

Diario del Corso di Analisi - IV/V Unità Didattica

Corso di Laurea: Matematica

Docente: Sisto Baldo

ATTENZIONE: Il presente Diario del Corso vuole essere un riassunto abbastanza dettagliato di quello che è stato detto in aula, e come tale può essere un utile sussidio per chi voglia sistemare i propri appunti, o per chi sia stato assente e voglia ricostruire i contenuti di una lezione. D'altra parte, queste brevi paginette NON possono sostituire completamente un libro di testo, la lezione in aula o un'interazione diretta con il docente o l'esercitatrice: siete quindi invitati a servirvi ANCHE di queste altre opportunità per approfondire le vostre conoscenze!

Lezione del 12/9/2005 (2 ore):

Cominciamo questo corso riprendendo, in maniera leggermente più approfondita, alcuni degli argomenti che abbiamo intravisto nell'U.D. 3: per prima cosa, cerchiamo di fissare alcuni concetti relativi alla topologia degli spazi euclidei.

Consideriamo in particolare lo spazio euclideo a dimensione finita \mathbf{R}^n : usiamo la notazione $x = (x_1, \dots, x_n)$ per indicare i vettori che vi appartengono. La *norma* di un vettore $x \in \mathbf{R}^n$ si definisce come $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, e la distanza (euclidea) tra due vettori $x, y \in \mathbf{R}^n$ sarà semplicemente $|x - y|$.¹

La palla aperta di centro x_0 e raggio $r > 0$ è l'insieme $B_r(x_0) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| < r\}$.

Vediamo le definizioni di insieme *aperto* e *chiuso*: vedremo che gli insiemi aperti sono quelli su cui è "ragionevole" fare il calcolo differenziale.

DEFINIZIONI: Un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$.

¹Dato uno spazio vettoriale X , una *norma* è una funzione $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ tale che (i) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$, (ii) $\|tx\| = |t|\|x\|$ per ogni $t \in \mathbf{R}$ e per ogni $x \in X$ (omogeneità), (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare). Su \mathbf{R}^n esistono anche altre norme oltre a quella euclidea: tra le altre, $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ e $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$. Anche queste norme, come la norma euclidea, possono essere usate per definire una *distanza*: una distanza su X è una funzione $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ che si annulla se e solo se $x = 0$, che è simmetrica (cioè $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$) e soddisfa la disuguaglianza triangolare (cioè $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$). Si possono definire distanze anche su insiemi che non siano spazi vettoriali (queste, evidentemente, *non derivano da una norma*): un insieme dotato di distanza si chiama *spazio metrico*.

Un insieme C si dice *chiuso* se e soltanto se $\mathbf{R}^n \setminus C$ è aperto. È facile verificare che C è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione: esattamente come in \mathbf{R} , x è di accumulazione per C se e soltanto se $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ per ogni $r > 0$, cioè se esistono punti di C arbitrariamente vicini a x .

Un'altra nozione utile è quella di *frontiera* di un insieme:

DEFINIZIONI: Dato $A \subset \mathbf{R}^n$, $x \in A$ si dice *punto interno* se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$.² Un punto $x \in \mathbf{R}^n$ si dice *di frontiera per A* se non è un punto interno né per A né per $\mathbf{R}^n \setminus A$. L'insieme dei punti di frontiera di A si denota con ∂A : è immediato verificare che si tratta di un insieme chiuso.

Si verifica poi abbastanza facilmente che un punto di frontiera è un punto di accumulazione per A , oppure un punto isolato di A .

A questo punto, è utile ricordare la definizione di *limite* per una funzione di più variabili, che abbiamo già visto l'anno scorso:

DEFINIZIONI: Sia $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se e soltanto se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si abbia $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Scritto in altro modo, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \subset B_\varepsilon(\ell)$.

Se poi $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, con $A \subset \mathbf{R}^n$, e x_0 è un punto di accumulazione per A , diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f((B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A) \subset B_\varepsilon(\ell)$.

Infine, se $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ e $x_0 \in A$, si dice che f è continua in x_0 se e soltanto se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$: se x_0 è un punto di accumulazione per A , questo è equivalente a dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, mentre se x_0 è un punto isolato di A , la funzione è sempre continua per definizione.

Un fatto interessante è che la continuità di una funzione (su \mathbf{R}^n o su un insieme aperto di \mathbf{R}^n) si può caratterizzare tirando in ballo soltanto gli insiemi aperti:

TEOREMA: Una funzione $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ (oppure $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, con $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto) è continua se e soltanto se $f^{-1}(A)$ è aperto in \mathbf{R}^n per ogni aperto $A \subset \mathbf{R}$.³

²Un insieme aperto è quindi un insieme i cui punti sono tutti interni.

³Un enunciato simile vale anche se Ω non è aperto, ma sono necessarie delle modifiche...

DIM.: Dimostriamo il teorema per funzioni definite su tutto \mathbf{R}^n : la generalizzazione della dimostrazione al caso $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è facile se si osserva che l'intersezione di due aperti è ancora un aperto.

Supponiamo che f sia continua, e sia A un aperto in \mathbf{R} : dobbiamo mostrare che $f^{-1}(A)$ è aperto. Sia $x \in f^{-1}(A)$. Poiché A è aperto, possiamo trovare $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(f(x)) \subset A$. Per la continuità di f in x esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset A$, cioè $B_\delta(x) \subset f^{-1}(A)$, e quindi $f^{-1}(A)$ è aperto.

Viceversa, supponiamo di sapere che la controimmagine secondo f di ogni aperto è aperta, e siano $x \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Siccome $B_\varepsilon(f(x))$ è un aperto in \mathbf{R} , avremo che $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ è un aperto in \mathbf{R}^n ed evidentemente x vi appartiene. Allora, per definizione di aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, cioè $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ e f è continua in x . Q.E.D.

Per concludere questa carrellata sulla topologia degli spazi euclidei, citiamo due fatti molto importanti.

Per prima cosa, lo spazio \mathbf{R}^n è *completo*: tutte le successioni di Cauchy convergono.

Ricordiamo che una successione $\{x_k\}_k$ a valori in \mathbf{R}^n è di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{k} \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $h, k \geq \bar{k}$ si abbia $|x_h - x_k| < \varepsilon$. Ora, denotiamo con x_k^1, \dots, x_k^n le n componenti del vettore x_k : è chiaro che se $\{x_k\}$ è di Cauchy, a maggior ragione saranno di Cauchy le successioni reali $\{x_k^i\}_k$ ($i = 1, \dots, n$) formate dalle i -esime componenti dei vettori x_k . Poiché sappiamo già che \mathbf{R} è completo, esisteranno dei numeri reali x^1, \dots, x^n tali che $x_k^i \rightarrow x^i$ per $k \rightarrow +\infty$: se ne deduce subito che $x_k \rightarrow x = (x^1, \dots, x^n)$.

Il secondo e ultimo fatto che vogliamo citare riguarda la validità dei teoremi di Bolzano Weierstrass e di Weierstrass: essi continuano a sussistere in \mathbf{R}^n con enunciato molto simile a quello che si aveva in \mathbf{R} .

TEOREMA (Bolzano-Weierstrass): Una successione limitata in \mathbf{R}^n ammette sempre una sottosuccessione convergente.

DIM.: Sia $\{x_k\}_k$ la nostra successione limitata, con $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$. La successione (reale) $\{x_k^1\}_k$ delle prime componenti è limitata: per il teorema di Bolzano Weierstrass in \mathbf{R} possiamo estrarne una sottosuccessione $\{x_{k_h}^1\}$ convergente ad un numero reale x^1 . Questo è come dire che la sottosuccessione (vettoriale) $\{x_{k_h}\}_h$ ha la proprietà che la successione delle *prime componenti* converge... Consideriamo la successione delle seconde componenti di questa, $\{x_{k_h}^2\}_h$: essa è una successione reale limitata, per cui possiamo estrarre un'ulteriore sottosuccessione convergente, $\{x_{k_{h_l}}^2\}_l$...

