - 1] \cap \mathbf{N}$, poniamo

$$u_i(x) = \mathbf{1}_{[0,2^{-k}]} \left(x - \frac{i - 2^k}{2^k} \right).$$

ESERCIZIO: Si faccia vedere che se Ω ha misura di Lebesgue finita, allora una funzione in $L^p(\Omega)$ appartiene a $L^r(\Omega)$ per ogni $r \in [1, p]$ (cioè gli spazi L^p diventano sempre più piccoli all'aumentare dell'esponente). Si mostri con un esempio che questo non è vero se la misura di Ω è infinita. *[SUGG.: Applicare la disuguaglianza di Hölder al prodotto $|u(x)|^r \cdot 1$, prendendo come esponenti p/r ed il coniugato...]*

La volta scorsa ci siamo ripromessi di studiare esplicitamente i duali degli spazi di successioni ℓ^p. Cominciamo col mostrare una cosa interessante: se $1 \leq p \leq +\infty$ e q è l'esponente coniugato di p, allora una successione $\{y_k\} \in \ell^q$ può essere usata per "fabbricare" un elemento del duale di ℓ^p la cui norma è esattamente uguale a $\|\{y_k\}\|_{\ell^q}$. Vedremo poi che, se $p \neq +\infty$, in realtà *tutti* i funzionali lineari su ℓ^p si possono ottenere in questo modo.

PROPOSIZIONE: Sia $1 \leq p \leq +\infty$, q coniugato a p, $\{y_k\} \in \ell^q$. Definiamo un'applicazione lineare $T_{\{y_k\}} : \ell^p \to \mathbf{R}$ nel modo seguente:

$$(*)\ T_{\{y_k\}}(\{x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k.$$

Allora l'applicazione $\Phi : \{y_k\} \mapsto T_{\{y_k\}}$ è una ben definita isometria lineare di ℓ^q in $(\ell^p)'$.

DIM.: Innanzitutto, dobbiamo verificare che la serie in $(*)$ converge (e quindi l'applicazione $T_{\{y_k\}}$ è ben definita). In effetti, essa converge assolutamente grazie alla disuguaglianza di Hölder:

$$(**)\ \sum_{k=1}^{\infty} |y_k x_k| \leq \|\{y_k\}\|_{\ell^q}\ \|\{x_k\}\|_{\ell^p}.$$

$T_{\{y_k\}}$ è anche evidentemente lineare, ed è limitata grazie alla disuguaglianza appena vista, che mostra che

$$\|T_{\{y_k\}}\|_{(\ell^p)'} \leq \|\{y_k\}\|_{\ell^q}.$$

Mostriamo che l'ultima disuguaglianza è in realtà un'uguaglianza: se $1 < p < +\infty$, facciamo vedere che esiste una successione $\{x_k\} \in \ell^p$ con $\|\{x_k\}\|_{\ell^p} = 1$ e tale che $T_{\{y_k\}}(\{x_k\}) = \|\{y_k\}\|_{\ell^q}$. Se $\{y_k\} \neq \{0\}$ basta infatti definire

$$x_i := \operatorname{sgn}(y_i)|y_i|^{q-1}\|\{y_k\}\|_{\ell^q}^{1-q},\ i = 1, 2, \ldots$$

(la verifica che questa successione svolge il compito che deve svolgere è immediata). Questo si può fare anche se $p = +\infty$: basta definire $x_i = \operatorname{sgn}(y_i)$ per $i = 1, 2, \ldots$.

Se infine $p = 1$, facciamo vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere una successione $\{x_k\}$ con $\|\{x_k\}\|_{\ell^1} = 1$ tale che

$$T_{\{y_k\}}(\{x_k\}) \geq \|\{y_k\}\|_{\ell^\infty} - \varepsilon.$$

Infatti, per definizione di norma ℓ^∞, esiste un indice $\overline{k}$ tale che $|y_{\overline{k}}| \geq \|\{y_k\}\|_{\ell^\infty} - \varepsilon$. Basta allora definire $x_i = 0$ se $i \neq \overline{k}$, $x_{\overline{k}} = \mathrm{sgn}(y_{\overline{k}})$.

A questo punto, abbiamo dimostrato che l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : \ell^1 &\rightarrow (\ell^p)', \\ \{y_k\} &\mapsto T_{\{y_k\}}, \end{aligned}$$

che è evidentemente lineare, conserva anche la norma. Q.E.D.

OSSERVAZIONE/ESERCIZIO: La proposizione precedente vale anche per gli spazi $L^p(\Omega)$, con dimostrazione simile: se $1 \leq p \leq +\infty$ e q è l'esponente coniugato, ad una funzione $v \in L^q(\Omega)$ possiamo associare l'elemento $T_v \in (L^p)'$ definito da

$$T_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Si mostri che $v \mapsto T_v$ è un'isometria lineare tra $L^q(\Omega)$ e $(L^p(\Omega))'$.
SUGG.: Procedere come nella dimostrazione dell'analogo risultato per gli spazi ℓ^p. Un po' diversa è solo la dimostrazione dell'uguaglianza delle norme nel caso $p = 1$, $q = +\infty$. In quel caso, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottinsieme $A \subset \Omega$ tale che $0 < m(A) < +\infty$ e $|v(x)| \geq \|v\|_{L^\infty} - \varepsilon$ per ogni $x \in A$. Si consideri la funzione

$$u(x) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(v(x))/m(A) & \textit{se } x \in A, \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $\|u\|_{L^1} = 1$ e $\int_\Omega u(x)v(x)\,dx \geq \ldots$

Lezione del 4/5/2006 (2 ore): Il seguente teorema, già annunciato, caratterizza completamente il duale di ℓ^p per $1 \leq p < +\infty$: *ogni* funzionale lineare continuo su ℓ^p si rappresenta come $T_{\{y_k\}}$ per un'opportuna successione $\{y_k\} \in \ell^q$. In altre parole, l'isometria Φ definita nella proposizione precedente è un'isomorfismo:

TEOREMA (duale di ℓ^p per $1 \leq p < +\infty$): Se l'esponente p è finito e q è il suo esponente coniugato, l'isometria lineare

$$\Phi : \ell^q \rightarrow (\ell^p)'$$

definita nella proposizione precedente è suriettiva. Essa definisce dunque un isomorfismo isometrico tra ℓ^q e $(\ell^p)'$...che ci permette di dire (con lieve abuso di linguaggio) che il duale di ℓ^p è ℓ^q.

Questo teorema ha una conseguenza abbastanza spettacolare: gli spazi ℓ^q per $1 < q \leq +\infty$ sono (isomorfi e isometrici a) duali di spazi normati. Essi sono quindi tutti spazi di Banach, senza bisogno di riadattare la nostra dimostrazione del teorema di Riesz-Fischer agli spazi di successioni. Rimane fuori dal gioco lo spazio ℓ^1: lo sistemeremo tra poco!

DIM.: Sia $T \in (\ell^p)'$: dobbiamo esibire una successione $\{y_k\} \in \ell^q$ tale che $T = T_{\{y_k\}}$. Siccome deve valere la (*), non è difficile "indovinare" gli elementi della successione cercata: basta infatti porre $\{x_k\} = e^i$, dove $e^i_k = \delta_{ik}$ è la successione che vale 1 al posto i-esimo, 0 altrimenti. Allora, se deve essere vera (*) si deve avere necessariamente

$$y_i = T(e^i), \quad i = 1, 2, 3, \dots .$$

Prendiamo questa come *definizione* della successione $\{y_k\}$: rimane da mostrare che $\{y_k\} \in \ell^q$ e che $T = T_{\{y_k\}}$. Sia

$$Y = \{\{x_k\} \in \ell^p : \ x_k = 0 \ definitivamente\}$$

il sottospazio delle successioni che hanno solo un numero finito di elementi non nulli. È chiaro che tutti gli elementi di Y si ottengono come combinazioni lineari *finite* delle successioni e^i della "base canonica": per linearità se ne deduce che $T(\{x_k\}) = T_{\{y_k\}}(\{x_k\})$ per ogni $\{x_k\} \in Y$. Per concludere la dimostrazione basta osservare che

$$(i) \qquad \|\{y_k\}\|_{\ell^q} = \sup\{\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k : \ \{x_k\} \in Y, \ \|\{x_k\}\|_{\ell^p} \leq 1\}$$

(ii) $\quad$ Y è denso in ℓ^p

(abbiamo "quasi" dimostrato (i) per dimostrare la proposizione precedente... si tratta di fare una piccolissima modifica che lascio per esercizio; anche la (ii) è lasciata come facile esercizio). Da (i) si deduce che $\|\{y_k\}\|_{\ell^q} \leq \|T\|$ (perchè ciascuna delle serie a destra è uguale a $T(\{x_n\})$ quando $\{x_n\} \in Y$, per cui si maggiora con $\|T\|$). La (ii) permette di concludere: se due funzioni continue coincidono su un insieme denso, devono coincidere ovunque! Q.E.D.

OSSERVAZIONE/ESERCIZIO: Si spieghi perché la dimostrazione precedente *non funziona* per $p = +\infty$.

In effetti (ecco l'osservazione...), non tutti gli elementi di $(\ell^\infty)'$ si possono scrivere come $T_{\{y_k\}}$ per qualche successione $\{y_k\} \in \ell^1$. Ecco un esempio: si consideri il sottospazio Y di ℓ^∞ costituito dalle successioni $\{x_k\}$ che ammettono limite per $k \to +\infty$, e definiamo $T(\{x_k\}) = \lim_{k\to+\infty} x_k$ per ogni $\{x_k\} \in Y$. Si vede subito che T è un funzionale lineare su Y, di norma 1 (perché il limite di una successione si maggiora con la norma $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ della stessa. Grazie al teorema di Hahn-Banach, T può essere esteso ad un funzionale limitato definito sull'intero spazio ℓ^∞: chiamiamo ancora T l'estensione. E' abbastanza chiaro che T non può essere rappresentato come in (*) tramite una successione $\{y_k\} \in \ell^1$: come abbiamo visto nella dimostrazione del teorema, dovrebbe essere $y_i = T(e^i) = \lim_{k\to+\infty} e^i_k = 0$ per ogni i, assurdo perché T non è identicamente nullo!

ESERCIZIO: Sia c_0 il sottospazio (chiuso) di ℓ^∞ costituito dalle *successioni che tendono a* 0, normato con la norma di ℓ^∞. Mostrare che ogni funzionale lineare $T \in (c_0)'$ si può rappresentare come in (*) con una successione $\{y_k\} \in \ell^1$. In particolare, ℓ^1 è isomorfo e isometrico al duale dello spazio normato c_0, ed è quindi uno spazio di Banach.

OSSERVAZIONE/ESERCIZIO: Anche il teorema precedente vale anche per gli spazi $L^p(\Omega)$: il duale di $L^p(\Omega)$ è $L^q(\Omega)$ per $1 \le p < +\infty$. La dimostrazione richiede risultati un po' più raffinati di teoria della misura, e la vedremo in seguito.

Invece, anche in questo caso il duale di $L^\infty(\Omega)$ è strettamente più grande di $L^1(\Omega)$. Mostriamo subito un esempio di un funzionale lineare $T \in (L^\infty([-1,1]))'$ per il quale *non esiste* alcuna funzione $v(x) \in L^1([-1,1])$ tale che

$$T(u) = \int_{-1}^{1} uv\,dx \quad \forall u \in L^\infty.$$

Definiamo dapprima T sul sottospazio $C^0([-1,1])$ ponendo $T(u) = u(0)$ per ogni funzione continua u. Questo è un funzionale lineare di norma 1 (verificarlo!), che può essere esteso ad un funzionale di norma 1 definito su tutto lo spazio L^∞ con il teorema di Hahn-Banach. Si verifichi che se per assurdo esistesse v come sopra, essa dovrebbe essere nulla per quasi ogni $x \in [-1,1]$ (Si usi il seguente fatto: data la funzione $\mathrm{sgn}(v(x))$, è possibile costruire una successione di funzioni continue u_h con $u_h(x) \to \mathrm{sgn}(v(x))$ per quasi ogni $x \in [-1,1]$, $u_h(0) = 0$ e $-1 \le u_h(x) \le 1$ per ogni $x \in [-1,1]$. L'esistenza di una tale successione viene da teoremi di approssimazione di funzioni L^p con funzioni regolari, che dimostreremo verso la fine del corso. Si usi poi il teorema della convergenza dominata.). Questo è contraddittorio perché $T \not\equiv 0$.

Nel nostro studio dei duali degli spazi ℓ^p (e $L^p(\Omega)$) abbiamo a volte fatto uso del teorema di Hahn-Banach. È giunto ora il momento di vederne un paio di conseguenze "geometriche" relative alla possibilità di separare insiemi convessi con un iperpiano chiuso.

A questo scopo, si rivela fondamentale la definizione di *funzionale di Minkowski* associato a un convesso:

PROPOSIZIONE (Funzionale di Minkowski): Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato,* C *un sottinsieme aperto e convesso di* X *contenente l'origine. Definiamo il funzionale di Minkowski associato a* C *nel modo seguente:*

$$p(x) = \inf\{t > 0 : \ \frac{x}{t} \in C\}.$$

La funzione $p(x)$ *è una ben definita funzione reale positivamente omogenea e subadditiva*[3]*. Vale inoltre, per un'opportuna costante* $C > 0$,

$$(*)\ p(x) \leq C\|x\| \quad \forall x \in X,$$

e infine

$$(**)\ C = \{x \in X : \ p(x) < 1\}.$$

DIM.: Sia $r > 0$ tale che $B_r(0) \subset C$ (esiste perché C è aperto): per ogni $x \in X$ si ha allora che $r\frac{x}{2\|x\|} \in C$, da cui $p(x) \leq \frac{2}{r}\|x\|$ e la (*) è dimostrata. In particolare, $p(x)$ è sempre finito.

È poi immediato verificare che $p(x)$ è positivamente omogenea. Dimostriamo (**): se $x \in C$, grazie al fatto che C è aperto esiste $r > 0$ tale che $(1+r)x \in C$. Ne segue che $p(x) \leq \frac{1}{1+r} < 1$. Viceversa, se $p(x) < 1$ posso trovare $0 \leq t < 1$ tale che $\frac{x}{t} \in C$. Ma allora $x = t(\frac{x}{t}) + (1-t)0 \in C$ grazie alla convessità di C.

Rimane da provare la subadditività (la disuguaglianza triangolare): Siano $x, y \in X$. Per definizione del funzionale di Minkowski, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C, \quad \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C.$$

Prendiamo una combinazione convessa di questi due punti di C con

$$t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}, \quad (1-t) = \frac{p(y)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}.$$

Ne deduciamo immediatamente (grazie alla convessità di C) che

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C,$$

[3] Si veda l'enunciato del Teorema di Hahn-Banach

da cui

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Grazie all'arbitrarietà di ε otteniamo la subadditività. Q.E.D.

ESERCIZIO: Si mostri che se $C = B_1(0)$ è la palla aperta unitaria del nostro spazio normato, allora $p(x) = \|x\|$.

Lezione del 5/5/2006 (2 ore): Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare la "versione geometrica" del teorema di Hahn-Banach:

TEOREMA (Hahn-Banach, versione geometrica): Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, A, B sottinsiemi convessi disgiunti e non vuoti di X. Allora

(i) Se A è aperto, esistono $T \in X'$, $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che

$$T(x) \leq \alpha \leq T(y) \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y.$$

Geometricamente, possiamo dire che l'iperpiano (affine) chiuso di equazione $T(x) = \alpha$ separa i convessi A e B in senso largo.

(ii) Se A e B sono chiusi e A è anche compatto, allora esistono $T \in X'$, $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\varepsilon > 0$ tali che

$$T(x) \leq \alpha - \varepsilon \ \forall x \in A, \quad \alpha + \varepsilon \leq T(y) \ \forall y \in B.$$

Geometricamente, possiamo dire che l'iperpiano (affine) chiuso di equazione $T(x) = \alpha$ separa i convessi A e B in senso stretto.

.

Per dimostrare il teorema ci serve il seguente

LEMMA: Sia C un convesso aperto e non vuoto di X, $x_0 \in X \setminus C$. Allora esiste $T \in X'$ tale che

$$T(x) < T(x_0) \quad \forall x \in C.$$

DIM.: Scegliamo $\overline{y} \in C$ e poniamo $\tilde{C} = C - \{\overline{y}\}$, $\overline{x} = x_0 - \overline{y}$. A questo punto, $\tilde{C}$ è un aperto convesso contenente l'origine e $\overline{x} \notin C$. Se p è il funzionale di Minkowski associato a $\tilde{C}$, si ha $p(\overline{x}) \geq 1$ mentre $\tilde{C} = \{x : \ p(x) < 1\}$.

Definiamo sul sottospazio unidimensionale $Y = \mathbf{R}\{\overline{x}\}$ il funzionale lineare $T \in Y'$ tale che $T(t\overline{x}) = tp(x)$. Usando la positiva omogeneità del funzionale di Minkowski si vede subito che $T(t\overline{x}) \leq p(t\overline{x})$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.

Per il teorema di Hahn-Banach, possiamo estendere T ad un funzionale lineare definito su tutto X in modo che sia $T(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in X$. Si ha poi $T \in X'$ grazie alla (*) della proposizione precedente.

Abbiamo allora $T(x) < 1$ per ogni $x \in \tilde{C}$, mentre $T(\overline{x}) = p(\overline{x}) \geq 1$. Aggiungendo $\overline{y}$ e usando la linearità di T si deduce che $T(x) < 1 + T(\overline{y})$ per ogni $x \in C$, mentre $T(x_0) \geq 1 + T(\overline{y})$. Q.E.D.

DIM. DEL TEOREMA: Cominciamo a dimostrare (i): poniamo $C = A - B$. È immediato verificare che C è convesso. È poi aperto in quanto esprimibile come unione di aperti: $A - B = \bigcup_{y \in B} (A - \{y\})$.

Applichiamo il lemma con $x_0 = 0$: si noti infatti che $0 \notin C$ perché A e B sono disgiunti. Troviamo $T \in X'$ tale che

$$T(x) < 0 = T(0) \quad \forall x \in C,$$

da cui (linearità di T)

$$T(x) < T(y) \quad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

La prima parte del Teorema è allora provata se poniamo $\alpha = \sup\{T(x) :\ x \in A\}$.

Per provare la (ii), poniamo $A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0)$, $B_\varepsilon = B + B_\varepsilon(0)$. È immediato verificare che si tratta di insiemi aperti convessi.

Dico che $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ per ε abbastanza piccolo: se così non fosse, potremmo trovare una successione $z_n \in A_{\frac{1}{n}} \cap B_{\frac{1}{n}}$. Ora, è possibile scrivere $z_n = a_n + w_n = b_n + w'_n$, con $a_n \in A$, $b_n \in B$ e $\|w_n\| < 1/n$, $\|w'_n\| < 1/n$. Grazie alla compattezza di A e a meno di sottosuccessioni, abbiamo $a_n \to \overline{a} \in A$. Ma allora (visto che $w_n \to 0$ e $w'_n \to 0$) si ha anche $b_n \to \overline{a}$, da cui $\overline{a} \in B$ (per la chiusura di B). Questo è assurdo perché per ipotesi $A \cap B = \emptyset$.

Prendiamo allora ε abbastanza piccolo, e applichiamo la parte (i) del teorema ai convessi A_ε, B_ε: troviamo $T \in X'$ e $\alpha \in \mathbf{R}$ tali che

$$\begin{aligned} T(a + w) &\leq \alpha \quad \forall a \in A,\ w \in B_\varepsilon(0) \\ T(b + w') &\geq \alpha \quad \forall b \in B,\ w' \in B_\varepsilon(0). \end{aligned}$$

Passando al sup su w e all'inf su w' in queste due disuguaglianze si ottiene

$$\begin{aligned} T(a) + \varepsilon\|T\| &\leq \alpha \quad \forall a \in A \\ T(b) - \varepsilon\|T\| &\geq \alpha \quad \forall b \in B. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Ecco un'utile conseguenza di questo teorema "geometrico":

COROLLARIO: Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato,* Y *un suo sottospazio vettoriale. Allora* Y *è denso se e soltanto se ogni funzionale lineare* $T \in X'$ *che si annulla identicamente su* Y *è identicamente nullo.*

DIM.: È ovvio che se Y è denso, un funzionale lineare continuo che si annulli su Y deve essere identicamente nullo.

Viceversa, supponiamo che Y non sia denso, ossia che $\overline{Y}$ sia un sottospazio chiuso proprio di X. Mostriamo che c'è un funzionale lineare non identicamente nullo che si annulla su Y. A questo scopo, prendiamo $x_0 \in X \setminus Y$ e applichiamo l'enunciato (ii) del teorema precedente agli insiemi convessi Y e $\{x_0\}$ (il secondo dei quali è compatto). Esiste allora $T \in X'$ tale che $T(x) < T(x_0)$ per ogni $x \in Y$. Dalla linearità di T e dal fatto che Y è un sottospazio, segue subito che $T \equiv 0$ in Y (un funzionale lineare non nullo non ha MAI immagine superiormente limitata!). Dunque, $T(x) = 0$ per ogni $x \in Y$, mentre $T(x_0) \neq 0$. Q.E.D.

Un altro risultato importante per lo studio del duale di uno spazio normato è il seguente

TEOREMA (di Banach-Steinhaus): Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio di Banach,* $\{T_k\} \subset X'$ *una successione di funzionali lineari continui su* X *che sia puntualmente limitata, cioè tale che*

$$\sup\{|T_k(x)| : k \in \mathbf{N}\} < +\infty \quad \forall x \in X.$$

Allora la successione è uniformemente limitata, ossia esiste $C > 0$ *tale che* $\|T_k\|_{X'} \leq C$ *per ogni* $k \in \mathbf{N}$*.*

Per dimostrare il Teorema di Banach-Steinhaus, useremo il seguente importante risultato:

TEOREMA (di Baire): Sia (X, d) *uno spazio metrico completo. Se esiste una successione* $\{F_k\}$ *di insiemi chiusi in* X *tali che* $X = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} F_k$*, allora qualcuno degli* F_k *ha parte interna non vuota.*

DIM.: Supponiamo per assurdo che gli F_k abbiano tutti parte interna vuota. Scegliamo $x_1 \in X$, $1 > r_1 > 0$ tali che $B_{r_1}(x_1) \cap F_1 = \emptyset$: questo è possibile perché il complementare di F_1 è un aperto non vuoto. A questo punto, notiamo che esistono punti del complementare di F_2 dentro $B_{r_1}(x_1)$ (perché F_2 non ha punti interni): possiamo dunque scegliere x_2, r_2 tali che $B_{r_2}(x_2) \cap F_2 = \emptyset$, $\overline{B_{r_2}(x_2)} \subset B_{r_1}(x_1)$ e $r_2 < 1/2$.

Procedendo in questo modo, possiamo costruire una successione $\{x_k\} \subset X$ e una successione di numeri reali positivi $\{r_k\}$ tali che

$$B_{r_k}(x_k) \cap F_k = \emptyset,\ \overline{B_{r_k}(x_k)} \subset B_{r_{k-1}}(x_{k-1}),\ r_k < 1/k.$$

Grazie al fatto che il raggio di queste palle tende a zero, e per come esse sono "inscatolate", si vede subito che $\{x_k\}$ è una successione di Cauchy e che il suo limite $\overline{x}$ è tale che

$$\overline{x} \in \bigcap_{k \in \mathbf{N}} B_{r_k}(x_k).$$

D'altra parte,

$$\bigcap_{k \in \mathbf{N}} B_{r_k}(x_k) \subset \bigcap_{k \in \mathbf{N}} (F_k)^C = \emptyset,$$

assurdo. Q.E.D.

Vedremo la prossima volta la dimostrazione del Teorema di Banach-Steinhaus.

Lezione del 8/5/2006 (2 ore): L'enunciato del teorema di Baire della volta scorsa può essere leggermente migliorato, come nel seguente esercizio:

ESERCIZIO: Si dimostri la seguente versione migliorata del Lemma di Baire: *In uno spazio metrico completo, intersezione numerabile di aperti densi è un denso.* Basta adattare leggermente la dimostrazione vista la volta scorsa: si noti per prima cosa che un aperto denso è complementare di un chiuso senza punti interni. Sia dunque $\{F_k\}$ una successione di chiusi senza punti interni, e dimostriamo che il complementare della loro unione è denso. Questo equivale a dire che per ogni aperto Ω si ha $\Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathbf{N}} F_k \neq \emptyset$. Per farlo, costruiamo delle successioni x_n, r_n esattamente come nella dimostrazione della volta scorsa, con la sola condizione aggiuntiva che $B_{r_1}(x_1) \subset \Omega$ (il che è possibile perché Ω è aperto).

Passiamo alla dimostrazione del teorema di Banach-Steinhaus:

DIM. del Teorema di Banach-Steinhaus): Poniamo

$$F_k = \{x \in X :\ |T_h(x)| \leq k\ \forall h \in \mathbf{N}\}.$$

Questi insiemi sono chiusi, e la loro unione è tutto X grazie all'ipotesi di limitatezza puntuale. Per il Teorema di Baire, deve esistere un indice $\overline{k} \in \mathbf{N}$ tale che $F_{\overline{k}}$ ha parte interna non vuota. Scegliamo dunque $\overline{x} \in X$, $r > 0$ tali che $B_r(\overline{x}) \subset F_{\overline{k}}$: si ha allora

$$|T_h(\overline{x} + y)| \leq \overline{k} \quad \forall x \in X, \|x\| < r,\ \forall h \in \mathbf{N}.$$

Se poi $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ si ha per ogni h:

$$|T_h(x)| = \frac{2}{r}|T_h\Big(\frac{r}{2}x\Big)| = \frac{2}{r}(|T_h\Big(\overline{x} + \frac{r}{2}x - \overline{x}\Big)| \leq$$
$$\frac{2}{r}\Big(|T_h\Big(\overline{x} + \frac{r}{2}x\Big)| + |T_h(\overline{x})|\Big) \leq \frac{4}{r}\overline{k}.$$

Passando al sup su x si ha la tesi. Q.E.D.

OSSERVAZIONe/ESERCIZIo: Vediamo subito una facile ma importante conseguenza del Teorema di Banach-Steinhaus: se $\{T_k\} \subset X'$ è una successione di funzionali lineari tale che $T_k(x) \to T(x) \in \mathbf{R}$ per ogni $x \in X$ (cioè T_n tende puntualmente ad una certa funzione reale T), allora $T \in X'$ e

$$\|T\| \leq \liminf_{k \to +\infty} \|T_k\|.$$

Si dimostri questo risultato, e si mostri con un esempio che non è detto che $T_k \to T$ in X'. *(L'enunciato è una conseguenza abbastanza diretta del Teorema di Banach-Steinhaus: la linearità di T è ovvia, mentre il teorema consente di dire che i T_k sono equilimitati in norma... dunque il limite puntuale T è limitato. La disuguaglianza sulle norme è una facile conseguenza. Infine, per il controesempio richiesto si consideri lo spazio ℓ^2 e la successione (di successioni) e^k costituita dai vettori della base canonica, vista come elemento del duale di ℓ^2...)*

Vedremo tra breve un paio di altre spettacolari conseguenze del Teorema di Banach-Steinhaus.

Per parlare della prima di esse, è però necessario un paio di concetti fondamentali: quelli di spazio biduale e di spazio riflessivo.

DEFINIZIONE (biduale, spazio di Banach riflessivo): Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Indichiamo con X'' il suo *biduale*, ossia lo spazio vettoriale dei funzionali lineari e continui sul duale X'.

Come forse ci è già noto dal corso di algebra lineare, esiste un modo canonico di vedere un elemento $x \in X$ come elemento del biduale. Precisamente, associamo ad x il funzionale $S_x : X' \to \mathbf{R}$ definito da

$$S_x(T) = T(x) \quad \forall T \in X'.$$

La mappa $J : X \to X''$ che manda x in S_x è un'*isometria lineare*: infatti, come conseguenza del Teorema di Hahn-Banach, abbiamo visto che si può scrivere

$$\|x\| = \max\{T(x) : \; T \in X', \; \|T\|_{X'} \leq 1\} \quad \forall x \in X,$$

da cui $\|x\| = \|S_x\|_{X''}$.

In dimensione finita, la mappa J è un isomorfismo (canonico) tra X e X''. In dimensione infinita, invece, può essere che $J(X)$ sia un sottinsieme proprio di X''. Uno spazio normato si dice *riflessivo* se $J(X) = X''$ (ossia se lo spazio "coincide col suo biduale").

Grazie al nostro studio dettagliato degli spazi ℓ^p, non è difficile vedere che ℓ^1 e ℓ^∞ non sono riflessivi, mentre gli spazi ℓ^p lo sono per $1 < p < +\infty$.

La riflessività, come la *separabilità*[4] giocano un ruolo essenziale nella teoria delle topologie deboli.

L'immersione di X nel suo biduale ci consente di ottenere un'altra conseguenza molto interessante del Teorema di Banach-Steinhaus:

OSSERVAZIONE/ESERCIZIO: Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach, A un suo sottinsieme. Allora A è limitato se e soltanto se, per ogni $T \in X'$, l'immagine $T(A)$ è un sottinsieme limitato di $\mathbf{R}$. (*SUGG.: È ovvio che se A è limitato allora $T(A)$ è limitata per ogni $T \in X'$. Viceversa, basta far vedere che ogni successione $\{x_n\} \subset A$ tale che $\{T(x_n)\}$ è limitata per ogni $T \in X'$, è limitata in norma. Per avere questo risultato basta applicare il Teorema di Banach-Steinhaus alla successione $S_{x_n} \in X''$: essa è puntualmente limitata per ipotesi, per cui deve essere limitata in norma. Possiamo allora concludere perchè $\|x_n\| = \|S_{x_n}\|_{X''}$.*)

OSSERVAZIONE: Vediamo ora come un risultato "astratto" come il Teorema di Banach-Steinhaus possa avere delle applicazioni molto concrete: motriamo che *esistono delle funzioni continue e 2π-periodiche la cui serie di Fourier non converge in tutti i punti.*

Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e 2π-periodica, ricordiamo che la sua serie di Fourier è data da

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

Un noto teorema di convergenza afferma che se f è di classe C^1, allora la serie di Fourier converge in ogni punto a $f(x)$ (e converge anche uniformemente). Le ipotesi del teorema sembrano però "eccessive": per calcolare i coefficienti di Fourier non c'è certo bisogno della derivabilità! Mostriamo però che se f è soltanto C^0, non è detto che ci sia convergenza puntuale in tutti i punti.

[4] *Uno spazio metrico si dice separabile se ha un sottinsieme denso numerabile.*

Per farlo, occorre sapere che per la ridotta parziale N-esima della serie di Fourier di f vale la formula seguente:

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})(y - x))}{2\sin((y - x)/2)} f(y)\ dy$$

(si vedano per esempio i miei appunti del corso di Analisi 3UD, a.a. 2004-2005).

Facciamo vedere che esistono funzioni continue e periodiche per cui non è vero che $f_N(0) \to f(0)$, cioè per cui la serie di Fourier non converge nell'origine. A questo scopo, consideriamo lo spazio di Banach $X = C^0(2\pi)$ delle funzioni continue e 2π-periodiche, dotato della solita norma $\|\cdot\|_\infty$. Se definiamo

$$T_N : f \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})y)}{2\sin(y/2)} f(y)\ dy,$$

i funzionali T_N sono elementi ben definiti di $(L^\infty(2\pi))'$, e quindi anche di X' (perchè X è un sottospazio chiuso di L^∞). Inoltre, se poniamo

$$g_N(y) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})y)}{2\sin(y/2)},$$

si può verificare che $\|T_N\|_{X'} = \|g_N\|_{L^1([-\pi,\pi])}$.[5]

Ora, per come abbiamo costruito i funzionali si ha $f_N(0) = T_N(f)$. Se fosse vero che $f_N(0) \to f(0)$ per ogni $f \in X$, in particolare dovremmo avere

$$\sup_N |T_N(f)| < +\infty \quad \forall f \in X.$$

Il teorema di Banach-Steinhaus ci permetterebbe allora di concludere che le norme dei funzionali T_N sono equilimitate: peccato che questo sia falso, perché $\|g_N\|_{L^1} \to +\infty$ per $N \to +\infty$.[6]

Lezione del 9/5/2006 (2 ore): Per concludere la nostra analisi generale degli spazi di Banach, vogliamo occuparci del problema della compattezza. In dimensione finita, la relativa abbondanza di insiemi compatti (tutti i chiusi

[5]E' ovvio che T_N ha la norma indicata come elemento del duale di L^∞, per cui $\|T_n\|_{X'} \leq \|g_N\|_{L^1}$. D'altra parte, è possibile trovare una successione σ_k di funzioni continue e periodiche tali che $\lim\limits_{k\to+\infty} \sigma_k(x) \to \mathrm{sgn}(g_N(x))$ per q.o. $x \in [-\pi, \pi]$ e tali che $\|\sigma_k\|_\infty \leq 1$. Il teorema della convergenza dominata permette di affermare che $T_N(\sigma_k) \to \|g_N\|_{L^1}$, da cui la tesi.

[6]Con un cambio di variabile e ricordando che $|\sin t| \leq |t|$, ci si riconduce alla non sommabilità della funzione $\frac{\sin t}{t}$ sulla semiretta $[1, +\infty)$.

limitati di $\mathbf{R}^n$ lo sono!) ci ha permesso di dimostrare parecchi teoremi. In dimensione infinita, invece, non tutti i chiusi limitati sono compatti:

TEOREMA: Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Allora la dimensione di X è finita se e solo se la palla chiusa unitaria

$$\overline{B} = \{x \in X : \ \|x\| \leq 1\}$$

è compatta.