Proseguendo in questo modo, in n passi estraiamo una sottosuccessione per cui tutte le n componenti convergono. Q.E.D.

TEOREMA (Weierstrass): Una funzione continua $f : C \rightarrow \mathbf{R}$, con C chiuso e limitato in \mathbf{R}^n , ammette massimo e minimo assoluti in C .

DIM.: Sia $M = \sup\{f(x) : x \in C\}$. Per definizione di estremo superiore, esiste una successione $y_k \subset f(C)$ tale che $y_k \rightarrow M$.

Ora, si ha $y_k = f(x_k)$ per appropriati punti $x_k \in C$: consideriamo la successione $\{x_k\} \subset C$. Essa è limitata perché lo è C : per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{x_{k_h}\}$ e $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ tali che $x_{k_h} \rightarrow \bar{x}$. Siccome C è chiuso (e quindi contiene tutti i suoi punti di accumulazione), avremo che $\bar{x} \in C$.

Allora, usando la continuità di f in \bar{x} si ha:

$$M = \lim_{h \rightarrow +\infty} f(x_{k_h}) = f(\bar{x}),$$

e \bar{x} è un punto di massimo per f in C .

In maniera del tutto analoga si vede che esiste il minimo. Q.E.D.

Lezione del 15/9/2005 (2 ore): In questa seconda lezione, vogliamo riprendere le nozioni di base del calcolo differenziale, e in particolare quella di differenziabilità.

Esattamente come succedeva in due variabili, una funzione di n variabili a valori in \mathbf{R}^m si dice differenziabile se si può approssimare “bene” con funzioni affini:

DEFINIZIONE: Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ un insieme aperto, $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$. La funzione f si dice *differenziabile* in $x_0 \in A$ se esiste un’applicazione lineare $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ tale che $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(|x - x_0|)$.

Esattamente come per le funzioni del piano (e con dimostrazione identica), si vede che una funzione differenziabile in x_0 è ivi continua e derivabile parzialmente (cioè tutte le componenti di f sono derivabili parzialmente in tutte le direzioni⁴). Inoltre, l’applicazione lineare L è unica: la chiameremo *differenziale* di f , e la indicheremo col simbolo $df(x_0)$. Inoltre, la matrice che rappresenta l’applicazione lineare $df(x_0)$ si scrive in termini delle derivate parziali: precisamente, essa è data da

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

⁴Ricordiamo che per definizione $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + h e_j) - f_i(x_0)}{h}$, dove e_j è il j -esimo vettore della base canonica di \mathbf{R}^n . Con la scrittura $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ indicheremo il *vettore* delle derivate parziali rispetto a x_j .

e si chiama *gradiente* o *matrice jacobiana* di f in x_0 .

Anche in questo caso generale vale il *teorema del differenziale totale*: se f è derivabile in un intorno di x_0 , e le derivate parziali sono continue in x_0 , allora f è differenziabile in x_0 . La dimostrazione è una generalizzazione tutto sommato indolore di quella fatta per funzioni scalari di due variabili.

Un'altra cosa che dobbiamo imparare a fare è la differenziazione di funzioni composte. Abbiamo visto l'anno scorso che se f è una funzione differenziabile di n variabili e $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ è una funzione vettoriale derivabile di una variabile, allora la funzione composta $g(t) = f(x(t))$ è derivabile e si ha $g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \cdot x'_i(t)$.

Consideriamo un caso più generale: siano $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ e $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$ due funzioni differenziabili, e consideriamo la funzione composta $h(x) = f(g(x))$. Per calcolare la derivata parziale $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}$ applichiamo il teorema precedente con f_i al posto di f , $g(x)$ al posto di $x(t)$ e x_j al posto di t (tanto tutte le altre variabili sono congelate...). Otteniamo:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_s}(g(x)) \frac{\partial g_s}{\partial x_j}(x).$$

Ricordando la definizione della moltiplicazione tra matrici, questo è equivalente a dire che

$$\nabla(f(g(x))) = \nabla f(g(x)) \nabla g(x).$$

Attenzione: siccome la moltiplicazione tra matrici è non commutativa, l'ordine è importante!

Trovata questa formula per il gradiente della funzione composta, non è difficile dimostrare che la funzione composta è differenziabile: la dimostrazione procede esattamente come quella, vista l'anno scorso, relativa alle funzioni di due variabili.

Vogliamo ora affrontare il problema dell'invertibilità, almeno locale, di una funzione $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Premettiamo la seguente definizione, che individua una classe "particolarmente buona" di funzioni invertibili.

DEFINIZIONE: Siano A, B aperti di \mathbf{R}^n . Un *diffeomorfismo* tra A e B è un'applicazione $f : A \rightarrow B$ che sia invertibile, differenziabile e con inversa differenziabile. Due aperti A e B tra i quali esiste un diffeomorfismo si dicono *diffeomorfi*.

Facciamo un semplice conticino: se $f : A \rightarrow B$ è un diffeomorfismo e $f^{-1} : B \rightarrow A$ la funzione inversa di f , abbiamo $f^{-1}(f(x)) = x$ per ogni

$x \in A$. Calcolando la matrice jacobiana di ambo i membri dell'ultima identità si ottiene, per ogni $x \in A$:

$$\nabla f^{-1}(f(x))\nabla f(x) = I,$$

dove I è la matrice identica $n \times n$. Questo evidentemente implica l'invertibilità delle matrici $\nabla f^{-1}(f(x))$ e $\nabla f(x)$.⁵

Moltiplichiamo a destra l'ultima relazione per $(\nabla f(x))^{-1}$: si ottiene $\nabla f^{-1}(f(x)) = (\nabla f(x))^{-1}$, da cui ponendo $y = f(x)$ otteniamo

$$\nabla f^{-1}(y) = (\nabla f(f^{-1}(x)))^{-1} \quad \forall y \in B,$$

che è la formula di differenziazione della funzione inversa.

La discussione appena fatta mostra che condizione necessaria affinché $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ sia un diffeomorfismo tra A e $f(A)$, è l'invertibilità della matrice jacobiana $\nabla f(x)$ in tutti i punti di A : si deve cioè avere $\det \nabla f(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$.

Vedremo con un esempio che questa condizione non è sufficiente: esistono funzioni con matrice jacobiana sempre invertibile che non sono diffeomorfismi con la loro immagine. D'altra parte, enunceremo un teorema (il *teorema di inversione locale*), che mostra come questa condizione sia sufficiente a garantire l'invertibilità locale, cioè su intorni sufficientemente piccoli di un punto: avremo però bisogno anche della continuità delle derivate parziali di f .

Premettiamo all'enunciato ed alla dimostrazione del teorema di inversione locale un risultato che ci servirà per questo scopo:

TEOREMA (delle contrazioni): Sia $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ una contrazione, cioè una funzione tale che esista $\delta \in (0, 1)$ tale che $|T(x) - T(y)| \leq \delta|x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$.⁶ Allora esiste ed è unico un punto fisso della funzione T , cioè esiste un unico punto $x^* \in \mathbf{R}^n$ tale che $x^* = T(x^*)$.

Il teorema continua a valere per contrazioni $T : C \rightarrow C$, con C sottinsieme chiuso di \mathbf{R}^n : più in generale, esso vale per contrazioni su un generico spazio metrico completo.

DIM.: Fissiamo $x_0 \in \mathbf{R}^n$ e costruiamo per ricorrenza la successione $\{x_n\}$ tale che $x_{n+1} = T(x_n)$ per ogni $n \geq 0$.