Per dimostrare il Teorema, ci serve il seguente risultato:

LEMMA (Riesz): Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, Y un suo sottospazio chiuso proprio. Allora esiste $\overline{x} \in X$ con $\|x\| = 1$ e $\operatorname{dist}(\overline{x}, Y) > 1/2$.

DIM.: Prendiamo un punto $x_0 \in X \setminus Y$. Siccome Y è chiuso, la distanza δ tra x_0 e Y è positiva. Inoltre, per definizione di distanza, esiste certamente $y_0 \in Y$ tale che $\|x_0 - y_0\| < 2\delta$. Poniamo

$$\overline{x} = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}.$$

È chiaramente $\|\overline{x}\| = 1$, e se inoltre $y \in Y$ si ha:

$$\|\overline{x} - y\| = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \|x_0 - (y_0 + y\|x_0 - y_0\|)\| < 1/2,$$

dove si è usato il fatto che $y_0 + y\|x_0 - y_0\| \in Y$. Q.E.D.

DIM. del Teorema: È chiaro che se X ha dimensione finita, allora la palla unitaria chiusa è compatta: possiamo ricondurci sempre a $X = \mathbf{R}^n$ con una norma, che sappiamo sarà equivalente a quella euclidea...

Ne segue che la palla chiusa della norma è anche un chiuso limitato euclideo, e dunque è un compatto (sia euclideo che nella norma di partenza!).

Viceversa, supponiamo che X abbia dimensione infinita. Possiamo allora costruire una successione crescente di sottospazi $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \ldots$ in modo tale che $\dim(Y_k) = k$, $k = 1, 2, \ldots$

Fissiamo $x_1 \in Y_1$, $\|x_1\| = 1$. Per il Lemma di Riesz con $X = Y_2$ e $Y = Y_1$, troviamo $x_2 \in Y_2$ con $\|x_2\| = 1$ e $\operatorname{dist}(x_2, Y_1) > 1/2$.

Continuando in questo modo troviamo una successione $\{x_k\}$ tale che $\|x_k\| = 1$, $x_k \in Y_k$ e $\operatorname{dist}(x_k, Y_{k-1}) > 1/2$. Abbiamo così costruito una successione a valori in X, tutta costituita da elementi di norma 1, i cui elementi distano l'uno dall'altro più di $1/2$. Una tale successione non ha evidentemente alcuna sottosuccessione di Cauchy: la palla unitaria chiusa non è quindi compatta. Q.E.D.

Una caratterizzazione efficace dei compatti in uno spazio metrico (e quindi in uno spazio di Banach) è data dal teorema che segue. Premettiamo una definizione:

DEFINIZIONE (Totale limitatezza): Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottinsieme $K \subset X$ si dice *totalmente limitato* se, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile ricoprire K con un *numero finito* di palle di raggio ε.

TEOREMA: Sia (X, d) uno spazio metrico, $K \subset X$. Allora K è compatto se e soltanto se è completo e totalmente limitato.

Inoltre, un sottinsieme K totalmente limitato di uno spazio metrico completo X è relativamente compatto: da ogni successione a valori in K possiamo estrarre una sottosuccessione convergente in X.

DIM.: Sappiamo gi'a che, in uno spazio metrico, compattezza per ricoprimenti e compattezza per successioni sono la stessa cosa.

Supponiamo dunque che K sia compatto: mostriamo che è completo e totalmente limitato. Per quanto riguarda la completezza, sia $\{x_k\} \subset K$ una successione di Cauchy. Per compattezza, essa ha una sottosuccessione convergente ad un punto $\overline{x} \in K$. Ma abbiamo già osservato che quando una successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, in realtà *tutta* la successione converge!

Mostriamo la totale limitatezza: scelto $\varepsilon > 0$, consideriamo la famiglia di palle aperte $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in K}$. Questo è un ricoprimento aperto di K: per compattezza, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito...che ci darà un numero finito di palle di raggio ε che ricopre K.

Viceversa, supponiamo che K sia completo e totalmente limitato e sia $\{x_k\} \subset K$ una successione a valori in K: mostriamo che è possibile estrarre una sottosuccessione che converge ad un punto di K.

Per la totale limitatezza è possibile ricoprire K con un numero finito di palle aperte di raggio 1. Necessariamente, dentro una di queste, che chiameremo B_1, cadranno infiniti elementi della successione. Sia $\{x_k^{(1)}\}$ la sottosuccessione di $\{x_k\}$ costituita dagli elementi che cadono dentro B_1.

Ricopriamo poi K con un numero finito di palle di raggio $1/2$: dentro una di queste, detta B_2, cadranno infiniti elementi di $\{x_k^{(1)}\}$. Sia $\{x_k^{(2)}\}$ la sottosuccessione di $\{x_k^{(1)}\}$ costituita dagli elementi che cadono entro B_2.

Procediamo poi allo stesso modo, ricoprendo con palle di raggio $1/3$, $1/4$...

Costruiamo così per induzione una successione di sottosuccessioni tali che $\{x_k^{(n)}\}$ è caratterizzata dal fatto di essere una sottosuccessione di $\{x_k^{(n-1)}\}$ e dal fatto che i suoi elementi sono contenuti in una palla di raggio $1/n$.

Prendiamo infine la *sottosuccessione diagonale* definita da $\tilde{x}_k = x_k^{(k)}$ (cioè il k-esimo elemento della successione diagonale è il k-esimo elemento della k-esima sottosuccessione.

La successione $\{\tilde{x}_k\}$ ha la proprietà di essere una sottosuccessione di $\{x_k^{(n)}\}$ per $k \geq n$: in particolare, essa è una sottosuccessione di $\{x_k\}$, ed è evidentemente di Cauchy (perchè dall'n-esimo termine in poi è tutta contenuta in una palla di raggio $1/n$, e questo vale per ogni n). Dunque $\tilde{x}_k \to \overline{x} \in K$ grazie alla completezza, come volevasi.

La dimostrazione appena vista funziona anche se è X ad essere completo, mentre K è solo totalmente limitato: in tal caso, possiamo solo dire che $\overline{x} \in X$. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Una conseguenza di questa caratterizzazione dei compatti è la seguente: un compatto in uno spazio normato ha la proprietà che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un sottospazio di dimensione finita Y_ε da cui tutti gli elementi di K distano meno di ε. Infatti, per la totale limitatezza, possiamo trovare un numero finito di palle $B_\varepsilon(x_1)$,...,$B_\varepsilon(x_N)$ che ricoprono K. Basta allora definire $Y_\varepsilon = \text{span}\{x_1, \dots, x_N\}$.

In conclusione, in dimensione infinita i compatti sono abbastanza "smilzi", e le palle chiuse si guardano bene dall'essere compatte. In particolare, non è vero che da una successione limitata in norma si può estrarre una sottosuccessione convergente!

È per questo che ci si è inventati il concetto di *convergenza debole*: se siamo in uno spazio di Banach "decente", da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione debolmente convergente. Vediamo la definizione:

DEFINIZIONE: Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Si dice che una successione $\{x_k\} \subset X$ *converge debolmente* a $\overline{x} \in X$, e si scrive $x_k \rightharpoonup \overline{x}$, se e soltanto se

$$T(x_k) \to T(\overline{x}) \quad \forall T \in X'.$$

ESEMPI/OSSERVAZIONI/ESERCIZI: Osserviamo per prima cosa che una successione convergente in norma converge anche debolmente (grazie alla continuità di ogni $T \in X'$): la *convergenza forte* implica la *convergenza debole*.

In dimensione finita, convergenza forte (cioè convergenza in norma) e convergenza debole coincidono: infatti una successione in $\mathbf{R}^n$ converge se e solo se convergono le sue componenti.

In generale, invece, in dimensione infinita la convergenza forte e la convergenza debole non sono la stessa cosa: vedremo fra un attimo che in uno spazio riflessivo esistono sempre successioni debolmente convergenti che *non* convergono in norma.

Per fare un po' di esempi espliciti, possiamo usare gli spazi ℓ^p e $L^p(\Omega)$, per i quali conosciamo alla perfezione il duale!

Se $1 \le p < +\infty$, consideriamo per ogni $n \in \mathbf{N}$ un elemento $x^n = \{x^n_k\}_k \in \ell^p$. Per definizione, abbiamo che $x^n \rightharpoonup \overline{x} = \{\overline{x}_k\}_k$ in ℓ^p se e solo se per ogni $T \in (\ell^p)'$ si ha $T(x^n) \to T(\overline{x})$, ossia (grazie alla caratterizzazione del duale) se e soltanto se

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x^n_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x}_k y_k \quad \forall \{y_k\} \in \ell^q.$$

Per esempio, la successione e^n dei "vettori della base canonica" in ℓ^p (cioè e^n è l'elemento di ℓ^p il cui n-esimo termine vale 1, mentre tutti gli altri valgono 0), allora $e^n \rightharpoonup 0$ in ℓ^p per $1 < p < +\infty$, mentre e^n non converge debolmente a nulla in ℓ^1.

Lezione del 11/5/2006 (2 ore): La convergenza in $L^p(\Omega)$ si caratterizza in maniera analoga a quella negli spazi di successioni: data $\{u_k\} \subset L^p(\Omega)$ (sempre con $1 \le p < +\infty$), avremo che $u_k \rightharpoonup u$ in L^p se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_k(x)v(x)\,dx = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in L^q(\Omega).$$

L'utilità della convergenza debole viene in gran parte dal seguente

TEOREMA (Banach-Alaoglu): Se X è uno spazio di Banach riflessivo, la palla unitaria chiusa è debolmente (sequenzialmente) compatta. In altre parole, da ogni successione limitata in norma è possibile estrarre una sottosuccessione debolmente convergente ad un elemento di X.

Non dimostreremo questo teorema, se non (a suo tempo) nel caso particolare in cui X è uno spazio di Hilbert separabile.

OSSERVAZIONE: Se $\{x_n\} \subset X$ (con X di Banach) è una successione tale che $x_n \rightharpoonup x$, allora $\sup\{\|x_n\| : n \in \mathbf{N}\} < +\infty$: ogni successione debolmente convergente è limitata in norma. Infatti, per la definizione stessa di convergenza debole, $\{T(x_n)\}$ è un insieme limitato in $\mathbf{R}$ per ogni $T \in X'$: abbiamo visto che questo implica che $\{x_n\}$ è limitata in norma (come conseguenza del Teorema di Banach-Steinhaus).

OSSERVAZIONE: In uno spazio di Banach riflessivo di dimensione infinita esistono sempre successioni debolmente convergenti che non convergono in norma. Infatti, abbiamo visto che la palla unitaria chiusa non è fortemente compatta: esiste una successione di elementi di norma 1 che non ha sottosuccessioni convergenti in norma. D'altra parte, il teorema di Banach-Alaoglu assicura che esiste una sottosuccessione debolmente convergente!

ESERCIZIO: Sia X uno spazio di Banach, $C \subset X$ un insieme convesso e fortemente chiuso (cioè chiuso nella topologia indotta dalla norma). Allora C è debolmente sequenzialmente chiuso: se $\overline{x} \in X$ è limite debole di una successione a valori in C, allora $\overline{x} \in C$. *(SUGG.: Sia infatti $x_n \rightharpoonup \overline{x}$, con $\{x_n\} \subset C$. Se per assurdo $\overline{x} \notin C$ potremmo applicare la seconda conseguenza geometrica del Teorema di Hahn-Banach ai convessi $\{\overline{x}\}$ (compatto) e C (chiuso): esiste $T \in X'$, $\varepsilon > 0$ tale che $T(x) < T(x_0) - \varepsilon$ per ogni $x \in C$...)*

ESERCIZIO: Se X è uno spazio di Banach e $F : X \to \mathbf{R}$ è una funzione convessa e continua, allora F è (sequenzialmente) debolmente semicontinua inferiormente: per ogni successione $x_n \rightharpoonup \overline{x}$ si ha $F(\overline{x}) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(x_n)$. *(SUGG.: I sottolivelli di F sono chiusi convessi...)*

ESERCIZIO: Se X è uno spazio di Banach riflessivo, C un convesso chiuso e $x_0 \in X$, mostrare che esiste un elemento di C di distanza minima da x_0. *(SUGG.: Sia $\{y_n\} \subset C$ una successione tale che $\|x_0 - y_n\| \to$* $\mathrm{dist}(x_0, C)$. *Evidentemente la nostra successione è limitata in norma: il teorema di Banach-Alaouglu garantisce allora che esiste una sottosuccessione debolmente convergente ad un punto $\overline{y}$. Il penultimo esercizio ci assicura che $\overline{y} \in C$, mentre l'ultimo applicato alla funzione convessa $y \mapsto \|x_0 - y\|$ permette di concludere che $\overline{y}$ è il punto di distanza minima cercato.)*

ESERCIZIO: Se lo spazio di Banach X non è riflessivo, il risultato dell'esercizio precedente può essere falso. Si consideri infatti lo spazio $C^0([0,1])$ con la norma uniforme, e l'insieme

$$C = \{u \in C^0([0,1]) : \int_0^{1/2} u(x)\,dx - \int_{1/2}^1 u(x)\,dx = 1\}.$$

Questo è un chiuso convesso, e l'estremo inferiore delle norme dei suoi elementi è 1. D'altra parte, non esiste alcun elemento di C che ha norma 1: non c'è un punto di C di distanza minima dall'origine!

ESERCIZIO: Nello spazio ℓ^1 (che non è riflessivo!) ogni successione debolmente convergente è anche fortemente convergente. Si tratta di un esempio davvero patologico, e la dimostrazione non è affatto semplice!

Evidentemente, ci si può ridurre al caso di una successione $\{x^n\} \subset \ell^1$ con $x^n \rightharpoonup 0$. Per quanto visto prima, $\|x^n\|_{\ell^1} \leq C$ per ogni n (la successione è limitata in norma). Dobbiamo mostrare che in realtà $\|x^n\|_{\ell^1} \to 0$. Supponiamo per assurdo che questo non sia vero: a meno di estrarre una sottosuccessione, questo implica che $\|x^n\|_{\ell^1} \geq c > 0$ per ogni n. Mostriamo che questo ci permette di estrarre un'ulteriore sottosuccessione che *non* converge debolmente a 0, il che è assurdo.

Innanzitutto, se è $x^n = \{x^n_k\}_k$, allora deve essere

$$\lim_{n\to+\infty} x^n_{\overline{k}} = 0 \quad \forall \overline{k} \in \mathbf{N} :$$

la convergenza debole a 0 implica la convergenza a 0 di tutte le componenti (basta applicare la definizione di convergenza debole con $\{y_k\} = e^{\overline{k}}$). Dunque, per ogni fissato $N \in \mathbf{N}$ si ha anche

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} |y^n_k| = 0.$$

Usando questo fatto e la definizione di serie, vediamo che è possibile scegliere una successione strettamente crescente di numeri naturali $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ ed una sottosuccessine di x^n (che denoteremo ancora con x^n) in modo che

$$\sum_{k=k_n+1}^{k_{n+1}} |x^n_k| \geq \frac{3}{4}\|x^n\|_{\ell^1},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Definiamo ora una successione $\{y_k\} \in \ell^\infty$ nel modo seguente: se $k_n + 1 \leq k \leq k_{n+1}$, allora $y_k = \mathrm{sgn}(x^n_k)$. Allora, per ogni fissato n, si ha

$$T_{\{y_k\}}(x^n) = \sum_{k=k_n+1}^{k_{n+1}} |x^n_k| + \sum_{altri\ \ k} x^n_k y_k \geq \frac{3}{4}\|x^n\|_{\ell^1} - \frac{1}{4}\|x^n\|_{\ell^1} \geq \frac{1}{2}c.$$

Questa successione evidentemente non tende a zero per $n \to +\infty$, il che contraddice la convergenza debole di x^n a 0.

Oltre al teorema di Banach-Alaouglu che garantisce la compattezza debole, esistono in commercio anche dei teoremi che caratterizzano i compatti in norma. Il prototipo è il seguente

TEOREMA (Ascoli-Arzelà): Sia $u_n : A \to B$ una successione di funzioni continue, con A e B spazi metrici compatti. Se la successione u_n è equicontinua, cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x, y \in A$ e $d_A(x, y) < \delta$ implica $d_B(u_n(x), u_n(y)) < \varepsilon$ per ogni n, allora u_n ha una sottosuccessione che converge uniformemente ad una funzione continua $u : A \to B$.

DIM.: Vediamo la dimostrazione a grandi linee: i dettagli sono lasciati per esercizio. Innanzitutto, l'insieme $C^0(A, B)$ delle funzioni continue da A in B diventa uno spazio metrico completo con la distanza uniforme $d(u, v) = \sup\{d_b(u(x), v(x)) : \ x \in A\}$. Per dimostrare il teorema basta far vedere che $\mathcal{F} = \{u_n : \ n \in \mathbf{N}\}$ è un sottinsieme totalmente limitato di $C^0(A, B)$. Preso $\varepsilon > 0$, si applichi la totale limitatezza di B per scrivere $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N$, con B_j palle di raggio $\varepsilon/4$. Si usi poi l'equicontinuità per trovare δ tale che $d_A(x, y) < \delta$ implichi $d_B(u_n(x), u_n(y)) < \varepsilon/4$, e poi la totale limitatezza di A per scrivere $A = A_1 \cup \ldots \cup A_M$, con A_i palle di raggio δ e centro a_i.

Per ogni multiindice $(j_1, j_2, \ldots j_M) \in \{1, 2, \ldots, N\}^M$ (ce ne sono un numero finito) si consideri l'insieme di funzioni

$$\mathcal{W}_{(j_1,j_2,\ldots j_M)} = \{u \in \mathcal{F} : \ f(a_i) \in B_{j_i}, \ i = 1, \ldots, M\}.$$

Ciascun elemento della successione appartiene ovviamente ad uno di questi insiemi. Inoltre, se non è vuoto, ciascuno di questi insiemi ha diametro minore di $\varepsilon/2$, ed è quindi contenuto in una palla di raggio ε: se infatti $u, v \in \mathcal{W}_{(j_1,j_2,\ldots j_M)}$ e $x \in A$, scegliamo i tale che $x \in A_i$. Usando la disuguaglianza di equicontinuità si ha allora $d_B(u(x), v(x)) \leq d_B(u(x), u(a_i)) + d_B(u(a_i), v(a_i)) + d_B(v(a_i), v(x)) < \varepsilon$. Siamo dunque riusciti a coprire $\mathcal{F}$ con un numero finito di palle di raggio ε. Q.E.D.

Lezione del 15/5/2006 (2 ore): In questa lezione vogliamo cominciare ad occuparci della teoria degli spazi di Hilbert. Prima di darne la definizione, abbiamo bisogno di introdurre il concetto di prodotto scalare e di norma indotta da un prodotto scalare.

DEFINIZIONE: Sia X uno spazio vettoriale reale. Un *prodotto scalare* su X è un'applicazione

$$\begin{aligned} < \cdot, \cdot >: X \times X &\to \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto < x, y > \end{aligned}$$

che sia bilineare (cioè lineare in ciascuno dei due argomenti x e y), simmetrica (cioè $< x, y >=< y, x >$ per ogni x, y) e definita positiva (cioè $< x, x >\geq 0$, con l'uguaglianza se e solo se $x = 0$).

Un prodotto scalare su X può essere usato per definire una norma nel modo seguente:

$$\|x\| :=< x, x >^{1/2} .$$

Naturalmente, bisogna verificare che la norma indotta da un prodotto scalare è proprio una norma. Questa è una delle conseguenze della seguente proposizione, che raccoglie alcuni fatti elementari ma fondamentali sui prodotti scalari:

PROPOSIZIONE: Sia $< \cdot,\cdot >$ *un prodotto scalare su* X*,* $\|\cdot\|$ *la norma da esso indotta. Allora valgono i fatti seguenti*

(i) Per ogni $x, y \in X$ *vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$< x, y > \leq \|x\| \, \|y\|;$$

(ii) La norma indotta dal prodotto scalare è una norma;

(iii) Vale l'identità del parallelogramma:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in X;$$

(iv) Vale l'identità di polarizzazione:

$$< x, y > = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \forall x, y \in X.$$

DIM.: Se $x, y \in X$ e $t \in \mathbf{R}$ si ha:

$$0 \leq \|ty + x\|^2 = < ty + x, ty + x > = t^2\|y\|^2 + 2t < x, y > + \|x\|^2.$$

Ora, se questo polinomio di secondo grado in t è sempre positivo, il suo discriminante deve essere minore o uguale a zero: questa è esattamente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, e (i) è dimostrato.

Proviamo (ii): innanzitutto, si vede subito che la norma è omogenea e non degenere. Rimane allora da verificare la disuguaglianza triangolare: per ogni x, y si ha, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}&\|x + y\|^2 = < x + y, x + y > = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \leq \\ &\|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Le identità (iii) e (iv) si dimostrano banalmente espandendo i prodotti scalari che definiscono le norme coinvolte. La (iii) si chiama *identità del parallelogramma* perché se si interpretano i vettori x e y come lati di un parallelogramma, allora $x+y$ e $x-y$ ne rappresentano le diagonali: l'identità è dunque una generalizzazione di un noto risultato di geometria euclidea. Q.E.D.

L'identità del parallelogramma caratterizza le norme che "provengono" da un prodotto scalare:

PROPOSIZIONE: Sia $(X, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato. Allora l'applicazione*

$$a(x, y) :== \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad x, y \in X$$

è un prodotto scalare che induce la norma data se e solo se la norma verifica l'identità del parallelogramma.

DIM.: Abbiamo già visto che se la norma proviene da un prodotto scalare, allora vale l'identità del parallelogramma e il prodotto scalare si scrive come sopra grazie all'identità di polarizzazione. Viceversa, supponiamo che valga l'identità del parallelogramma e definiamo $a(x, y)$ come nell'enunciato. È allora evidente che questa funzione è simmetrica, che $a(x, x) = \|x\|^2 \geq 0$ con l'uguaglianza se e solo se $x = 0$. Inoltre, $a(x, 0) = a(0, y) = 0$. È anche immediato verificare che la funzione è continua.

Prendiamo poi $x_1, x_2, y \in X$: allora, usando l'identità del parallelogramma

$$(*) \qquad a(x_1, y) + a(x_2, y) = \frac{1}{4}(\|x_1+y\|^2 - \|x_1-y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_2-y\|^2) =$$
$$\frac{1}{8}(\|x_1+x_2+2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2 - \|x_1+x_2-2y\| - \|x_1-x_2\|^2) =$$
$$\frac{1}{2}a(x_1+x_2, 2y).$$

In particolare, se prendiamo $x_1 = x$, $x_2 = 0$, l'ultima identità diventa

$$(**) \ a(x, y) = \frac{1}{2}a(x, 2y) \quad \forall x, y.$$

Applicando (**) entro (*) otteniamo allora

$$a(x_1, y) + a(x_2, y) = a(x_1 + x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y.$$

Usando ancora l'additività si ottiene facilmente che $a(mx, y) = m\, a(x, y)$ per ogni $m \in \mathbf{Z}$. Allora, grazie a (**) e alla simmetria:

$$a(\frac{m}{2^n}x, y) = \frac{m}{2^n}a(x, y) \quad \forall x, y \in X, \ \forall m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}.$$

L'insieme dei razionali binari, ossia dei numeri della forma $m/2^n$, è denso in $\mathbf{R}$: grazie alla continuità di a possiamo allora concludere che $a(tx, y) =$

$ta(x,y)$ per ogni $x,y \in X$ e per ogni $t \in \mathbf{R}$: questo conclude la dimostrazione che $a(x,y)$ è un prodotto scalare. Q.E.D.

DEFINIZIONE (Spazio di Hilbert): Uno spazio vettoriale reale X, dotato di un prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ si dice *di Hilbert* se è di Banach rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare.

ESEMPI: Tipici prototipi di spazi di Hilbert sono ℓ^2 col prodotto scalare $< \{x_k\}, \{y_k\} >:= \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ e $L^2(\Omega)$ col prodotto scalare $< u, v >:= \int_\Omega u(x)v(x)\, dx$.

Il risultato che segue è una versione rafforzata di un risultato che abbiamo visto la volta scorsa in uno spazio di Banach riflessivo (in uno degli esercizi). La dimostrazione che ne daremo questa volta è però indipendente dal Teorema di Banach-Alaouglu.

TEOREMA (di proiezione su un convesso chiuso): Sia X uno spazio di Hilbert, C un sottinsieme chiuso, convesso e non vuoto di X, $x_0 \in X$. Allora esiste un unico punto $\overline{y} \in C$ tale che $\|x_0 - \overline{y}\| = \mathrm{dist}(x_0, C)$.

DIM.: Tramite una traslazione, possiamo sempre ridurci al caso in cui $x_0 = 0$: si tratta dunque di dimostrare che in C esiste un unico elemento di norma minima. Sia dunque $\delta = \inf\{\|y\| : \ y \in C\}$, e sia $\{y_n\} \subset C$ una successione tale che $\|y_n\| \to \delta$ (una tale successione esiste per definizione di estremo inferiore!).

Dimostriamo che $\{y_n\}$ è di Cauchy in X: a questo scopo, si prenda l'identità del parallelogramma con $x/2$, $y/2$ al posto di x, y... Con facili conti si arriva all'identità

$$\|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - 4\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2,$$

valida per ogni $x, y \in X$. Si noti inoltre che, se x e y appartengono a C, allora $\frac{x+y}{2} \in C$: dall'identità appena provata e dalla definizione di δ abbiamo allora

$$(***) \qquad \|y_n - y_m\|^2 = 2(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) - 4\left\|\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \leq 2(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) - 4\delta^2.$$

L'ultima quantità tende a zero per $m, n \to +\infty$, per cui la successione $\{y_n\}$ è di Cauchy e tende a un qualche punto $\overline{y} \in X$. Essendo C chiuso, $\overline{y} \in C$. Inoltre, $\|\overline{y}\| = \delta$ per la continuità della norma: $\overline{y}$ è il punto di norma minima cercato.

Rimane da verificare che questo punto di norma minima è unica: se fosse anche $\|\tilde{y}\| = \delta$ per qualche $\tilde{y} \in C$, applichiamo la disuguagluglianza (***) con $y_n = \overline{y}$, $y_m = \tilde{y}$ e troviamo

$$\|\overline{y} - \tilde{y}\| \leq 0,$$

da cui $\overline{y} = \tilde{y}$. Q.E.D.

COROLLARIO: Sia Y un sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert X, $x_0 \in X$. Allora esiste un unico punto $\overline{y} \in Y$ di minima distanza da x_0. Esso è caratterizzato dalla relazione di ortogonalità

$$< x_0 - \overline{y}, y >= 0 \quad \forall y \in Y.$$

DIM.: Il Teorema ci garantisce che esiste un unico punto $\overline{y}$ di minima distanza. Per definizione, $\overline{y}$ realizza la distanza minima se e soltanto se, per ogni $y \in Y$ con $\|y\| = 1$ e per ogni $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} 0 < \|x_0 - (\overline{y} + ty)\|^2 - \|x_0 - \overline{y}\|^2 = \\ t^2\|y\|^2 - 2t < x_0 - \overline{y}, y > . \end{aligned}$$

Si vede subito che l'ultima espressione è positiva per ogni $t \neq 0$ se e solo se $< x_0 - \overline{y}, y >= 0$. Q.E.D.

L'ultimo corollario è particolarmente importante: da esso è facile dedurre che uno spazio di Hilbert si decompone come somma diretta di un suo sottospazio chiuso e del suo spazio ortogonale, con proiezioni continue.

PROPOSIZIONE: Sia $Y \subset X$ un sottospazio chiuso non vuoto dello spazio di Hilbert X, $p : X \to X$ l'applicazione che a ogni $x \in X$ associa il punto del sottospazio Y più vicino a x. Allora p è lineare e continua, la sua restrizione a Y è l'identità. Inoltre $x - p(x)$ è ortogonale a Y, per cui possiamo scrivere $X = Y \oplus Y^{\perp}$, con proiezioni continue. Infine, $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$ per ogni $x \in X$.

DIM.: Il Corollario appena visto asserisce che $p(x)$ si caratterizza l'unico punto di Y tale che $< x - p(x), y >= 0$ per ogni $y \in Y$, cioè come l'unico punto di Y tale che $x - p(x) \in M^{\perp}$: per questa ragione, esso viene chiamato *proiezione ortogonale* di x su Y.

È evidente che p coincide con l'identità su Y. Mostriamo che è lineare: siano $x_1, x_2 \in X$, $t \in \mathbf{R}$. Allora si ha $0 =< x_1 - p(x_1), y >=< x_2 - p(x_2), y >$ per ogni $y \in Y$, e grazie alla bilinearità del prodotto scalare

$$< x_1 - tx_2 - (p(x_1) + tp(x_2), y >= 0 \quad \forall y \in Y,$$

da cui $p(x_1 + tx_2) = p(x_1) + tp(x_2)$.

Se poi $x \in X$, essendo $p(x) \in Y$ si ha $< x - p(x), p(x) >= 0$, da cui

$$\|x\|^2 =< p(x) + (x - p(x)), p(x) + (x - p(x) >= \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

Questo mostra anche che p è continua, in quanto l'identità implica

$$\|p(x)\| \leq \|x\|,$$

cioè la norma di $p : X \to X$ come applicazione lineare è ≤ 1 (in realtà è uguale a 1 perché coincide con l'identità su Y). Q.E.D.

Lezione del 16/5/2006 (2 ore): Osserviamo per prima cosa che la proiezione su un sottospazio di dimensione finita di uno spazio di Hilbert può essere scritta esplicitamente:

OSSERVAZIONE: Se Y è un sottospazio di dimensione finita di X, e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una sua base ortonormale, allora possiamo scrivere esplicitamente

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i.$$

Inoltre, $\|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (< x, e_i >)^2$. Basta infatti verificare che $x - p(x)$ è ortogonale a tutti gli elementi di Y: questo è certamente vero se questa proprietà vale per gli elementi della base. Ora,

$$< x - p(x), e_j >=< x, e_j > - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >< e_i, e_j >= 0,$$

come volevasi dimostrare. L'espressione della norma di $p(x)$ è un'immediata conseguenza dell'ortonormalità degli e_i.

Si noti che questo risultato vale indipendentemente dalla completezza di X: nel teorema di proiezione su un convesso, essa serviva solo per dimostrare l'esistenza del punto di distanza minima...mentre in questo caso lo esibiamo esplicitamente!

Il seguente teorema caratterizza il duale di uno spazio di Hilbert: per ogni funzionale lineare continuo $T \in X'$ esiste un unico $y \in X$ tale che $T(x) =< y, x >$ per ogni $x \in X$. In particolare, il duale di X è isomorfo e isometrico a X:

TEOREMA (di rappresentazione di Riesz): Sia X uno spazio di Hilbert. Definiamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : X &\rightarrow X' \\ y &\mapsto T_y \end{aligned}$$

dove per definizione $T_y(x) :=< y, x >$ per ogni $x \in X$. Allora Φ è un isomorfismo isometrico tra X e X'.

DIM.: Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo

$$T_y(x) =< y, x >\leq \|y\| \, \|x\|,$$

per cui il funzionale lineare T_y è continuo di norma $\leq \|y\|$. D'altra parte, $T_y(\frac{y}{\|y\|}) = \|y\|$, da cui $\|T_y\|_{X'} = \|y\|$. Ne segue che l'applicazione $\Phi : X \rightarrow X'$ (che è evidentemente lineare) è ben definita ed è un'isometria.

Rimane da verificare che Φ è suriettiva, ossia che per ogni $T \in X'$ esiste $y \in X$ tale che $T = T_y$.

Sia $Y = \ker(T)$. Se $Y = X$, basta prendere $y = 0$: possiamo dunque supporre che Y sia un sottospazio chiuso proprio di X. Sia allora $x_0 \in X \setminus Y$, $\overline{y}$ la proiezione ortogonale di x_0 su Y. Fissato $x \in X$, si vede subito che

$$x - \frac{T(x)}{T(x_0 - \overline{y})}(x_0 - \overline{y}) \in Y.$$

Questo vettore deve dunque essere ortogonale a $x_0 - \overline{y}$:

$$< x_0 - \overline{y}, x - \frac{T(x)}{T(x_0 - \overline{y})}(x_0 - \overline{y}) >= 0,$$

da cui con facili semplificazioni

$$T(x) =< x, T(x_0 - \overline{y})\frac{x_0 - \overline{y}}{\|x_0 - \overline{y}\|^2} >,$$

e il nostro asserto è provato con $y = T(x_0 - \overline{y})\frac{x_0 - \overline{y}}{\|x_0 - \overline{y}\|^2}$. Q.E.D.

Per proseguire, ci serve definire la somma di una famiglia qualunque (non necessariamente numerabile) di numeri non negativi:

DEFINIZIONE: Sia $\{t_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia (non necessariamente numerabile) di numeri reali *non negativi*. Allora, per definizione,

$$\sum_{\alpha \in I} t_\alpha = \sup\{\sum_{\alpha \in J} t_\alpha : \ J \subset I, \ J \ insieme \ finito\}.$$

La famiglia $\{t_\alpha\}$ si dice *sommabile* se la sua somma è finita.