Mostriamo che la successione $\{x_n\}$ converge, e converge proprio ad un punto fisso per T : lo facciamo provando che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy.

⁵Tra l'altro, questo mostra che non possono esistere diffeomorfismi tra aperti di spazi euclidei di *dimensione diversa*: le matrici jacobiane nell'ultima formula sarebbero rettangolari, e queste ovviamente non possono essere invertibili!

⁶Una contrazione riduce le distanze di un fattore fisso $\delta < 1$.

Intanto, usando la definizione di contrazione si ottiene per ogni n :

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |T(x_n) - T(x_{n-1})| \leq \delta |x_n - x_{n-1}| = \\ &\delta |T(x_{n-1}) - T(x_{n-2})| \leq \delta^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| = \dots \leq \delta^n |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Se adesso h è un qualunque numero naturale ≥ 1 avremo:

$$\begin{aligned} |x_{n+h} - x_n| &\leq |x_{n+h} - x_{n+h-1}| + |x_{n+h-1} - x_{n+h-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ |x_1 - x_0| &(\delta^{n+h-1} + \delta^{n+h-2} + \dots + \delta^n) = |x_1 - x_0| \delta^n \frac{1 - \delta^h}{1 - \delta} \leq |x_1 - x_0| \frac{\delta^n}{1 - \delta} \end{aligned}$$

L'ultima espressione non dipende da h e tende a zero per $n \rightarrow +\infty$: possiamo dunque trovare \bar{n} tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ e per ogni h sia $|x_{n+h} - x_n| < \varepsilon$, e la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy. Sia x^* il suo limite: passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ nella relazione $x_{n+1} = T(x_n)$ otteniamo $x^* = T(x^*)$, per cui x^* è il punto fisso cercato.

Mostriamone l'unicità: se \tilde{x} è un altro punto fisso (cioè $\tilde{x} = T(\tilde{x})$) avremo

$$|x^* - \tilde{x}| = |T(x^*) - T(\tilde{x})| \leq \delta |x^* - \tilde{x}|,$$

da cui $(1 - \delta)|x^* - \tilde{x}| \leq 0$, quindi $|x^* - \tilde{x}| = 0$ e $x^* = \tilde{x}$.

Si noti che se $T : C \rightarrow C$, con C sottinsieme chiuso di \mathbf{R}^n , la stessa dimostrazione continua a funzionare: la successione x_n è sempre di Cauchy, mentre la chiusura dell'insieme garantisce che il limite x^* appartenga ancora a C . Anche in uno spazio metrico completo, la dimostrazione sarebbe identica (usando la distanza al posto della norma). Q.E.D.

Lezione del 21/9/2005 (2 ore): Come annunciato la volta scorsa, vogliamo occuparci della locale invertibilità di una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$, dove A è un aperto di \mathbf{R}^n e f è una funzione derivabile con derivate continue (brevemente, scriviamo $f \in \mathcal{C}^1(A; \mathbf{R}^n)$ e diciamo che f è di classe \mathcal{C}^1 ...).

Questo problema ha una risposta semplice se siamo in dimensione 1 (e cioè ci stiamo occupando di funzioni di una variabile) e se A è un intervallo. Precisamente, sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 : si ha che f è un diffeomorfismo tra (a, b) e la sua immagine $f((a, b))$ se e soltanto se $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Più in generale, se $f \in \mathcal{C}^1(A; \mathbf{R})$ è una funzione di una variabile definita su un aperto A di \mathbf{R} e si ha $f'(x_0) \neq 0$ in un punto $x_0 \in A$, allora f è un diffeomorfismo tra un intervallino sufficientemente piccolo I centrato in x_0 e la sua immagine⁷

⁷Infatti, se I è sufficientemente piccolo, il segno della derivata in tale intervallo sarà uguale a quello di $f'(x_0)$.

In più variabili, abbiamo visto che una condizione necessaria affinché $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ sia un diffeomorfismo è che $\det \nabla f(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$. Questa condizione è l'equivalente del non annullarsi della derivata in dimensione 1, ma non è più sufficiente nemmeno se l'aperto A è molto buono (come una palla, un rettangolo o tutto \mathbf{R}^n): ce ne possiamo convincere grazie al seguente esempio.

ESEMPIO: Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det \nabla f(x, y) = e^{2x} \neq 0$, ma questa funzione non è un diffeomorfismo con la sua immagine (che è poi $\mathbf{R}^2 \setminus 0$): infatti, essa è periodica su tutte le rette verticali.

Dunque è lecito sperare soltanto in un risultato *locale*: la non singolarità della matrice jacobiana in un punto è infatti sufficiente a garantire che la funzione ristretta a una piccola palla centrata nel punto sia un diffeomorfismo con l'immagine della palla stessa:

TEOREMA (Di inversione locale): Sia A un aperto di \mathbf{R}^n , $f \in \mathcal{C}^1(A; \mathbf{R}^n)$, $x_0 \in A$ tale che $\det \nabla f(x_0) \neq 0$. Allora esiste $r > 0$ tale che f è un diffeomorfismo tra $B_r(x_0)$ e $f(B_r(x_0))$.

Per dimostrare il teorema avremo bisogno del seguente lemma, che a sua volta utilizza il teorema delle contrazioni visto la volta scorsa. Il lemma dice che se perturbiamo "di poco" la funzione identica (tramite una contrazione che si annulla nell'origine), otteniamo una funzione localmente invertibile con inversa "buona".

LEMMA: Sia $T : B_r(0) \rightarrow B_r(0)$ una contrazione tale che $T(0) = 0$, e definiamo $\Phi(x) = x + T(x)$. Allora esiste $\rho \in (0, r)$ tale che Φ è suriettiva sulla palla chiusa $B_\rho(0)$ ed è invertibile tra $\Phi^{-1}(B_\rho(0))$ e $B_\rho(0)$, con funzione inversa lipschitziana.

DIM.: Evidentemente, Φ è invertibile tra $\Phi^{-1}(B_\rho(0))$ e $B_\rho(0)$ se e solo se l'equazione

$$(*) \quad y = \Phi(x) = x + T(x)$$

ammette una e una sola soluzione $x \in B_r(0)$ per ogni $y \in B_\rho(0)$.

Ora, x è una soluzione di (*) se e solo se $x = y - T(x)$, cioè se x è un punto fisso della funzione $\Psi : x \mapsto y - T(x)$. Siccome T è una contrazione di costante di lipschitz $\delta < 1$, questa funzione è anche lei una contrazione. Per poter applicare il teorema delle contrazioni ci serve però che la mappa

Ψ mandi un chiuso di \mathbf{R}^n in sé: precisamente, mostriamo che è possibile scegliere $\rho > 0$ in modo che se $|y| < \rho$, allora Ψ sia una contrazione della palla chiusa $\overline{B_{r/2}(0)}$ in sé. Infatti

$$|\psi(x)| = |y - T(x)| \leq |y| + |T(x)| \leq |y| + \delta|x| \leq \rho + \delta r/2.$$

Se prendiamo $\rho \leq \frac{r}{2}(1 - \delta)$, l'ultima espressione è minore o uguale a $r/2$, per cui Ψ manda la palla chiusa di raggio metà in se stessa: il teorema delle contrazioni ci assicura allora che l'equazione (*) ha una ed una sola soluzione e la mappa Φ è invertibile tra $\Phi^{-1}(B_\rho(0))$ e $B_\rho(0)$.