Osserviamo che se l'insieme degli indici I è numerabile e $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è una sua enumerazione, allora

$$\sum_{\alpha\in I} t_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} t_{\alpha_n}$$

(e in particolare la somma della serie non dipende dalla particolare scelta dell'enumerazione). È infatti ovvio che la somma a sinistra è maggiore o uguale della serie a destra (la prima è definita come estremo superiore di un insieme più ampio di somme di un numero finito di termini!). Viceversa, data una qualunque somma *di un numero finito* di elementi della famiglia $\{t_\alpha\}$, possiamo sempre scegliere $N \in \mathbf{N}$ abbastanza grande, in modo che tutti i termini della somma compaiano nella somma parziale $\sum\limits_{n=1}^{N} t_{\alpha_n}$...per cui la serie è maggiore o uguale della somma a sinistra.

OSSERVAZIONE: Se $\{t_\alpha\}_{\alpha\in I}$ è sommabile, allora l'insieme $I' = \{\alpha \in I : t_\alpha > 0\}$ è al più numerabile.

Infatti, per ogni fissato $n = 1, 2, 3, \ldots$, l'insieme $I_n = \{\alpha \in I : t_\alpha > 1/n\}$ è necessariamente finito.

ESERCIZIO: Se $\{c_\alpha\}_{\alpha\in I}$ è una famiglia di numeri reali tale che $\sum_{\alpha\in I} |c_\alpha| < +\infty$, si mostri che è ben definita la somma $\sum_{\alpha\in I} c_\alpha$ *(SUGG.: Se $I' = \{\alpha_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ è l'insieme (al più numerabile) degli indici per cui $c_\alpha \neq 0$, allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha_k}$ converge perché converge assolutamente. Si mostri che la somma non dipende dalla particolare scelta dell'enumerazione: in altre parole, si mostri che la somma di una serie assolutamente convergente non cambia se si cambia l'ordine degli addendi.)*

Torniamo agli spazi di Hilbert: diamo la fondamentale definizione di serie di Fourier astratta di un elemento $x \in X$ rispetto ad una fissata famiglia ortonormale di elementi di X.

PROPOSIZIONE (Disuguaglianza di Bessel): Sia X uno spazio di Hilbert, $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una famiglia ortonormale di elementi di X (cioè $\|e_\alpha\| = 1$ per ogni $\alpha \in I$ e $< e_\alpha, e_\beta >= 0$ per ogni $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$). Se $x \in X$, definiamo i suoi coefficienti di Fourier rispetto a $\{e_\alpha\}$ come i numeri reali

$$c_\alpha =< x, e_\alpha >, \quad \alpha \in I.$$

Allora vale la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{\alpha\in I} |c_\alpha|^2 \leq \|x\|.$$

In particolare, solo una quantità numerabile dei coefficienti di Fourier di x può essere diversa da zero.

DIM.: Sia $J \subset I$ un qualunque insieme finito di indici. Allora il vettore $\sum_{\alpha \in J} < x, e_\alpha > e_\alpha$ è la proiezione ortogonale di x sullo spazio generato da $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ e si ha

$$\|x\|^2 = \| \sum_{\alpha \in J} < x, e_\alpha > e_\alpha \|^2 + \|x - \sum_{\alpha \in J} < x, e_\alpha > e_\alpha\|^2$$

da cui (usando l'ortonormalità degli e_α):

$$\|x\|^2 \geq \| \sum_{\alpha \in J} < x, e_\alpha > e_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha \in J} \| < x, e_\alpha > e_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha \in J} c_\alpha^2.$$

Passando al sup su tutti i sottinsiemi finiti $J \subset I$ si ha la disuguaglianza di Bessel. Q.E.D.

DEFINIZIONE: Sia I un insieme non necessariamente numerabile di indici. Denotiamo con $\ell^2(I)$ l'insieme delle famiglie di numeri reali $\{c_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tali che sia finita la somma

$$\sum_{\alpha \in I} c_\alpha^2.$$

Questo insieme diventa uno spazio vettoriale normato con la norma

$$\|\{c_\alpha\}_{\alpha \in I}\|_{\ell^2(I)} = (\sum_{\alpha \in I} c_\alpha^2)^{1/2},$$

e si può verificare che si tratta di uno spazio di Banach. Anzi, si tratta di uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$< \{a_\alpha\}, \{b_\alpha\} >:= \sum_\alpha a_\alpha b_\alpha,$$

in cui la somma a destra è assolutamente convergente grazie alla disuguaglianza di Hölder in ℓ^2, ed è ben definita in quanto non dipende dalla particolare enumerazione dell'insieme su cui i coefficienti sono diversi da zero.

Lezione del 18/5/2006 (2 ore): La disuguaglianza di Bessel ci assicura che i coefficienti di Fourier $\{c_\alpha\}$ di $x \in X$, rispetto ad una famiglia ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$, appartengono a $\ell^2(I)$. Viceversa, ogni elemento di $\ell^2(I)$ coincide con i coefficienti di Fourier di un qualche elemento di X:

TEOREMA: Sia X uno spazio di Hilbert, $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia ortonormale. Per ogni famiglia di numeri reali $\{t_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \ell^2(I)$ esiste un elemento $x \in X$ tale che

$$< x, e_\alpha >= c_\alpha \quad \forall \alpha \in I.$$

In altre parole, l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl}\Psi : X & \rightarrow & \ell^2(I) \\ x & \mapsto & \{< x, e_\alpha >\}_{\alpha \in I}\end{array}$$

è suriettiva.

DIM.: Sappiamo che i c_α sono non nulli al più per una famiglia numerabile $I' \subset I$ di indici. Scegliamo un'enumerazione di I':

$$I' = \{\alpha_k : \ k = 1, 2, 3 \ldots\}.$$

Poniamo poi

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_{\alpha_k} e_{\alpha_k}.$$

Grazie alla ortonormalità degli e_α si ha

$$\|x_n - x_{n+h}\|^2 = \sum_{k=n}^{n+h} c_{\alpha_k}^2,$$

da cui si deduce che la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy (perché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha_k}^2$ è convergente). Dunque $x_n \rightarrow x \in X$. Si ha poi, grazie alla continuità del prodotto scalare,

$$< x, e_\alpha >= \lim_{n \rightarrow +\infty} < x_n, e_\alpha >= c_\alpha$$

(per verificare l'ultima uguaglianza, distinguere il caso $\alpha \in I'$ e $\alpha \in I \setminus I'$. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Nella dimostrazione del teorema precedente, il punto x è stato trovato come somma della serier $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha_k} e_{\alpha_k}$. Verrebbe voglia di scrivere

$$x = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha e_\alpha,$$

solo che non sappiamo ancora che la somma della serie *non dipende* dall'ordine degli addendi! Questo è vero, e sarà una conseguenza del prossimo teorema. Dunque, dato un sistema ortonormale $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ in X e $\{c_\alpha\} \in \ell^2(I)$, la *serie di Fourier*

$$\sum_{\alpha \in I} c_\alpha e_\alpha$$

è ben definita e converge ad un elemento di X.

Il prossimo teorema assicura che l'applicazione Ψ definita nel teorema precedente è un isomorfismo isometrico a patto che il sistema ortonormale $\{e_\alpha\}$ sia *massimale.* In tal caso, dato $x \in X$ potremo sempre scrivere

$$x = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha e_\alpha,$$

ove $c_\alpha =< x, e_\alpha >$ sono i coefficienti di Fourier di x.

TEOREMA (Serie di Fourier astratte): Sia X uno spazio di Hilbert, $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia ortonormale in X. Allora i fatti seguenti sono equivalenti:

(i) La famiglia $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è massimale, nel senso che se vi aggiungiamo un qualunque altro elemento di X, essa non è più ortonormale;

(ii) Lo spazio generato dai vettori $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è denso in X;

(iii) Vale l'identità di Parseval: per ogni vettore $x \in X$, se denotiamo con $c_\alpha =< x, e_\alpha >$ i suoi coefficienti di Fourier, allora

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2.$$

Dunque la mappa Ψ definita nel teorema precedente è un isomorfismo isometrico tra X e $\ell^2(I)$.

DIM.: Mostriamo che $(i) \Rightarrow (ii)$: supponiamo per assurdo che $Y = \text{span}\{e_\alpha\}$ non sia denso, e sia $x_0 \in X \setminus \overline{Y}$. Allora, se $p(x_0)$ è la proiezione ortogonale di x_0 su $\overline{Y}$, $x_0 - p(x_0)$ è un vettore non nullo ortogonaloe a tutti gli e_α, contro l'ipotesi di massimalità.

Mostriamo poi che $(ii) \Rightarrow (iii)$: scelto $\varepsilon > 0$, per ipotesi per ogni $x \in X$ possiamo trovare una combinazione lineare finita $\lambda_1 e_{\alpha_1} + \lambda_2 e_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_N e_{\alpha_N}$ tale che

$$\|x - \lambda_1 e_{\alpha_1} + \lambda_2 e_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_N e_{\alpha_N}\|^2 < \varepsilon.$$

Questo implica

$$\|x - c_{\alpha_1} e_{\alpha_1} - c_{\alpha_2} e_{\alpha_2} - \ldots - c_{\alpha_N} e_{\alpha_N}\|^2 < \varepsilon$$

(per la proprietà di minimalità della proiezione ortogonale $p(x)$ su $Y = \text{span}\{e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_N}\}$), da cui $\varepsilon > \|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^N c_{\alpha_i}^2$ e dunque

$$\|x\|^2 \leq \sum_{\alpha \in I} c_\alpha^2 + \varepsilon.$$

Poiché $\sum_{\alpha \in I} c_\alpha^2 \leq \|x\|^2$ (disuguaglianza di Bessel), l'identità di Parseval risulta dimostrata grazie all'arbitrarietà di ε.

Mostriamo infine che $(iii) \Rightarrow (i)$: sia $x_0 \in X$ ortogonale a tutti gli e_α. L'identità di Parseval permette allora di dire che $\|x\| = 0$, quindi $x = 0$ e la famiglia ortonormale $\{e_\alpha\}$ non risulta ulteriormente ampliabile. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Un insieme ortonoromale massimale in uno spazio di Hilbert si chiama *base di Hilbert.* È facile vedere che una base di Hilbert esiste sempre (lemma di Zorn): dunque, un qualunque spazio di Hilbert X è isomorfo e isometrico ad un $\ell^2(I)$ per un'opportuna scelta dell'insieme di indici I.

ESERCIZIO: Sia X uno spazio di Hilbert, $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia ortonormale (non necessariamente massimale). Provare che per ogni $x \in X$ è ben definita la somma della serie

$$\sum_{\alpha \in I} < x, e_\alpha > e_\alpha.$$

(SUGG.: Si consideri il sottospazio $Y = \overline{\mathrm{span}\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}}$. Si mostri che la serie converge precisamente alla proiezione ortogonale di x su Y...)

Ricordiamo che uno spazio topologico si dice *separabile* se contiene un sottinsieme denso numerabile.

PROPOSIZIONE: Uno spazio di Hilbert X è separabile se e soltanto se possiede una base di Hilbert numerabile.

DIM.: Se X possiede una base di Hilbert numerabile, per il teorema precedente lo spazio da essa generato è denso in X. Consideriamo allora l'insieme delle *combinazioni lineari finite a coefficienti razionali* degli elementi della base di Hilbert. Questo è un insieme numerabile denso in X.

Viceversa, sia $\{x_n\} \subset X$ un insieme numerabile denso. Applichiamo il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt a questo insieme (avendo cura, ad ogni passo, di eliminare il vettore in esame se è linearmente dipendente dai precedenti). Otteniamo così una successione di vettori ortonormali $\{e_k\}$ che genera un sottospazio di X che contiene tutti gli x_n, ossia un sottospazio denso. Essa è dunque una base di Hilbert grazie al teorema precedente. Q.E.D.

Ci si chiederà che cosa centra la teoria astratta vista fino ad ora con le *serie di Fourier* nel tradizionale senso "trigonometrico"! Ecco la risposta:

OSSERVAZIONE: Consideriamo lo spazio

$$L^2(2\pi) = \{u : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : \; u \; misurabile \; 2\pi - periodica, \; \int_{-\pi}^{\pi} u^2(x)\, dx < +\infty\},$$

con la consueta convenzione di considerare equivalenti funzioni che differiscono su un insieme di misura nulla. Questo è uno spazio di Hilbert col prodotto scalare

$$< u, v >= \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\, dx.$$

Consideriamo la seguente famiglia di elementi di $L^2(2\pi)$:

$$\mathcal{F} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx :\; n = 1, 2, \ldots\}.$$

Si vede facilmente che questa famiglia è ortonormale (basta usare le note relazioni di ortogonalità (!) per le funzioni trigonometriche), e che la serie di Fourier di una funzione $u \in L^2(2\pi)$ rispetto a questo sistema ortonormale è proprio la consueta serie di Fourier.

Inoltre, la famiglia $\mathcal{F}$ è massimale: questo è una conseguenza del *Teorema di Stone-Weierstrass*, che dice che ogni funzione continua e 2π-periodica si può approssimare uniformemente con polinomi trigonometrici. Poiché ogni elemento di $L^2(2\pi)$ si approssima in norma L^2 con funzioni continue, ne segue che si approssima anche con polinomi trigonometrici, cioè con combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{F}$: lo spazio generato dal nostro sistema ortonormale è dunque denso in $L^2(2\pi)$, e $\mathcal{F}$ è massimale.

Il teorema sulle serie di Fourier astratte, applicato a questo caso concreto, ci assicura che la serie di Fourier di una funzione L^2 converge in norma L^2 alla funzione stessa!

Lezione del 22/5/2006 (2 ore): Per concludere la nostra discussione degli spazi di Hilbert, studiamo la convergenza debole in questo contesto. Grazie al teorema di rappresentazione di Riesz, la definizione di convergenza debole nel caso di uno spazio di Hilbert X si legge come segue: se $\{x_n\} \subset X$, allora

$$(x_n \rightharpoonup x) \Longleftrightarrow_{Def} (< y, x_n > \to < y, x > \quad \forall y \in X).$$

La seguente proposizione raccoglie un paio di fatti interessanti sulla convergenza debole in uno spazio di Hilbert:

PROPOSIZIONE: Sia X uno spazio di Hilbert. Allora

(i) Se $x_n \rightharpoonup x$, allora $\{x_n\}$ è limitata e $\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$.

(ii) Se $\{x_n\}$ è una successione tale che per ogni $y \in X$ esiste finito il limite $T(y) := \lim\limits_{n\to+\infty} < x_n, y >$, allora esiste un unico $x \in X$ tale che $x_n \rightharpoonup x$.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \to y$ (convergenza in norma), allora

$$< x_n, y_n > \to < x, y > .$$

(iv) Si ha $x_n \to x$ se e soltanto se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$.

DIM.: La (i) la abbiamo già vista in un qualunque spazio di Banach. Per la (ii), si applichi il Teorema di Banach-Steinhaus ai funzionali $T_n(y) :=< x_n, y >$, e si applichi poi il Teorema di rappresentazione di Riesz al funzionale limite $T(y)$.

Per la (iii), scriviamo

$$< x_n, y_n > - < x, y >= (< x_n, y_n > - < x_n, y >) + (< x_n, y > - < x, y >).$$

La seconda parentesi tonda tende a zero per definizione di convergenza debole. Per stimare la prima parentesi tonda, si osservi che $\{x_n\}$ è limitata in norma (grazie a (i)) e si applichi la disuguaglianza di Cauchy-Schwarza a $< x_n, y_n - y >$. Dunque, anche la prima parentesi tonda tende a 0 e (iii) risulta provata.

Per la (iv), una freccia è ovvia. Per l'altra basta scrivere

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2 < x_n, x > +\|x\|^2$$

e applicare la convergenza debole e la convergenza delle norme. Q.E.D.

Vediamo ora la dimostrazione del Teorema di Banach-Alaoglu in uno spazio di Hilbert separabile:

TEOREMA: Sia X uno spazio di Hilbert separabile, $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione limitata in X. Allora esiste $x \in X$ e una sottosuccessione x_{n_k} di x_n tali che $x_{n_k} \rightharpoonup x$.

DIM.: Sia $\{e_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ un insieme ortonormale massimale in X (base di Hilbert). Allora per ogni n possiamo scrivere

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} e_j,$$

dove $c_{nj} =< x_n, e_j >$ sono i coefficienti di Fourier di x_n. Inoltre, l'ipotesi di limitatezza della successione si può esprimere dicendo che esiste $C > 0$ tale che

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{nj}^2 \leq C \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

In particolare, l'ultima disuguaglianza dice che per ogni fissato j si ha $|c_{nj}|\sqrt{C}$ per ogni n.

Considero in particolare i coefficienti c_{n1}: essi formano una successione limitata in $\mathbf{R}$, in particolare posso estrarre una sottosuccessione $x_n^{(1)}$ di x_n (i cui coefficienti di Fourier saranno denotati con $c_{nj}^{(1)}$ tale che $c_{n1}^{(1)} \to \bar{c}_1 \in \mathbf{R}$.