Rimane da mostrare che la funzione inversa è lipschitziana: siano $y_1, y_2 \in B_\rho(0)$, $x_1 = \Phi^{-1}(y_1)$, $x_2 = \Phi^{-1}(y_2)$. Allora $x_1 = y_1 - T(x_1)$, $x_2 = y_2 - T(x_2)$ e quindi

$$|x_1 - x_2| \leq |y_1 - y_2| + \delta|x_1 - x_2|,$$

da cui con facile passaggio $|\Phi^{-1}(y_1) - \Phi^{-1}(y_2)| \leq \frac{1}{1-\delta}|y_1 - y_2|$. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Siccome Φ è continua, $\Phi^{-1}(B_\delta(0))$ è un aperto che contiene l'origine. Di conseguenza possiamo dire che esiste $\eta > 0$ tale che Φ è invertibile tra $B_\eta(0)$ e $\Phi(B_\eta(0))$, con funzione inversa lipschitziana.

Lezione del 22/9/2005 (2 ore): Siamo finalmente in grado di dimostrare il teorema di inversione locale:

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE.

Grazie ad opportune traslazioni, possiamo supporre senza perdita di generalità che sia $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$. Per ipotesi la matrice $\nabla f(0)$ è invertibile: possiamo dunque definire la funzione $\Phi(x) = [\nabla f(0)]^{-1}f(x)$.

Abbiamo: $\nabla\Phi(0) = [\nabla f(0)]^{-1}\nabla f(0) = I$. Questo suggerisce che la funzione $\Phi(x)$ sia "vicina" all'identità se x è vicino a 0. L'idea allora è di provare a scrivere $\Phi(x) = x + T(x)$: se T è una contrazione (almeno in una piccola palla centrata nell'origine), potremo applicare il lemma precedente e saremo a buon punto!

Ora, $T(x) = \Phi(x) - x$ da cui $T(0) = 0$. Inoltre, $\nabla T = \nabla\Phi - I$ per cui se x_1, x_2 appartengono ad una palletta sufficientemente piccola centrata nell'origine possiamo scrivere

$$(**) \quad T(x_2) - T(x_1) = \int_0^1 [\nabla\Phi(x_1 + t(x_2 - x_1)) - I](x_2 - x_1) dt.$$

Fissiamo ora $\delta \in (0, 1)$. Per la continuità delle derivate di f (e quindi di

Φ), possiamo trovare $\tilde{r} > 0$ tale che

$$|\nabla\Phi(x) - I| < \delta \quad \forall x \in B_{1\tilde{r}}(0).^8$$

Non è neanche restrittivo supporre che in tale palla ∇f sia sempre invertibile (continuità del determinante).

Allora, se $x_1, x_2 \in B_{\tilde{r}}(0)$ si avrà grazie alla (**)

$$|T(x_2) - T(x_1)| \leq \delta|x_2 - x_1|$$

e T è una contrazione.

Se applichiamo il lemma (si veda anche l'osservazione che lo segue), possiamo dedurre che Φ è invertibile tra una palla $B_r(0)$ sufficientemente piccola e la sua immagine, con inversa lipschitziana: evidentemente, questo rimarrà vero anche per f (che si ottiene da Φ componendo con una applicazione lineare invertibile!).

Rimane da dimostrare che f^{-1} è differenziabile con derivate continue. Siano $y, \bar{y} \in f(B_r(0))$, $x = f^{-1}(y)$, $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ e definiamo

$$\begin{aligned} R(x, \bar{x}) &= f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \\ \tilde{R}(y, \bar{y}) &= f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y}) - (\nabla f(\bar{x}))^{-1}(y - \bar{y}) \end{aligned}$$

La prima espressione sappiamo che è un $o(|x - \bar{x}|)$ perché f è differenziabile in \bar{x} . Se poi riusciamo a dimostrare che $\tilde{R}(y, \bar{y}) = o(|y - \bar{y}|)$, avremo che f^{-1} è differenziabile in \bar{y} con gradiente dato da $(\nabla f(\bar{x}))^{-1}$: che questa sia l'espressione giusta l'abbiamo visto la volta scorsa.

Ora, sostituendo l'espressione per $R(x, \bar{x})$ in quella per $\tilde{R}(y, \bar{y})$ si ottiene:

$$|\tilde{R}(y, \bar{y})| = |(\nabla f(\bar{x}))^{-1}R(x, \bar{x})| \leq |(\nabla f(\bar{x}))^{-1}| |R(x, \bar{x})| = C|R(f^{-1}(y), f^{-1}(\bar{y}))|.$$

Siccome f^{-1} è lipschitziana, l'ultima espressione è $o(|y - \bar{y}|)$ e l'inversa è differenziabile.

La continuità delle derivate della funzione inversa segue dalla continuità dell'operazione che ad una matrice invertibile associa la sua inversa.

Q.E.D.

Una conseguenza del teorema di inversione locale è la seguente, importante generalizzazione del teorema delle funzioni implicite (del Dini) al caso di funzioni di $n + k$ variabili a valori in \mathbf{R}^k :

⁸Se A è una matrice, la norma euclidea di A si definisce semplicemente come $|A| = (\sum_{ij} a_{ij}^2)^{1/2}$. È un semplice esercizio di algebra lineare verificare che se A è una matrice $n \times n$ e v un vettore di \mathbf{R}^n , allora $|Av| \leq |A||v|$.

TEOREMA (del Dini o delle funzioni implicite): Sia A un aperto di $\mathbf{R}^{n+k} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$, e conveniamo di denotare i punti di $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ con la scrittura (x, y) (dove ovviamente $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^k$). Sia $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbf{R}^k)$ e sia (x_0, y_0) un punto tale che $f(x_0, y_0) = 0$. Supponiamo inoltre che la matrice

$$\nabla_y f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_k}(x_0, y_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_k}{\partial y_2}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial y_k}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

sia invertibile. Allora esistono $r > 0$, un aperto V di \mathbf{R}^n ed una funzione $g : V \rightarrow \mathbf{R}^k$ tali che, se $Z = \{(x, y) \in A : f(x, y) = 0\}$, allora $Z \cap B_r(x_0, y_0) = \{(x, g(x)) : x \in V\}$. La funzione g è di classe \mathcal{C}^1 e si ha $\nabla g(x) = -[\nabla_y f(x, g(x))]^{-1} \nabla_x f(x, g(x))$ (con $\nabla_x f$ matrice $k \times n$ definita in modo simile a $\nabla_y f$).

DIM.: Consideriamo la funzione $\Phi : A \rightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ data da $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$. Se scriviamo la matrice jacobiana di Φ come matrice a blocchi otteniamo:

$$\nabla \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \nabla_x f(x, y) & \nabla_y f(x, y) \end{pmatrix},$$

dove I_n è la matrice identica $n \times n$. E' un semplicissimo esercizio di algebra lineare verificare che questa matrice è invertibile in (x_0, y_0) , punto nel quale $\nabla_y f$ è invertibile: se infatti

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ \nabla_x f & \nabla_y f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ (\nabla_x f)u + (\nabla_y f)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si deve avere $u = 0$, da cui $(\nabla_y f)v = 0$, da cui $v = 0$ per l'invertibilità di $\nabla_y f$: l'applicazione lineare corrispondente alla nostra matrice è iniettiva.

Per il teorema di inversione locale, possiamo allora dire che esiste $r > 0$ tale che Φ è un diffeomorfismo tra $B_r((x_0, y_0))$ e la sua immagine U (che sarà un aperto: perché?). Per la particolare struttura di Φ (che è l'identità sulle prime n variabili), la funzione inversa $\Phi^{-1} : U \rightarrow B_r((x_0, y_0))$ sarà della forma $\Phi^{-1}(x, z) = (x, \gamma(x, z))$, dove $\gamma \in \mathcal{C}^1(U; \mathbf{R}^k)$.