Anche la successione $c_{n2}^{(1)}$ è limitata: posso estrarre una sottosuccessione $x_n^{(2)}$ di $x_n^{(1)}$ tale che $c_{n2}^{(2)} \to \overline{c}_2 \in \mathbf{R}$.

Procedendo in questo modo, mi costruisco per ricorrenza una successione di sottosuccessioni $x_n^{(k)}$ tali che $x_n^{(k)}$ è una sottosuccessione di $x_n^{(k-1)}$, e tali che i coefficienti di Fourier $c_{nj}^{(k)}$ soddisfino

$$\lim_{n\to+\infty} c_{nj}^{(k)} = \overline{c}_j,\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Prendiamo la sottosuccessione diagonale definita da $\tilde{x}_n = x_n^{(n)}$, i cui coefficienti di Fourier saranno indicati con $\tilde{c}_{nj}$. Essa è una sottosuccessione di $\{x_n\}$ con la proprietà che

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{c}_{nj} = \lim_{n\to+\infty} < \tilde{x}_n, e_j >= \overline{c}_j \quad \forall j \in \mathbf{N}.$$

Grazie alla linearità del limite e del prodotto scalare segue che, posto $Y = \text{span}\{e_j :\ j \in \mathbf{N}\}$ (sottospazio denso), per ogni $y \in Y$ esiste finito il limite

$$\lim_{n\to+\infty} < \tilde{x}_n, y >= T(y),$$

e questo limite puntuale $T : Y \to \mathbf{R}$ è evidentemente lineare. Inoltre, T è limitato (è limite puntuale di funzionali equilimitati in norma), per cui può essere esteso con Hahn-Banach ad un funzionale limitato T definito su tutto X. Sia $\overline{x} \in X$ tale che $T(y) =< \overline{x}, y >$ per ogni $y \in X$ (esiste per il teorema di rappresentazione di Riesz...e i suoi coefficienti di Fourier sono evidentemente $\overline{c}_j$). La nostra costruzione ci dice che $< \tilde{x}_n, y >\to< \overline{x}, y >$ per ogni $y \in Y$: dimostriamo che la stessa cosa vale per ogni $y \in X$.

Sia dunque $y \in X$, $\varepsilon > 0$. Poiché Y è denso in X, esiste $\tilde{y} \in Y$ tale che $\|\tilde{y} - y\| < \varepsilon$. Allora:

$$\begin{aligned}&< \tilde{x}_n, y > - < \overline{x}, y >= \\ &< \tilde{x}_n, y - \tilde{y} > +(< \tilde{x}_n, \tilde{y} > - < \overline{x}, \tilde{y} >)- < \overline{x}, y - \tilde{y} > .\end{aligned}$$

Il modulo della quantità tra parentesi tonda è certamente minore di ε a patto di prendere n abbastanza grande. Gli altri due termini si stimano in modulo con $C\varepsilon$: prendiamo per esempio il primo e otteniamo grazie a Cauchy-Schwarz

$$| < \tilde{x}_n, y - \tilde{y} > | \leq \|\tilde{x}_n\|\ \|y - \tilde{y}\| < C\varepsilon.$$

Concludiamo dunque che si ha

$$| < \tilde{x}_n, y > - < \overline{x}, y > | < (2C + 1)\varepsilon$$

a patto di prendere n abbastanza grande. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Il teorema precedente si può facilmente estendere ad uno spazio di Hilbert non separabile X: se infatti $\{x_n\}$ è una successione limitata in X, poniamo $Z = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbf{N}\}}$. Questo è evidentemente uno spazio di Hilbert separabile (le combinazioni lineari a coefficienti razionali degli x_n sono un denso): per il risultato precedente troviamo $\overline{x} \in Z$ e una sottosuccessione x_{n_k} tali che $< x_{n_k}, y > \to < \overline{x}, y >$ per ogni $y \in Z$, per $k \to +\infty$. La stessa relazione di limite vale evidentemente per ogni $y \in Z^\perp$ (perché tutti i prodotti scalari si annullano!). Ma allora essa è valida per ogni $y \in X$ perché $X = Z \oplus Z^\perp$: $x_{n_k} \rightharpoonup \overline{x}$ in X.

Tra gli spazi funzionali più importanti che abbiamo incontrato in questo corso ci sono gli spazi $L^p(\Omega)$.Vogliamo ora studiarne meglio alcune proprietà particolarmente importanti per le applicazioni: in particolare, il fatto che ogni funzione in $L^p(\Omega)$ (con p finito) si possa approssimare bene con funzioni regolari.

Cominciamo col seguente importante teorema, che mostra che le funzioni misurabili hanno molto a che fare con le funzioni continue:

TEOREMA (Lusin): Sia $u : \Omega \to \mathbf{R}$ una funzione misurabile, con Ω insieme misurabile secondo Lebesgue di misura finita. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo trovare un compatto $K \subset \Omega$ con $|\Omega \setminus K| < \varepsilon$ e tale che la restrizione di u a K è continua.

DIM.: Per ogni fissato $j = 1, 2, 3, \ldots$, scriviamo $\mathbf{R} = \bigcup_{i=1}^{n} I_{ij}$, con I_{ij} intervalli disgiunti di lunghezza minore di $1/j$. Fissiamo anche dei punti $y_{ij} \in I_{ij}$.

Poniamo poi $A_{ij} = u^{-1}(I_{ij})$: questi sono insiemi misurabili due a due disgiunti la cui unione è tutto Ω. La regolarità della misura di Lebesgue ci assicura poi che possiamo trovare dei compatti $K_{ij} \subset A_{ij}$ tali che $|A_{ij} \setminus K_{ij}| < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}$.

Evidentemente si ha $|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{ij}| < \frac{\varepsilon}{2^j}$, e grazie alla continuità della misura sulle successioni decrescenti possiamo scegliere $N_j \in \mathbf{N}$ tale che

$$|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N_j} K_{ij}| < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Definiamo $K_j = \bigcup_{i=1}^{N_j} K_{ij}$: questo è evidentemente un compatto. Se poi definiamo $u_j : K_j \to \mathbf{R}$ ponendo $u_j(x) = y_{ij}$ per $x \in K_{ij}$, otteniamo una funzione continua (perché è costante su ogni K_{ij}, e c'è un numero finito di questi insiemi che sono a distanza positiva l'uno dall'altro) tale che evidentemente $|u_j(x) - u(x)| < 1/j$ per ogni $x \in K_j$.

Se infine definiamo $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$, otteniamo un compatto che verifica $|\Omega \setminus K| < \varepsilon$ sul quale $u_j \to u$ uniformemente. Ne segue che la restrizione di u a K è continua in quanto limite uniforme di funzioni continue. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Si noti che l'enunciato del teorema di Lusin non è in contraddizione col fatto che esistano funzioni misurabili ovunque discontinue: non stiamo affermando che i punti di K siano di continuità per u, ma per la sua restrizione a K!

Lezione del 23/5/2006 (2 ore): Il prossimo teorema è un ben noto risultato di estensione:

TEOREMA (Tietze): Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ un compatto. Se $u : K \to \mathbf{R}$ è continua, esiste una funzione continua $\tilde{u} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ che estende u (cioè tale che $u(x) = \tilde{u}(x)$ per ogni $x \in K$) e tale che $\|\tilde{u}\|_\infty = \|u\|_\infty$. Se poi $K \subset \Omega$, con Ω aperto di $\mathbf{R}^n$, ossiamo anche chiedere che $u \in C^0_C(\Omega)$.

DIM.: Posto $M = \|u\|_\infty$, definiamo due compatti $K_1 = u^{(-1)}([-M, -M/3])$, $K_2 = u^{(-1)}([M/3, M])$, e sia $\delta > 0$ la loro distanza. Allora la funzione

$$\tilde{u}_1(x) = \min\{M/3, -M/3 + \frac{2M}{3\delta}\mathrm{dist}(x, K_1)\}$$

è continua, definita dappertutto e compresa tra $-M/3$ e $M/3$. Inoltre, essa vale $-M/3$ su K_1, $M/3$ su K_2. Ne segue che $|\tilde{u}_1(x) - u(x)| \le \frac{2}{3}M$ per ogni $x \in K$.

Ripetiamo la stessa costruzione per la funzione $u_2 = u - \tilde{u}_1$: troviamo una funzione continua $\tilde{u}_2$ ovunque definita, con $\|\tilde{u}_2\|_\infty \le \frac{2}{9}M$ e tale che $\|u - \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|_\infty < \frac{4}{9}M$. Procedendo allo stesso modo, troviamo una successione $\tilde{u}_k$ di funzioni continue tali che $\|\tilde{u}_k\|_\infty \le \frac{2^{k-1}}{3^k}M$ e tali che

$$(*)\ \|u - \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 - \ldots - \tilde{u}_k\|_\infty < \frac{2^k}{3^k}\ in\ K.$$

La serie di funzioni continue

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(x)$$

converge uniformemente in $\mathbf{R}^n$ ad una funzione $\tilde{u}$ (perché converge la serie delle norme[7]). Usando la maggiorazione sulle norme degli addendi, si vede

[7] Questo fatto vi è probabilmente già noto per lo spazio di Banach delle funzioni continue e limitate su $\mathbf{R}^n$...ma vale in generale: far vedere per esercizio che se X è di Banach e se $\{x_n\} \subset X$ è tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ è convergente in X... Al solito, basta far vedere che la successione delle somme parziali è di Cauchy!

subito che la norma di $\tilde{u}$ è minore o uguale a M. Inoltre, per la (*), $\tilde{u}$ coincide con u su tutti i punti di K.

Sia poi $\Omega \supset K$ un aperto. Prendiamo due aperti limitati Ω', Ω'' tali che $K \subset \Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, e aggiungiamo il compatto $\overline{\Omega}'' \setminus \Omega'$ a K, prescrivendo che $u = 0$ su quell'insieme. Applichiamo poi il teorema come dimostrato sopra, ed infine modifichiamo l'estensione $\tilde{u}$ ponendola uguale a 0 su $\Omega \setminus \Omega''$. Q.E.D.

Il prossimo lemma ci servirà a dimostrare la densità delle funzioni continue in L^p, ma è molto importante anche indipendentemente:

LEMMA (Assoluta continutà dell'integrale): Sia $u \in L^1(\Omega)$, con Ω insieme misurabile di $\mathbf{R}^n$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se A è un sottinsieme misurabile di Ω e $|A| < \delta$, allora

$$\int_A |u(x)|\, dx < \varepsilon.$$

DIM.: Se il lemma fosse falso, troverei $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ esistono A_n sottinsiemi misurabili di Ω con $|A_n| < 2^{-n}$ e $\int_{A_n} |u(x)|\, dx \geq \varepsilon_0$.

Poniamo poi $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, per cui $|B_n| < 2^{1-n}$ e $\int_{B_n} |u(x)|\, dx \geq \varepsilon_0$. I B_n formano una successione decrescente di insiemi la cui intersezione ha misura nulla (continuità della misura sulle successioni decrescenti). Dunque, la successione di funzioni $u_n(x) = |u(x)|\mathbf{1}_{B_n}(x)$ tende quasi ovunque a 0 in Ω. Essa è dominata dalla funzione sommabile $|u|$, per cui il teorema della convergenza dominata afferma che

$$\int_{B_n} |u(x)|\, dx = \int_{\Omega} u_n(x)\, dx \to 0,$$

assurdo per la nostra scelta dei B_n. Q.E.D.

Ecco finalmente il risultato di densità delle funzioni continue:

TEOREMA (Densità delle funzioni continue in L^p): Sia $1 \leq p < +\infty$, Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$. Allora le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^p(\Omega)$.

DIM. Devo far vedere che data $u \in L^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ è possibile trovare $v \in C^0_C(\Omega)$ tale che $\|u - v\|_{L^p} < \varepsilon$.

Supponiamo dapprima che Ω abbia misura finita, e che $\|u\|_\infty = M < +\infty$: queste restrizioni saranno rimosse in seguito.

Per l'assoluta continità dell'integrale posso trovare $\delta > 0$ tale che

$$|A| < \delta \Longrightarrow \int_A |u(x)|^p\, dx < (\varepsilon/2)^p.$$

Posso evidentemente supporre che δ sia tanto piccolo che $\delta M^p < (\varepsilon/2)^p$. Per il teorema di Lusin trovo un compatto $K \subset \Omega$ tale che $|\Omega \setminus K| < \delta$ e la restrizione di u a K è continua. Applico il teorema di estensione di Tietze e trovo $v \in C^0_C(\Omega)$ tale che $\|v\|_\infty = M$ e $v \equiv u$ su K. Allora

$$\|u - v\|_{L^p(\Omega)} = \|u - v\|_{L^p(\Omega\setminus K)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega\setminus K)} + \|v\|_{L^p(\Omega\setminus K)} < \varepsilon,$$

come volevasi.

Se Ω ha misura finita ma u non è limitata, osserviamo che la funzione troncata $u_M(x) = \max\{-M, \min\{M, u(x)\}\}$ diventa arbitrariamente vicina a u in norma L^p, a patto di prendere M grande abbastanza: basta osservare che la misura degli insiemi $E_M = \{x \in \Omega : |u(x)| > M$ tende a 0 quando $M \to +\infty$, e usare l'assoluta continuità dell'integrale.

Infine, se Ω ha misura infinita si considerino le funzioni

$$u_R(x) = \begin{cases} u(x) & se\ |x| < R, \\ 0 & se\ |x| \geq R. \end{cases}$$

Usando il teorema della convergenza dominata si vede che $u_R \to u$ in L^p per $R \to +\infty$. Le funzioni u_R hanno supporto in $\Omega \cap B_R(0)$, che è un aperto limitato, per cui i discorsi precedenti sono applicabili. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Il teorema di densità è falso per $p = +\infty$. Infatti, le funzioni continue formano un sottospazio chiuso di $L^\infty(\Omega)$.

Lezione del 25/5/2006 (2 ore): Vediamo, per cominciare, alcune conseguenze della densità delle funzioni continue in L^p:

OSSERVAZIONE: Come importante conseguenza del teorema precedente, gli spazi $L^p(\Omega)$ sono separabili per $1 \leq p < +\infty$: è infatti abbastanza facile costruire un insieme numerabile di funzioni che sia denso nelle funzioni continue. Basta prendere ad esempio le *funzioni a scala* con "scalini" delimitati da intervalli di estremi razionali e con "altezza" razionale: è chiaro (uniforme continutà) che ogni funzione continua a supporto compatto si approssima uniformemente con funzioni a scala di questo tipo!

Si mostri invece (esercizio!) che $L^\infty(\Omega)$ non è separabile.

ESERCIZIO: Un'altra importante conseguenza della densità delle funzioni continue è la *continuità delle traslazioni* in $L^p(\mathbf{R}^n)$: sia $u \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $y \in \mathbf{R}^n$. Poniamo $u_y(x) := u(x - y)$ (funzione traslata del vettore y). Mostrare che allora

$$\lim_{y\to 0} \|u - u_y\|_{L^p} = 0.$$

(SUGG:Se $u \in C^0_C(\mathbf{R}^n)$, l'asserto è una semplice conseguenza dell'uniforme continuità. Per una funzione generica, si approssimi la funzione data con una funzione continua.)

ESERCIZIO: Mostrare che la successione di funzioni $u_n(x) = \sin nx$ converge debolmente a 0 in $L^p([0,1])$ per $1 < p < +\infty$. *(SUGG.: Si faccia vedere che*

$$\int_a^b \sin nx \, dx \to 0 \quad \forall 0 \leq a < b \leq 1.$$

Per la linearità dell'integrale, questo implica che $\int_0^1 \sin nx \, \phi(x) \, dx \to 0$ per ogni funzione a scala ϕ. Usando la densità delle funzioni a scala in L^1, possiamo conludere che $\int_0^1 \sin nx \, v(x) \, dx \to 0$ per ogni $v \in L^1([0,1])$. Questo vale a maggior ragione per $v \in L^q$, q esponente coniugato di p...)

OSSERVAZIONE: Il teorema di densità può essere considerevolmente "migliorato" fino a dimostrare che le funzioni C^∞_C sono un denso in $L^p(\Omega)$. La dimostrazione può essere fatta usando il procedimento di *regolarizzazione per convoluzione*... Questo è abbastanza semplice, e sarò lieto di fornire indicazioni bibliografiche agli studenti interessati! In ogni caso, per la dimostrazione è necessario sapere a priori che le funzioni continue sono dense: la faticaccia che abbiamo fatto non è stata vana!

Proseguiamo il corso con alcuni complementi di teoria della misura: già conosciamo assai bene la misura di Lebesgue e le sue proprietà, ma vale la pena di dare una definizione astratta e molto più generale di misura e di misura esterna.

DEFINIZIONE (Misura esterna, insiemi misurabili): Una *misura esterna* su un insieme X è una funzione $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che sia numerabilmente subadditiva: se $A, A_1, A_2, A_3, \ldots \subset X$ e $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, allora

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Esattamente come per la misura esterna di Lebesgue, gli *insiemi misurabili* (nel senso di Caratheodory) si definiscono come segue: un sottinsieme $A \subset X$ si dice *μ-misurabile* se vale l'uguaglianza

$$\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$$

per ogni sottinsieme $T \subset X$. In sostanza, chiediamo che A "spezzi bene" la misura di ogni sottinsieme di X.

OSSERVAZIONI: Una misura esterna è *monotona*: se $A \subset B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$ (segue dalla numerabile subadditività).

Un esempio di misura esterna diversa dalla misura di Lebesgue è la *restrizione* della misura di Lebesgue a un sottinsieme $A_0 \subset \mathbf{R}^n$: questa è la misura $\tilde{m}$ definita da

$$\tilde{m}(A) := m(A \cap A_0).$$

Un altro esempio è la misura δ_0 (*delta di Dirac centrata in* 0) definita da

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & se\ 0 \in A, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Ancora, è una misura esterna la *counting measure, "misura che conta"* definita da

$$\#(A) = \begin{cases} numero\ degli\ elementi\ di\ A & se\ A\ è\ finito, \\ +\infty & altrimenti. \end{cases}$$

Esattamente come per la misura di Lebesgue, si dimostra che $\emptyset$ e X sono insiemi misurabili e che la classe $\mathcal{S}$ degli insiemi misurabili è chiusa per complementazione e per unione numerabile. Inoltre, la misura esterna si comporta assai bene sugli insiemi misurabili: vale la *numerabile additività della misura di insiemi misurabili e due a due disgiunti*, e la *continuità della misura sulle successioni crescenti o decrescenti* (nel secondo caso, con l'ipotesi che l'insieme più grande abbia misura finita).

Questo importante teorema si dimostra esattamente come per la misura di Lebesgue! Rimando il lettore interessato ai miei appunti del corso di Analisi 4/5, o a un qualunque testo di teoria della misura.

Val la pena, però, di dare esplicitamente la definizione di *misura* (senza l'apposizione "esterna"!) su una σ-*algebra* di sottinsiemi di X:

DEFINIZIONE: Dato un insieme X, una σ-algebra $\mathcal{S}$di sottinsiemi di X è una sottofamiglia di $\mathcal{P}(X)$ che contenga l'insieme vuoto e sia chiusa per complementazione e unione numerabile.

Data una σ-algebra $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, una *misura* su X è una applicazione $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ con $\mu(\emptyset = 0$ e che sia numerabilmente additiva sulle successioni di elementi 2 a 2 disgiunti di $\mathcal{S}$. Gli elementi di $\mathcal{S}$ si dicono *insiemi* μ-*misurabili.*

Come abbiamo visto, una misura esterna ristretta alla σ-algebra dei sottinsiemi misurabili nel senso di Caratheodory è una misura.

Lezione del 29/5/2006 (2 ore): Nel seguito, supporremo che X sia uno spazio metrico *localmente compatto e separabile.*

DEFINIZIONE: Se X è come sopra, la *σ-algebra di Borel* $\mathcal{B}$ è la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli aperti di X. Una misura (misura esterna) μ si dice *di Borel* se i boreliani (cioè gli elementi di $\mathcal{B}$) sono μ-misurabili.

Una misura esterna (risp. misura) μ si dice poi *Borel regolare* se ogni insieme (risp. insieme misurabile) A è contenuto in un boreliano B tale che $\mu(A) = \mu(B)$.

Infine, μ si dice *di Radon* se è Borel-regolare e $\mu(K) < +\infty$ per ogni compatto K.

Una misura di Radon è regolare nello stesso senso della misura di Lebesgue: la misura di ogni insieme A è l'estremo superiore delle misure dei compatti contenuti in A, e l'estremo inferiore delle misure degli aperti contenenti A:

TEOREMA (Approssimazione della misura con aperti, chiusi, compatti): Sia μ una misura esterna di Borel regolare su X. Supponiamo inoltre che esista una successione di aperti $\{V_j\}$ tale che $X = \bigcup V_j$ e $\mu(V_j) < +\infty$. Allora, per ogni $A \subset X$ vale

$$\begin{aligned} (*)\ \mu(A) &= \inf\{\mu(U) :\ U \textit{ aperto},\ U \supset A\}, \\ (**)\ \mu(A) &= \sup\{\mu(C) :\ C \textit{ chiuso},\ C \subset A\}. \end{aligned}$$

Se la misura μ è soltanto di Borel, le stesse relazioni sono valide per A boreliano.

Infine, se μ è di Radon, allora l'esistenza della successione di aperti V_j come sopra è automatica. Inoltre,

$$(***)\ \mu(A) = \sup\{\mu(K) :\ K \textit{ compatto},\ K \subset A\}.$$

DIM.: Cominciamo col dimostrare (*) per A boreliano.

Supponiamo per cominciare che sia $\mu(X) < +\infty$: quest'ipotesi supplementare sarà rimossa in seguito.

Poniamo $\mathcal{A} = \{A \textit{ boreliani} :\ (*) \textit{ è vera}\}$. Mostriamo che $\mathcal{A}$ è chiuso per unione ed intersezione numerabile. Infatti, se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in \mathcal{A}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare degli aperti U_n tali che $A_n \subset U_n$ e $\mu(U_n \setminus A_n) < \varepsilon/2^n$. Allora $U = \bigcup_{n=1} U_n$ è un aperto che contiene A e

$$\mu(U \setminus A) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n \setminus A_n)\right) < \varepsilon,$$

da cui $A \in \mathcal{A}$. Se poi $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, allora $B \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ e si vede subito che $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus B) < \varepsilon$. Se poniamo $V_N = \bigcap_{n=1}^{N} U_n$, otteniamo una successione decrescente di aperti di misura finita che contengono B, per cui $\mu(V_N \setminus B) \to \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus B)$. Dunque per N abbastanza grande avremo $\mu(V_N \setminus B) < \varepsilon$ e $B \in \mathcal{A}$.

Ovviamente la famiglia $\mathcal{A}$ contiene gli aperti di X. Essendo chiusa per intersezione numerabile, contiene anche i chiusi: ogni chiuso C in uno spazio metrico si scrive come intersezione numerabile di aperti,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \ \mathrm{dist}(x, C) < 1/n\}.$$

A questo punto basta definire $\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A} : \ A^C \in \mathcal{A}\}$: questa è una σ-algebra di insiemi (è per definizione chiusa per complementazione, inoltre un'unione numerabile di elementi di $\mathcal{A}'$ è un'elemento di $\mathcal{A}$ il cui complementare appartiene ad $\mathcal{A}$, in quanto intersezione numerabile di elementi di $\mathcal{A}$), e $\mathcal{A}'$ contiene gli aperti. Dunque $\mathcal{A}'$ coincide con la σ-algebra di Borel, come volevasi dimostrare.

Se poi $\mu(X) = +\infty$, usiamo gli aperti V_j nell'ipotesi: dato un boreliano A, applichiamo quanto appena dimostrato alle misure finite $\mu|_{V_j}$ (definite da $\mu|_{V_j}(A) = \mu(A \cap V_j)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo aperti U_j tali che $U_j \cap V_j \supset A \cap V_j$ e $\mu(U_j \cap V_j) < \mu(A \cap V_j) + \varepsilon/2^j$. Si vede subito che l'aperto $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j \cap V_j)$ contiene A e ne approssima la misura a meno di ε.

Abbiamo dimostrato dunque che (*) vale per i Boreliani, nella sola ipotesi che la misura sia di Borel. Se poi la misura è di Borel regolare, (*) vale evidentemente per ogni insieme.

La (**) segue immediatamente passando ai complementari.

Infine, se $\mu(K) < +\infty$ per ogni K compatto e ricordiamo che per ipotesi X è uno spazio metrico separabile localmente compatto, è facile mostrare che esiste una successione di aperti V_j come in ipotesi: se $\{x_j\}$ è un denso numerabile, troviamo raggi r_j tali che le palle chiuse $B_{r_j}(x_j)$ sono compatti che ricoprono X. Allora le palle aperte con gli stessi raggi hanno la proprietà richiesta.

La (***) segue facilmente perché ogni chiuso può essere scritto come unione di una successione crescente di compatti (si usino opportunamente le palle chiuse di cui sopra...). Q.E.D.

Quando si costruiscono misure (esterne) su uno spazio metrico, è utile avere un criterio che garantisca la misurabilità dei boreliani:

TEOREMA (Criterio di Caratheodory): Sia μ una misura esterna su X tale *che* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ *ogni volta che* $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. *Allora* μ *è una misura di Borel.*

DIM.: Ci basta dimostrare che ogni chiuso C è misurabile, cioè che per ogni insieme $T \subset X$ si ha

$$\mu(T) \geq \mu(T \setminus C) + \mu(T \cap C).$$

Consideriamo i chiusi $C_j = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq 1/j\}$: poiché $T \setminus C_j$ si trova a distanza positiva da C si ha $\mu(T) \geq \mu((T \setminus C_j) \cup (T \cap C)) = \mu(T \setminus C_j) + \mu(T \cap C)$.

Per concludere basta allora mostrare che $\mu(T \setminus C_j) \to \mu(T \setminus C)$ per $j \to +\infty$. D'altra parte, se

$$R_k = \{x \in T : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k}\}$$

abbiamo $T \setminus C = (T \setminus C_j) \cup (\bigcup_{k=j}^{\infty} R_k)$ e possiamo concludere grazie alla subadditività se facciamo vedere che

$$\lim_{j \to +\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \mu(R_k) = 0.$$

Questo è vero perché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k)$ converge. Consideriamo infatti una somma di un numero finito di termini *di indice pari*: usando l'additività della misura sugli insiemi a distanza positiva e poi la monotonia si ha $\sum_{k=1}^{N} \mu(R_{2k}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{N} R_{2k}) \leq \mu(T)$. Analoga maggiorazione vale per la somma di un numero finito di termini dispari: quindi, le somme parziali della serie sono maggiorate da $2\mu(T)$ e la serie converge (si noti infatti che se avevamo $\mu(T) = +\infty$ non c'era nulla da dimostrare!). Q.E.D.

Data una misura μ su X, una funzione misurabile $u : X \to \overline{\mathbf{R}}$ si definisce in modo ovvio: u è misurabile se e soltanto se $u^{-1}((a, +\infty])$ è misurabile (per μ) per ogni $a \in \mathbf{R}$. Vale anche il teorema di approssimazione con funzioni semplici (combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili): una funzione misurabile non negativa è limite di una successione crescente di funzioni semplici non negative.

Se s è una funzione semplice non negativa, $s(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$, definiamo in modo ovvio il suo integrale:

$$\int_X s(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(A_i),$$

e se poi u è misurabile e non negativa poniamo per definizione

$$\int_X u(x)\ d\mu(x) = \sup\{\int_X s(x)\ d\mu(x):\ s\ semplice,\ s \leq u\}.$$

Infine, se u è una funzione misurabile di segno qualunque, si considerano la sua parte positiva $u^+ = \max\{u, 0\}$ e la sua parte negativa $u^- = -\min\{u, 0\}$ (da cui $u = u^+ - u^-$, $|u| = u^+ + u^-$...). u si dice sommabile se u^+ e u^- sono entrambi finiti: in tal caso, $\int_X u\ d\mu = \int_X u^+\ d\mu - \int_X u^-\ d\mu$. In questo contesto generale valgono (con la stessa dimostrazione) i risultati fondamentali visti per l'integrale di Lebesgue: linearità dell'integrale e sua additività rispetto agli insiemi di integrazione, teoremi di Beppo Levi, Fatou, convergenza dominata di Lebesgue.... Può essere un utile esercizio prendere un testo (per esempio i miei appunti di Analisi 4-5), e verificare che tutte le dimostrazioni funzionano per una misura generale.

Inoltre, data una misra μ su X è evidente che possiamo definire gli spazi $L^p(\mu)$ delle funzioni (misurabili) a potenza p-esima sommabile: si verifichi come ulteriore, utile esercizio che la disuguaglianza di Hölder e le proprietà della norma rimangono vere, come rimane vero il teorema di completezza di Riesz-Fischer!

Si noti che tutti i risultati citati valgono per misure su un insieme qualunque: non c'è bisogno di metriche né di topologie su X.

Invece il teorema di Lusin, e il conseguente teorema di densità delle funzioni continue, sono un pochino più delicati: essi dipendono essenzialmente dalla possibilità di approssimare la misura di un insieme con aperti che lo contengono e con compatti in esso contenuti. Grazie al risultato che abbiamo visto, tutto funziona se abbiamo una misura di Radon (al solito, su uno spazio metrico localmente compatto e separabile)...La verifica dei particolari è lunghetta ma non difficile!

OSSERVAZIONE: È abbastanza divertente vedere dove ci portano tutte queste cose nel caso in cui μ è la *counting measure* su un insieme qualunque I. In questo caso, le funzioni misurabili sono *tutte* le famiglie di numeri reali (estesi) $\{t_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Se $t_\alpha > 0$, è immediato verificare che

$$\int_I t_\alpha\ d\mu(\alpha) = \sum_{\alpha \in I} t_\alpha.$$

A questo punto, se t_α è di segno qualunque ma è sommabile, cioè se $\sum_{\alpha \in I} |t_\alpha| < +\infty$, allora è ben definito l'integrale di $\{t_\alpha\}$, e si ottiene come differenza degli integrali (delle somme) della parte positiva e della parte negativa.

Si mostri per esercizio che, se $\{t_\alpha\}_{\alpha\in I}$ è una famiglia sommabile e $\{\alpha_n\}$ è un'enumerazione degli indici per cui $t_\alpha \neq 0$, allora

$$\int_X t_\alpha \, d\mu(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} t_{\alpha_n}.$$

In particolare, la somma di una serie assolutamente convergente non cambia se si permutano gli addendi. *(SUGG.: Si usi il teorema della convergenza dominata.)*

Lezione del 30/5/2006 (2 ore): Sia μ una misura su un insieme X, con σ-algebra dei misurabili $\mathcal{S}$. Possiamo fabbricare un gran numero di nuove misure col metodo seguente: data una funzione misurabile $u : X \to [0, +\infty]$ definitamo una misura ν sulla σ-algebra $\mathcal{S}$ ponendo

$$(****)\ \nu(A) = \int_A u(x)\, d\mu(x) \qquad \forall A \in \mathcal{S}.$$

È un facile esercizio verificare che ν è una misura positiva. Inoltre, essa ha la proprietà che $\nu(A) = 0$ ogni volta che $\mu(A) = 0$: questo fatto si esprime dicendo che ν è *assolutamente continua* rispetto a μ.

DEFINIZIONE: Date due misure μ, ν sulla stessa σ-algebra, diciamo che ν è assolutamente continua rispetto a μ (e scriviamo $\nu << \mu$) se $A \in \mathcal{S}$, $\mu(A) = 0$ implica $\nu(A) = 0$.

Se μ è una misura finita, tutte le misure assolutamente continue rispetto a μ possono essere scritte come in (****):

TEOREMA (di Radon-Nicodym): Sia μ una misura finita su X (cioè $\mu(X) < +\infty$), ν un'altra misura finita definita sulla stessa σ-algebra $\mathcal{S}$ tale che $\nu << \mu$. Allora esiste una funzione $w \in L^1(\mu)$, $u \geq 0$, tale che

$$\nu(A) = \int_A w(x)\, d\mu(x) \quad \forall A \in \mathcal{S}.$$

DIM.: Consideriamo la misura $\rho = \mu + \nu$. Osserviamo che, grazie alla assoluta continuità di ν rispetto a μ, due funzioni uguali quasi ovunque rispetto a μ o a ρ sono uguali quasi ovunque anche rispetto a ν.

Se $u \in L^1(\rho)$ definiamo $T(u) := \int_X u \, d\nu$. Questo funzionale è lineare: inoltre, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo

$$T(u) \leq \int_X |u| \, d\nu \leq \int_X |u| \, d\rho \leq \|u\|_{L^2(\rho)} \rho(X)^{1/2}.$$

Ne segue che $T \in (L^2(\rho))'$: per il teorema di Riesz sul duale di uno spazio di Hilbert, esiste un'unica funzione $v \in L^2(\rho)$ tale che

$$(I) \int_X u \, d\nu = \int_X vu \, d\rho \quad \forall u \in L^2(\rho).$$

Applicando (I) alla funzione $u = \mathbf{1}_E$, con E misurabile, si ottiene $\nu(E) = \int_E v \, d\rho$. Siccome poi $0 \le \nu(E) \le \rho(E)$, abbiamo anche

$$(II) \; 0 \le \frac{1}{\rho(E)} \int_E v \, d\rho \le 1 \quad \forall E \in \mathcal{S}, \; \rho(E) > 0.$$

Da questo segue che $0 \le v(x) \le 1$ per ρ-quasi ogni $x \in X$ (se $E_n = \{x \in X : v(x) \ge 1 + 1/n\}$ avesse misura positiva, il termine centrale in (II) sarebbe strettamente maggiore di 1... Analogamente, v non può essere strettamente negativa in un insieme di misura positiva).