Ora, i punti di Z entro $B_r((x_0, y_0))$ sono precisamente quelli per cui si ha $\Phi(x, y) = (x, 0)$, dunque quelli del tipo $(x, \gamma(x, 0))$ con $(x, 0) \in U$. Definiamo allora $V = \{x \in \mathbf{R}^n : (x, 0) \in U\}$ e $g(x) = \gamma(x, 0)$: si vede subito che V è ancora un insieme aperto, e chiaramente $Z \cap B_r(x_0, y_0) = \{(x, g(x)) : x \in V\}$.

La funzione g è evidentemente di classe \mathcal{C}^1 perché lo è γ . Per ottenere la formula per ∇g si parte dall'identità $f(x, g(x)) = 0$, valida per ogni $x \in V$: calcolando la matrice jacobiana di ambo i membri si ottiene

$$\nabla_x f(x, g(x))I_n + \nabla_y f(x, g(x))\nabla g(x) = 0$$

da cui, moltiplicando a sinistra per $(\nabla_y f(x, g(x)))^{-1}$ si ottiene subito la formula voluta.⁹ Q.E.D.

Lezione del 28/9/2005 (2 ore): L'anno scorso il teorema delle funzioni implicite in due variabili ci aveva ispirati a dare una definizione di curva regolare nel piano: avevamo poi verificato che il luogo di zeri di una funzione regolare è una curva regolare, a patto che il gradiente della funzione non si annulli sul luogo di zeri stesso.

La versione generale del teorema ci stimola a cercare di definire in modo analogo curve e superfici nello spazio, e più in generale *varietà di dimensione n in \mathbf{R}^m ($m > n$)*.

Il caso più facile da capire è forse quello delle superfici dello spazio: abbiamo chiaramente un'idea intuitiva di superficie liscia in \mathbf{R}^3 , e conosciamo anche degli ottimi esempi: le superfici che si ottengono come grafico di una funzione di due variabili. Questo ci invita a dare la seguente definizione, che è un'ovvia generalizzazione di quella che avevamo dato per le curve piane:

DEFINIZIONE: Un sottinsieme S di \mathbf{R}^3 è una superficie regolare se e soltanto se esso può essere visto localmente come grafico di una funzione di due variabili (in uno dei 3 modi possibili). Precisamente, per ogni $(x_0, y_0, z_0) \in S$ devono esistere $r > 0$, un aperto A di \mathbf{R}^2 e una funzione $g : A \rightarrow \mathbf{R}$ tale che i punti di $S \cap B_r(x_0, y_0, z_0)$ siano tutti e soli quelli della forma $z = g(x, y)$ oppure $x = g(y, z)$ oppure $y = g(x, z)$ (l'oppure è da considerarsi esclusivo!).

Stiamo chiedendo cioè che, almeno localmente, una delle 3 variabili si possa esprimere come funzione regolare delle altre 2.

Se analogamente vogliamo definire una curva nello spazio, chiederemo che localmente *due* delle 3 variabili si scrivano in funzione della *terza*: una curva regolare è localmente il grafico di una funzione di una variabile a valori in \mathbf{R}^2 .

Ma vediamo cosa è in grado di dirci il teorema delle funzioni implicite sulla relazione tra curve e superfici regolari nello spazio e luoghi di zeri di funzioni regolari...

Innanzitutto, supponiamo che $g \in C^1(A, \mathbf{R})$ sia una funzione a valori reali definita su un aperto $A \subset \mathbf{R}^3$. Allora possiamo dire che $S = \{x \in A : g(x, y, z) = 0\}$ è una superficie regolare, a patto che $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ per ogni $(x, y, z) \in S$. Sia infatti $(x_0, y_0, z_0) \in S$: per ipotesi, una delle derivate parziali di g non si annulla in questo punto... supponiamo (cambiando eventualmente nome alle variabili) che sia quella rispetto a z .

⁹L'invertibilità della matrice non è un problema: siccome Φ è un diffeomorfismo tra $B_r((x_0, y_0))$ e U , la matrice $\nabla_y f$ deve essere invertibile su quella palla!

Possiamo allora applicare il teorema delle funzioni implicite (con $n = 2$, $k = 1$, $x \leftrightarrow (x, y)$, $y \leftrightarrow z$, $f = g$) per concludere che in un intorno di $(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ possiamo esprimere z in funzione di (x, y) .

E le curve regolari nello spazio? L'idea è che una curva regolare può essere a volte ottenuta come *intersezione di due superfici*, che a loro volta possono essere luoghi di zeri di funzioni scalari. Per esempio, date due funzioni regolari $g_1(x, y, z)$ e $g_2(x, y, z)$, possiamo chiederci se $Z = \{(x, y, z) : g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\}$ è una curva regolare. Si noti che, in realtà, Z è il luogo di zeri della funzione *vettoriale* $g = (g_1, g_2)$: possiamo dunque applicare il teorema delle funzioni implicite e concludere che Z è una curva regolare *a patto che la matrice jacobiana* $\nabla g(x, y, z)$ (matrice 2×3) *abbia rango 2 in ogni punto di* Z . Infatti, se ∇g ha rango due in un punto, posso scegliere due delle variabili in modo che corrispondano a un minore invertibile: in questo caso il teorema delle funzioni implicite mi dice che posso esprimere (localmente) queste due variabili in funzione della terza.

ESEMPIO: Consideriamo le due funzioni di 3 variabili $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ed i rispettivi luoghi di zeri S e C .

Si ha $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$: questo vettore si annulla solo nell'origine, che *non fa parte del luogo di zeri di* f : possiamo concludere che il luogo di zeri di f è una superficie regolare. Bella forza: è la sfera di centro l'origine e raggio 1!

Invece, $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$ che ancora si annulla solo nell'origine. Questa volta, però, l'origine appartiene all'insieme C . Il teorema delle funzioni implicite ci permette di affermare che C è una superficie regolare, *tranne eventualmente in un intorno dell'origine*. Questo è proprio vero: C è un cono, e l'origine è il suo vertice (che è un punto singolare).

Che dire infine di $C \cap S$? Si tratta del luogo di zeri della funzione vettoriale $F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z))$, la cui matrice jacobiana è

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -2z \end{pmatrix}.$$

E' facile verificare che questa matrice ha sempre rango due sull'insieme di zeri di F : possiamo allora concludere che $C \cap S$ è una curva regolare. Infatti, l'intersezione del cono e della sfera è una coppia di cerchi paralleli al piano xy !

Più in generale, possiamo dare la seguente definizione di sottovarietà differenziabile di dimensione n in \mathbf{R}^m :

DEFINIZIONE: Un sottinsieme M di \mathbf{R}^m è una *sottovarietà differenziabile* di dimensione n ($n < m$) se per ogni $x_0 \in M$ esistono $r > 0$, un aperto $A \subset$

\mathbf{R}^n e una funzione $g : A \rightarrow \mathbf{R}^{m-n}$ tali che, con un'eventuale permutazione dell'ordine delle coordinate si abbia:

$$M \cap B_r(x_0) = \{(x', g(x')) \in \mathbf{R}^m : x' = (x_1, \dots, x_n) \in A\}.$$

Il teorema di inversione locale dice che il luogo di zeri Z di una funzione $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^{m-n}$ è una sottovarietà differenziabile di dimensione n , a patto che la matrice $\nabla f(x)$ abbia rango massimo $m - n$ in ogni punto di Z .

Lezione del 29/9/2005 (2 ore): L'anno scorso abbiamo visto che un modo del tutto legittimo di dare una curva è fornirne una parametrizzazione: abbiamo in particolare fatto vedere che l'immagine di una funzione $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ è una curva regolare se γ è una funzione (iniettiva) di classe \mathcal{C}^1 e se $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$.

In modo analogo, possiamo pensare di parametrizzare una superficie in \mathbf{R}^3 con una funzione regolare di due variabili $\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$. La condizione che garantisce che l'immagine di questa funzione sia una superficie regolare, almeno localmente, si ottiene imponendo che la matrice jacobiana $\nabla \phi$ abbia ovunque rango due.