La (I) diventa allora

$$(III) \int_X (1-v)u \, d\nu = \int_X uv \, d\mu \quad \forall u \in L^2(\rho).$$

Se $A = \{x \in X : v(x) = 1\}$, la (III) con $u = \mathbf{1}_A$ mostra che $\mu(A) = 0$, da cui $\nu(A) = 0$. Al di fuori da questo insieme di misura nulla, è ben definita la funzione $1/(1-v)$...che però non è detto sia in $L^2(\rho)$.

Se però $E \in \mathcal{S}$, allora per ogni $n \in \mathbf{N}$ le funzioni $v_n(x) = (1 + v(x) + v^2(x) + \ldots + v^n(x))\mathbf{1}_E(x)$ appartengono a $L^2(\rho)$ (sono limitate). Sostituendo in (III) si ha

$$\int_E (1 - v^{n+1}(x)) \, d\nu(x) = \int_E (v(x) + v^2(x) + \ldots + v^n(x)) \, d\mu(x).$$

Il membro di sinistra tende a $\nu(E)$ grazie al teorema di Beppo Levi (l'integranda tende crescendo a 1 per quasi ogni $x \in X$)... L'integranda nel membro di destra tende crescendo a $w(x) = \frac{v(x)}{1-v(x)}$, per cui (sempre grazie al teorema di Beppo Levi) l'integrale tende a $\int_E w(x) \, d\mu(x)$. Si ha insomma $\nu(E) = \int_E w(x) \, d\mu(x)$. La sommabilità di w viene dal fatto che ν è una misura finita. Q.E.D.

ESERCIZIO: Il teorema rimane vero se μ e ν sono *misure σ-finite*.[8] In questo caso, la funzione w nella tesi non è necessariamente sommabile. *(SUGG.: Non è restrittivo supporre che gli X_i nella definizione di σ-finitezza siano*

[8] Per definizione, μ è σ-finita se esiste una successione di insiemi misurabili X_i tali che $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ e $\mu(X_i) < +\infty$. Per esempio, la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$ è σ-finita. La counting measure su un insieme più che numerabile non lo è.

due a due disgiunti, e vadano bene contemporaneamente per μ e per ν. Si applichi poi il teorema alla restrizione delle misure ad X_i...)

Il teorema è invece falso se le misure non sono σ-finite: si prenda ad esempio come ν la misura di Lebesgue su $\mathbf{R}$, come μ la counting measure sempre su $\mathbf{R}$ (ristretta alla σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue): allora $\nu << \mu$, ma non può esistere una funzione w come nell'enunciato (dimostrarlo per esercizio!)!

È giunto il momento di introdurre le *misure con segno*!

DEFINIZIONE (Misura con segno): Sia $\mathcal{S}$ una σ-algebra di sottinsiemi di un dato insieme X. Una *misura con segno* (finita) è una funzione $\mu : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ se $A_n \in \mathcal{S}$ per ogni n e $A_m \cap A_n = \emptyset$ per $m \neq n$ (numerabile additività).

Si noti che la richiesta di numerabile additività è meno innocua di quanto possa sembrare: se si permutano gli insiemi A_n, la loro unione non cambia e quindi la somma della serie deve sempre essere $\mu(A)$. Questo implica che la serie deve *sempre convergere assolutamente*, per ogni decomposizione numerabile di un insieme misurabile in insiemi misurabili due a due disgiunti.

Evidentemente, una misura con segno non gode di proprietà di monotonia: $A \subset B$ non implica $\mu(A) \leq \mu(B)$. In compenso, è facile verificare che valgono le usuali proprietà di continuità della misura sulle successioni crescenti e decrescenti di insiemi: verificatelo per esercizio!

*DEFINIZIONE (Insiemi positivi e negativi per una misura con segno):*Data una misura con segno μ, un insieme $P \in \mathcal{S}$ si dice *positivo* se $\mu(E) \geq 0$ per ogni $E \in \mathcal{S}$, $E \subset P$. In modo analogo si definisce un insieme *negativo*. Un insieme nullo sarà poi un insieme i cui sottinsiemi hanno tutti misura nulla: esso è contemporaneamente un insieme positivo e negativo!

TEOREMA (Decomposizione di Hahn di una misura con segno): Sia μ una misura con segno su X (con σ-algebra dei misurabili $\mathcal{S}$). Allora esistono un insieme positivo $P \in \mathcal{S}$ e un insieme negativo $N \in \mathcal{S}$ disgiunti e tali che $P \cup N = X$. Una tale decomposizione si chiama decomposizione di Hahn *per la misura μ. Essa è unica a meno di insiemi nulli.*

DIM.: L'unicità della decomposizione di Hahn a meno di insiemi nulli è ovvia...l'esistenza un po' meno! La vedremo la prossima volta.

Lezione del 1/6/2006 (2 ore): Per dimostrare che esiste una decomposizione di Hahn di una misura positiva μ procediamo per passi, facendo vedere per prima cosa che

CLAIM I: per ogni fissato insieme misurabile M si ha $\sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}, E \subset M\} < +\infty$

Dimostriamo l'affermazione per assurdo. Se fosse $\sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}, E \subset M\} = +\infty$, mostriamo che possiamo trovare due insiemi misurabili disgiunti A e B tali che $A \cup B = M$, $|\mu(A)| \geq 1$ e $\sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}, E \subset B\} = +\infty$.

Se ci riusciamo, possiamo poi applicare lo stesso procedimento a B, decomponendolo in due insiemi con proprietà analoghe: iterando questo passo, riusciamo a costruire due successioni di insiemi misurabili A_n, B_n tali che $A_n \cap B_n = \emptyset$, $A_n \cup B_n = B_{n-1}$,$|\mu(A_n)| \geq 1$ e $\sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{S},\ E \subset B_n\} = +\infty$. In particolare, gli A_n sono disgiunti ed hanno tutti misura di modulo maggiore o uguale a 1: questo è assurdo, perchè si dovrebbe avere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathbf{R},$$

ma una serie il cui termine generale non tende a 0 non può convergere!

Mostriamo dunque che esistono A e B con le proprietà dette. Grazie all'ipotesi che $\sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}, E \subset M\} = +\infty$ possiamo scegliere un insieme misurabile B tale che $\mu(B) > 1 + |\mu(M)|$, e poniamo $A = M \setminus B$. Allora $\mu(M) = \mu(A) + \mu(B) > \mu(A) + 1 + |\mu(M)|$, da cui $\mu(A) < -1$: sia A che B hanno misura maggiore o uguale a 1 in modulo. Ora, i due estremi superiori

$$\begin{gathered}\sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}, E \subset B\},\\ \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{S}, E \subset A\}\end{gathered}$$

non possono essere entrambi finiti, altrimenti lo sarebbe anche lo stesso sup fatto su tutti i sottinsiemi di M: il nostro asserto è dunque provato a patto di scambiare A e B se necessario.

CLAIM II: per ogni $A \in \mathcal{S}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $B \in \mathcal{S}$, $B \subset A$ tale che $\mu(E) > -\varepsilon$ per ogni $E \subset B$, $E \in \mathcal{S}$.

In sostanza, dobbiamo trovare un sottinsieme "quasi positivo" di A, con misura maggiore o uguale a quella di A... Sia $c = \sup\{\mu(C) : C \subset A,\ C \in \mathcal{S}\}$: evidentemente $\mu(A) \leq c < +\infty$ (grazie al Claim I), per cui possiamo trovare un sottinsieme misurabile $B \subset A$ tale che

$$\mu(B) \geq \max\{\mu(A), c - \varepsilon/2\}.$$

Questo insieme ha le proprietà richieste: se esistesse $E \subset B$ con $\mu(E) \leq -\varepsilon$, allora $\mu(B \setminus E) = \mu(B) - \mu(E) \geq c + \varepsilon/2$, contro la definizione di estremo superiore.

Nel terzo passo, il nostro insieme “quasi positivo” diventa positivo:

CLAIM III: se $A \in \mathcal{S}$ esiste un insieme positivo $B \subset A$ tale che $\mu(B) \geq \mu(A)$.

Applichiamo infatti il Claim II con $\varepsilon = 1/n$: troviamo una successione decrescente di insiemi misurabili $A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ tali che $\mu(A_n) \geq \mu(A)$ e $\mu(E) > -1/n$ per ogni E misurabile, $E \subset A_n$.

Poniamo $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Allora $B \subset A$ e, per la continuità della misura sulle successioni decrescenti, $\mu(B) \geq \mu(A)$. Inoltre B è un insieme positivo: se $E \subset B$, allora E è anche un sottinsieme di A_n per ogni n e quindi $\mu(E) > -1/n$.

Dimostrato il Claim III, siamo in grado di trovare la nostra decomposizione di Hahn: sia $s = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{S}\}$. Prendiamo una successione A_n di insiemi misurabili tale che $\mu(A_n) \to s$: grazie al Claim II posso sostituire ciascuno degli A_n con un suo sottinsieme positivo B_n tale che $\mu(B_n) \geq \mu(A_n)$, per cui $\mu(B_n) \to s$. Definiamo poi

$$P_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k :$$

questi insiemi costituiscono una successione crescente di insiemi positivi tali che $\mu(P_n) \to s$. A questo punto, possiamo porre

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, \quad N = X \setminus P.$$

Per quanto detto sopra, $\mu(P) = s$. Inoltre P è positivo: se $E \subset P$, $E \in \mathcal{S}$, allora gli insiemi $E \cap P_n$ formano una successione crescente di insiemi di misura positiva la cui unione è E, per cui $\mu(E) \geq 0$. Infine, N è un insieme negativo: se esistesse $E \subset N$ misurabile con $\mu(E) > 0$, allora $\mu(P \cup E) = \mu(P) + \mu(E) > s$, assurdo! Q.E.D.

DEFINIZIONE (Variazione positiva, negativa, totale e decomposizione di Jordan di μ): Sia μ una misura con segno su X, $X = P \cup N$ una decomposizione di Hahn per μ. Per ogni $E \in \mathcal{S}$ definiamo

$$\begin{aligned} \mu^+(E) = &\ \mu(E \cap P) && \textit{(Variazione positiva di } \mu\textit{)}, \\ \mu^-(E) = &\ -\mu(E \cap N) && \textit{(Variazione negativa di } \mu\textit{)}, \\ |\mu|(E) = &\ \mu^+(E) + \mu^-(E) && \textit{(Variazione totale di } \mu\textit{)}. \end{aligned}$$

Si tratta evidentemente di misure positive, ed inoltre $\mu = \mu^+ - \mu^-$ (decomposizione di Jordan della misura μ).

Quella che segue è una semplice caratterizzazione della misura variazione totale: in classe non l'abbiamo vista, la riporto comunque per il lettore volenteroso!

PROPOSIZIONE: Se μ è una misura con segno, allora per ogni $A \in \mathcal{S}$ si ha

$$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| : \ E_n \in \mathcal{S}, \ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \ E_n \cap E_m = \emptyset \ per \ m \neq n\}.$$

DIM.: Siano A, E_n come nell'enunciato, $X = P \cup N$ una decomposizione di Hahn di μ, e siano μ^+ e μ^- le variazioni. Allora

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu^+(E_n) - \mu^-(E_n)| \leq \\ &\sum_{n=1}^{\infty}(\mu^+(E_n) + \mu^-(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) = |\mu|(A).\end{aligned}$$

L'estremo superiore nell'enunciato è poi un massimo: basta decomporre A nei due insiemi $A \cap P$ e $A \cap N$. Q.E.D.

ESERCIZIO (Teorema di Radon-Nicodym per le misure con segno): Sia μ una misura positiva finita su X, ν una misura *con segno* con $\nu << \mu$. Allora esiste una funzione $v \in L^1(\mu)$ tale che

$$\nu(E) = \int_E v(x) \, d\mu(x) \quad \forall E \in \mathcal{S}.$$

(SUGG.: Sia $X = P \cup N$ una decomposizione di Hahn. Basta applicare il teorema di Radon-Nicodym alle misure positive μ^+ e μ^-, che sono concentrate su insiemi disgiunti...)

Il teorema di Radon-Nicodym per le misure con segno ci consente finalmente di dimostrare che il duale di $L^p(\mu)$ è $L^q(\mu)$, per $1 \leq p < +\infty$ e a patto che la misura positiva μ sia finita[9]:

TEOREMA: Sia μ una misura positiva finita su X, $1 \leq p < +\infty$. Allora per ogni $T \in (L^p(\mu))'$ esiste un'unica funzione $v \in L^q(\mu)$ (con q esponente coniugato di p) tale che

$$T(u) = \int_X u(x)v(x) \, d\mu(x) \quad \forall u \in L^p(\mu).$$

Inoltre, $\|T\| = \|v\|_{L^q}$.

[9]La dimostrazione si adatta abbastanza facilmente anche al caso delle misure σ-finite

DIM.: Abbiamo già visto che l'applicazione $\Phi : L^q \to (L^p)'$ che ad ogni $v \in L^q(\mu)$ associa il funzionale $T_v : u \mapsto \int_X uv \, d\mu$ è un'isometria lineare: in realtà, lo abbiamo dimostrato per la misura di Lebesgue, ma abbiamo osservato che nulla cambia nel caso di una misura generica. Ci manca solo da verificare la suriettività di Φ, ed il teorema sarà completamente dimostrato.

Sia dunque $T \in (L^p(\mu))'$. Definiamo $\nu(E) = T(\mathbf{1}_E)$ (si noti che $\mathbf{1}_E \in L^p$ grazie alla finitezza della misura μ): dico che ν è una misura con segno su X, assolutamente continua rispetto a μ.

Infatti, è ovvio che $\nu(E) = 0$ quando $\mu(E) = 0$. Inoltre, se A e B sono misurabili e disgiunti si ha $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ da cui $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ grazie alla linearità del funzionale.

Verifichiamo la numerabile additività di ν: sia $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con gli A_n misurabili e due a due disgiunti. Si vede subito che

$$\mathbf{1}_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x),$$

e la successione è dominata da $\mathbf{1}_A$: se ne deduce che la serie scritta sopra converge in $L^p(\mu)$.

Allora, per la continuità di T si ha $\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ e la numerabile additività di ν risulta provata.

Il teorema di Radon-Nicodym garantisce l'esistenza di una funzione $v \in L^1(\mu)$ tale che

$$(A)\ T(\mathbf{1}_E) = \nu(E) = \int_E v(x) \, d\mu(x) \quad \forall E \in S,$$

da cui

$$(B)\ T(s) = \int_X s(x)v(x) \, d\mu(x) \quad \forall s \text{ semplice.}$$

Rimane da far vedere che $v \in L^q$: se questo è vero, al posto della funzione semplice possiamo mettere qualunque funzione $u \in L^p$ perché le funzioni semplici sono dense in quello spazio.

Cominciamo dal caso $p = 1$. Sappiamo da (A) che

$$|\int_E v(x) \, d\mu(x)| \leq \|T\|\mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{S},$$

da cui $\mu(\{x : v(x) > \|T\|+1/n\}) = 0$ per ogni n (altrimenti la disuguaglianza non sarebbe verificata), e analogamente $\mu(\{x : v(x) < -\|T\| - 1/n\}) = 0$ da cui $\|v\|_\infty \leq \|T\|$.

Sia poi $1 < p < +\infty$. La relazione (B) vale per tutte le funzioni $s \in L^\infty(\mu)$ (perché ogni funzione limitata si può approssimare uniformemente con funzioni semplici: si veda la dimostrazione del teorema di approssimazione di una funzione misurabile positiva con funzioni semplici!). Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia $E_n = \{x \in X : |v(x)| \leq n\}$ e poniamo $s_n(x) = \mathbf{1}_{E_n}(x)|v(x)|^{q-1}\mathrm{sgn}(v(x))$. Ciascuna di queste funzioni è in $L^\infty(\mu)$, e inoltre $|v(x)|^q = |s_n(x)|^p$ su E_n. Da (B) otteniamo allora

$$\int_{E_n} |v(x)|^q \, d\mu(x) = \int_X s_n(x)v(x) \, d\mu(x) = T(s_n) \leq \|T\| \left(\int_{E_n} |v(x)|^q \, d\mu(x) \right)^{1/p},$$

cioè

$$\left(\int_{E_n} |v(x)|^q \, d\mu(x) \right)^{1/q} \leq \|T\|.$$

Passiamo al limite per $n \to +\infty$: grazie al teorema di Beppo Levi abbiamo finalmente $\|v\|_{L^q} \leq \|T\|$. Q.E.D.