Qualcosa di simile vale, più in generale, per sottovarietà di dimensione n di \mathbf{R}^m :

TEOREMA: Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ un insieme aperto, $\phi : A \rightarrow \mathbf{R}^m$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 (con $m > n$). Se la matrice jacobiana $\nabla \phi(u)$ ha rango n per ogni $u \in A$, allora per ogni $u_0 \in A$ esiste $r > 0$ tale che $\phi(B_r(u_0))$ è esprimibile come grafico di una funzione \mathcal{C}^1 di n variabili a valori in \mathbf{R}^{m-n} (al solito, dopo un'eventuale permutazione dell'ordine delle variabili). In questo senso, possiamo dire che l'immagine di ϕ è, almeno localmente, una sottovarietà regolare di dimensione n di \mathbf{R}^m .

DIM.: Sia $u_0 \in A$. Per ipotesi, posso scegliere n righe della matrice $\nabla \phi(u_0)$ in modo che il corrispondente minore sia invertibile: permutando se necessario l'ordine della righe, posso supporre che quelle corrispondenti a questo minore siano le prime n . Precisamente, scegliamo l'ordine delle variabili in \mathbf{R}^m in modo che, se scriviamo $\phi = (\phi', \phi'')$ con $\phi' = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ e $\phi'' = (\phi_{n+1}, \dots, \phi_m)$, si abbia $\det \nabla \phi'(u_0) \neq 0$.

Sia $P : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ la proiezione sulle prime n variabili: dato $x \in \mathbf{R}^m$ scriviamo $x = (x', x'')$ con $x' \in \mathbf{R}^n$, $x'' \in \mathbf{R}^{m-n}$ e poniamo $P(x', x'') = x'$. Consideriamo la funzione composta $\Phi(u) = P(\phi(u))$: si tratta di una funzione da $A \subset \mathbf{R}^n$ in \mathbf{R}^n . Si ha $\nabla \Phi(u_0) = \nabla \phi'(u_0)$, per cui Φ ha matrice jacobiana invertibile in u_0 : per il teorema di inversione locale, esiste $r > 0$ tale che Φ è un diffeomorfismo tra $B_r(u_0)$ e $U = \Phi(B_r(u_0))$. Questo implica in

particolare che la proiezione P è bigettiva da $\phi(B_r(u_0))$ in U , che è come dire che $\phi(B_r(u_0))$ è un grafico sopra U (più esplicitamente, la funzione $\phi \circ \Phi^{-1} : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ è del tipo $\phi \circ \Phi^{-1}(x') = (x', \gamma(x'))$ per qualche funzione regolare γ .)
 Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Se aggiungiamo un'opportuna ipotesi di "iniettività rafforzata" per ϕ , possiamo ottenere che l'immagine $\phi(A)$ sia globalmente una sottovarietà regolare. Ad esempio, è sufficiente chiedere che $\phi \in C^1(\bar{A}; \mathbf{R}^m)$ e che ϕ sia iniettiva su \bar{A} .

Come già anticipato, uno degli scopi della nostra discussione sul teorema di inversione locale è la sua applicazione a problemi di massimo e minimo, e precisamente al teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

L'anno scorso, abbiamo già visto come si trovano i punti di massimo e minimo relativo *libero* per una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, con A aperto di \mathbf{R}^n . Precisamente, abbiamo visto che se $f \in C^2(A; \mathbf{R})$ e x_0 è un punto di minimo (massimo) relativo, allora $\nabla f(x_0) = 0$ e la matrice Hessiana $Hf(x_0)$ deve avere tutti gli autovalori ≥ 0 (≤ 0). Viceversa, se $\nabla f(x_0) = 0$ e $Hf(x_0)$ ha tutti gli autovalori strettamente positivi (strettamente negativi), allora x_0 è di minimo (massimo) relativo.

Il tutto era conseguenza della formula di Taylor del secondo ordine:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}{}^t(x - x_0)Hf(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|^2).$$

Che fare se vogliamo trovare punti di massimo o minimo di f sulla *frontiera* dell'aperto A ? O, più in generale, se vogliamo trovare i massimi e i minimi di f su un vincolo dato come *luogo di zeri di una funzione vettoriale*? Per questi problemi esiste una versione generale del teorema dei moltiplicatori di Lagrange:

TEOREMA (dei moltiplicatori di Lagrange): Siano $f \in C^1(\mathbf{R}^m; \mathbf{R})$, $g \in C^1(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^k)$ ($k < m$), $Z = \{x \in \mathbf{R}^m : g(x) = 0\}$. Supponiamo anche che $\nabla g(x)$ abbia rango k per ogni $x \in Z$ (per cui Z è una sottovarietà regolare di dimensione $n = m - k$). Allora, se $x_0 \in Z$ è un punto di minimo o massimo relativo per $f|_Z$, esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ (moltiplicatori di Lagrange) tali che

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_0), \quad i = 1, \dots, m.$$

Vediamo la dimostrazione, che in classe non è stata svolta in dettaglio.

DIM.: Scriviamo $x \in \mathbf{R}^m$ come $(x', x'') \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$: permutando se necessario le coordinate possiamo supporre $\det \nabla_{x''} \phi(x_0) \neq 0$. Per il teorema delle funzioni

implicite esistono allora $r > 0$, un aperto $U \subset \mathbf{R}^n$ e $h : U \rightarrow \mathbf{R}^k$ tali che $Z \cap B_r(x_0) = \{(x, h(x)) : x \in U\}$.

Ne segue che, se $x_0 = (x'_0, x''_0)$, allora x'_0 è punto di massimo o minimo relativo per la funzione composta $F : x' \mapsto f(x', h(x'))$, da cui

$$0 = \nabla F(x'_0) = \nabla_{x'} f(x_0) + \nabla_{x''} f(x_0) \nabla h(x'_0).$$

Ora, sappiamo dal teorema delle funzioni implicite che $\nabla h(x'_0) = -(\nabla_{x''} g(x_0))^{-1} \nabla_{x'} g(x_0)$, da cui

$$(**) \quad 0 = \nabla_{x'} f(x_0) - \nabla_{x''} f(x_0) (\nabla_{x''} g(x_0))^{-1} \nabla_{x'} g(x_0).$$

Poniamo ora

$$(***) \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) := \nabla_{x''} f(x_0) (\nabla_{x''} g(x_0))^{-1}.$$

Moltiplicando (***) a destra per $\nabla_{x''} g(x_0)$ e scrivendo il risultato in coordinate, si ottiene la tesi (*) per $i = n + 1, \dots, m$. Invece, sostituendo (***) in (**) e scrivendo il risultato in coordinate, si ottiene (*) per $i = 1, \dots, n$. Q.E.D.

Lezione del 5/10/2005 (2 ore): In questa lezione vogliamo studiare le curve in \mathbf{R}^n , e cioè, con il linguaggio della volta scorsa, le sottovarietà parametrizzate di dimensione 1 in \mathbf{R}^n : per oggi, siamo soprattutto interessati al concetto di *curve equivalenti* ed alla definizione rigorosa della *lunghezza di una curva*.

Ricordiamo che una *curva continua* in \mathbf{R}^n è semplicemente un'applicazione continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, mentre γ si dice *regolare* se $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$ e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$. Per quanto visto la volta scorsa, una curva regolare è localmente una sottovarietà regolare di dimensione 1, il che giustifica il nome che abbiamo scelto!

Diamo subito una definizione di *equivalenza* tra curve: l'idea è che due curve sono equivalenti se corrispondono alla stessa "traiettoria", percorsa possibilmente con velocità diversa ma comunque lo stesso numero di volte:

DEFINIZIONE (Curve equivalenti): Due curve continue $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ si dicono equivalenti se esiste una funzione continua e strettamente monotona $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ tale che $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$ per ogni $t \in [a, b]$. Una tale h si chiama *cambio di parametrizzazione*.

Se poi h è strettamente crescente, diremo che le due curve hanno la stessa *orientazione*.

ESEMPLI: Le curve $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ e $\gamma_2 : [0, 4\pi^2] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\gamma_2(t) = (\cos \sqrt{t}, -\sin \sqrt{t})$ sono equivalenti ($h(t) = (2\pi - t)^2$) e hanno orientazione opposta. Invece, γ_1 non è equivalente a $\gamma_3 : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$\gamma_3(t) = (\cos t, \sin t)$ perché in quest'ultimo caso la circonferenza è percorsa due volte!

L'idea per definire la lunghezza di una curva è piuttosto semplice: approssimiamo la curva con delle spezzate, la cui lunghezza è facilmente calcolabile, e passiamo all'estremo superiore.

Cominciamo col definire una *poligonale inscritta* ad una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$. Se scegliamo un numero qualunque N di punti consecutivi su $[a, b]$ (diciamo $a = t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$), la corrispondente poligonale inscritta sarà la spezzata che si ottiene come unione dei segmenti $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$, $i = 1, \dots, N - 1$. Siccome la lunghezza del segmento $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$ è $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$, la lunghezza totale della poligonale inscritta in esame sarà

$$\sum_{i=1}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

e viene naturale la seguente

DEFINIZIONE (*Lunghezza di una curva*): La *lunghezza* di una curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ è l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte:

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| : a = t_1 < t_2 < \dots < t_N = b \right\}.$$

Una curva continua di lunghezza finita si dice *rettificabile*.

Si vede subito dalla definizione che la lunghezza di una curva non cambia se passiamo a considerare una curva equivalente: in altre parole, la lunghezza di una curva *non dipende dalla parametrizzazione*.

È anche interessante notare che esistono curve continue di lunghezza infinita (e quindi non rettificabili): un esempio "drammatico" è la curva a fiocco di neve di Von Koch, una curva continua con la proprietà che ogni suo sottoarco ha lunghezza infinita. Un esempio più semplice è il grafico della funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} t \cos(\frac{\pi}{t}) & t > 0, \\ 0 & t = 0, \end{cases}$$

una curva continua che abbiamo visto in classe avere lunghezza infinita: infatti, il segmento che congiunge i punti di ascissa $1/2k$ e $1/(2k+1)$ ha lunghezza maggiore di $2/(2k+1)$, e sommando su k si ottiene una serie divergente.

La definizione di lunghezza di una curva è semplice, naturale e soddisfacente da un punto di vista teorico...ma non è molto facile da utilizzare in

pratica. D'altra parte, almeno per una curva regolare, il senso fisico ci suggerisce che lo spazio percorso di possa ottenere integrando la velocità scalare (il modulo del vettore velocità) rispetto al tempo. Questo è vero per tutte le curve di classe \mathcal{C}^1 :

TEOREMA (Lunghezza di una curva \mathcal{C}^1): Se $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$, allora γ è rettificabile e si ha

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

DIM.: Chiamiamo $I(\gamma)$ il nostro integrale:

$$I(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Dobbiamo far vedere che $I(\gamma) = L(\gamma)$.

Consideriamo una qualunque partizione dell'intervallo $[a, b]$ tramite i punti $a = t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$. Per $i = 1, \dots, N - 1$ si ha

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt,$$

da cui

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt.$$

Sommando su i si ottiene

$$\sum_{i=1}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt = I(\gamma),$$

e passando al sup su tutte le poligonali inscritte otteniamo $L(\gamma) \leq I(\gamma)$.

Dimostreremo domani, un po' più faticosamente, la disuguaglianza opposta.

Lezione del 6/10/2005 (2 ore): Concludiamo la dimostrazione del teorema sulla lunghezza delle curve di classe \mathcal{C}^1 : ci resta da dimostrare che $I(\gamma) \leq L(\gamma)$. Per farlo, si usa l'uniforme continuità della funzione $\gamma'(t)$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$: grazie all'uniforme continuità di $\gamma'(t)$ su $[a, b]$, esiste $\delta > 0$ tale che $|t - s| < \delta$ implica $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon$.

Fissiamo poi una qualunque partizione dell'intervallo $[a, b]$ tramite i punti $a = t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$, in modo che si abbia $t_{i+1} - t_i < \delta$, $i = 1, \dots, N - 1$. Questo non è restrittivo: se raffiniamo una partizione di $[a, b]$ aggiungendo nuovi punti, la lunghezza della corrispondente poligonale cresce

grazie alla disuguaglianza triangolare. Ne segue che nell'estremo superiore della definizione di lunghezza di una curva, non è restrittivo considerare le sole poligonali i cui punti di suddivisione distano meno di δ .

Fissiamo $i = 1, \dots, N - 1$, $s \in (t_i, t_{i+1})$. Ricordando la nostra scelta di δ e la disuguaglianza triangolare si ottiene

$$\begin{aligned} |\gamma'(s)|(t_{i+1} - t_i) &= \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s) dt \right| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\gamma'(t) + \gamma'(s) - \gamma'(t)] dt \right| = \\ & \left| \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\gamma'(s) - \gamma'(t)] dt \right| \leq |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| + \varepsilon(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Dividiamo questa disuguaglianza per $(t_{i+1} - t_i)$ ed integriamola rispetto a s sull'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$: si ottiene

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(s)| ds \leq |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| + \varepsilon(t_{i+1} - t_i),$$

e sommando su i :

$$I(\gamma) \leq \sum_{i=1}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| + \varepsilon(b - a).$$

Passando al sup su tutte le possibili partizioni otteniamo $I(\gamma) \leq L(\gamma) + \varepsilon$, e per l'arbitrarietà di ε : $I(\gamma) \leq L(\gamma)$, che è la disuguaglianza che ci mancava. Q.E.D.

Utilizzando questa formula, è facile verificare che la lunghezza del grafico di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ è data da $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$, mentre la lunghezza di una curva espressa in coordinate polari $r(t), \theta(t)$ con $t \in [a, b]$ è data da $\int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + r^2(t)(\theta'(t))^2} dt$.

Un altro utile sottoprodotto del teorema riguarda la possibilità di parametrizzare per lunghezza d'arco una curva regolare. Precisamente, supponiamo che $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbf{R}^n)$ sia regolare, cioè che si abbia $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$.

Allora, tra tutte le possibili curve equivalenti a γ , ce n'è una, che chiameremo $\tilde{\gamma}(s)$, "preferibile a tutte le altre" perché viene percorsa con velocità costante uguale a 1.

Consideriamo infatti la funzione $s(t) : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$ data da

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(u)| du.$$

La funzione $s(t)$ rappresenta semplicemente la lunghezza dell'arco di curva compreso tra $\gamma(a)$ e $\gamma(t)$.

Si ha evidentemente $s'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ (la disuguaglianza stretta vale perché abbiamo supposto γ regolare), quindi $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$ è strettamente crescente e suriettiva. La sua funzione inversa $t(s) : [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ è strettamente crescente, con derivata $t'(s) = 1/|\gamma'(t(s))|$ (teorema di derivazione della funzione inversa). Ne deriva che la curva $\tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbf{R}^n$ data da $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ è una curva equivalente a γ ed è orientata nello stesso modo, ed evidentemente $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$ per ogni s : è appunto questa la curva equivalente a γ percorsa con velocità costante uguale a 1. Essa si chiama anche *parametrizzazione per lunghezza d'arco* della curva originale. Il parametro s indica semplicemente la lunghezza del tratto di curva tra $\gamma(a)$ e $\gamma(s)$, mentre si vede subito che il vettore $\tilde{\gamma}'(s)$ è un *vettore unitario (versore) tangente alla curva*.

Oltre a calcolare la lunghezza di una curva, possiamo anche integrarci sopra una funzione scalare: se $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua definita su un intorno di $\gamma([a, b])$, definiamo

$$\int_{\gamma} f(\gamma) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Per rappresentarci “fisicamente” il significato di questo integrale, possiamo immaginare che f rappresenti la densità lineare (massa per unità di lunghezza) di un filo non omogeneo: in tal caso, l'integrale ci darà la massa del filo.

Usando la formula del cambiamento di variabile per gli integrali, è facile verificare che il risultato non cambia se si sostituisce γ con una curva equivalente.

In classe, ci siamo anche divertiti a calcolare il lavoro compiuto da un campo di forze $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ per spostare un punto materiale lungo γ : esso è risultato essere

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

dove \cdot indica il prodotto scalare in \mathbf{R}^n . Vedremo meglio questo tipo di integrale la prossima volta, quando parleremo dell'integrazione di forme differenziali lungo una curva.

Lezione del 12/10/2005 (2 ore): In questa lezione ci occuperemo di forme differenziali e della loro integrazione lungo curve regolari. Come vedremo, la teoria è strettamente legata ad importanti concetti di fisica quali

il lavoro, la conservatività di un campo di forze, la sua irrotazionalità, il concetto di potenziale ecc.

Cominciamo col ricordare alcuni semplici concetti di algebra lineare: quello di spazio duale e quello di base duale.

DEFINIZIONI: Se V è uno spazio vettoriale reale, ricordiamo che il suo *spazio duale* V' è lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V in \mathbf{R} . In particolare, il duale $(\mathbf{R}^n)'$ di \mathbf{R}^n è l'insieme (lo spazio vettoriale) di tutte le applicazioni lineari $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Grazie alla linearità, un elemento $L \in (\mathbf{R}^n)'$ (detto anche *forma lineare*) è univocamente determinato dai suoi valori $L(e_i)$ sulla base canonica dello spazio. Ne segue che $(\mathbf{R}^n)'$ ha dimensione n , e che una sua base è data dalla *base duale* $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$, definita da

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Per ragioni che saranno chiare in seguito, a questa notazione per la base duale ne preferiremo un'altra: indicheremo di solito il funzionale lineare e_i^* con la scrittura dx_i .

DEFINIZIONE (Forma differenziale): Una forma differenziale (più precisamente una 1-forma differenziale) su un aperto $A \subset \mathbf{R}^n$ è un'applicazione da A a valori in $(\mathbf{R}^n)'$, ovvero un'applicazione che ad ogni punto di A associa una forma lineare. Grazie alla discussione precedente, è chiaro che una forma differenziale $\omega : A \rightarrow (\mathbf{R}^n)'$ si scrive in modo unico come

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i,$$

dove $\omega_i(x)$ sono funzioni reali dette *coefficienti della forma*. La regolarità di una forma è per definizione la regolarità dei suoi coefficienti: diremo che $\omega \in \mathcal{C}^0(A; (\mathbf{R}^n)')$ (risp. $\omega \in \mathcal{C}^1(A; (\mathbf{R}^n)')$, $\omega \in \mathcal{C}^k(A; (\mathbf{R}^n)')$) se i coefficienti sono continui, \mathcal{C}^1 , \mathcal{C}^k .

C'è un esempio particolarmente importante di forma differenziale che praticamente già conosciamo: il *differenziale* di una funzione $f \in \mathcal{C}^1(A; \mathbf{R})$. Consideriamo infatti la matrice jacobiana $\nabla f(x)$: essa è un vettore riga, cioè la matrice di un'applicazione lineare da \mathbf{R}^n in \mathbf{R} che evidentemente dipende dal punto x . In altre parole, essa è la matrice della forma differenziale

$$df(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i,$$

che si chiama *differenziale della funzione* f .

Si noti che con questa notazione, l'equazione del piano tangente al grafico di f in x_0 diventa $z = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$.¹⁰

Questa nozione di differenziale di una funzione spiega anche la notazione dx_i che abbiamo scelto per gli elementi della base duale di \mathbf{R}^n : se calcoliamo il differenziale della funzione $f(x) = x_i$ (proiezione sull' i -esima componente), si vede subito che $df(x) = 1 dx_i = dx_i$.

Ora che abbiamo a disposizione le forme differenziali, vi chiederete cosa possiamo farci. Ebbene, le possiamo integrare su una curva di classe \mathcal{C}^1 :

DEFINIZIONE: Sia A un aperto di \mathbf{R}^n , $\omega = \sum_i \omega_i dx_i$ una forma differenziale continua su A . Se $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ è una curva di classe \mathcal{C}^1 (o almeno di classe \mathcal{C}^1 a tratti), l'integrale di ω lungo γ si definisce come

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt.$$

Questo oggetto dovrebbe essere familiare: se ad ω associamo la funzione a valori vettoriali $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$ data da $F(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x))$, allora $\int_{\gamma} \omega$ non è altro che il lavoro compiuto dal campo di forze F lungo γ .

L'integrale di una forma lungo una curva non dipende dalla velocità con cui questa viene percorsa, anche se dipende dal verso di percorrenza: *PROPOSIZIONE:* Sia A un aperto di \mathbf{R}^n , $\omega \in C^0(A; (\mathbf{R}^n)')$. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow$

A , $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow A$ sono curve equivalenti, allora

$$\int_{\gamma} \omega = \pm \int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

Il segno a secondo membro è positivo se $\gamma, \tilde{\gamma}$ hanno la stessa orientazione, negativo in caso contrario.

La dimostrazione è immediata, usando la definizione e il teorema del cambio di variabili negli integrali.

Tra tutte le forme differenziali, un ruolo particolare è giocato da quelle che si scrivono come differenziale di una funzione:

¹⁰La formula è sostanzialmente identica a quella cui siamo abituati: $z = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$. La differenza è che il prodotto nella scrittura $\nabla f(x_0)(x - x_0)$ è un prodotto di matrici (in realtà di un vettore riga per un vettore colonna), mentre $df(x_0)(x - x_0)$ indica l'applicazione lineare $df(x_0)$ applicata al vettore $(x - x_0)$. La scrittura con ∇f è semplicemente la rappresentazione matriciale di quella con df ...

DEFINIZIONE (Forme esatte): Una forma differenziale $\omega \in \mathcal{C}^0(A; (\mathbf{R}^n)')$ si dice *esatta* se esiste una funzione $f \in C^1(A; \mathbf{R})$ tale che $\omega(x) = df(x)$ per ogni $x \in A$. Una tale funzione f si chiama *primitiva* di ω .

Se vediamo una forma come un campo di vettori (nella maniera detta sopra: alla forma $\omega = \sum_i \omega_i dx_i$ facciamo corrispondere il campo di vettori $F = \sum_i \omega_i e_i$, la forma è esatta se e solo se il campo di vettori è un gradiente: l'esattezza di una forma differenziale equivale dunque alla *conservatività* del campo di vettori.

Un fatto che ci è familiare dal corso di fisica, è l'indipendenza del lavoro fatto da un campo conservativo dal percorso: il lavoro dipende solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo. In effetti, vale la seguente

PROPOSIZIONE: Se ω è una forma differenziale esatta (di classe \mathcal{C}^0) su un aperto A di \mathbf{R}^n e $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ è una qualunque curva di classe \mathcal{C}^1 , allora, detta f una qualunque primitiva di ω , si ha

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

In particolare, se la curva è chiusa (e cioè $\gamma(a) = \gamma(b)$, allora l'integrale è nullo.

DIM.: Visto che $\omega = df$ si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

La penultima uguaglianza viene dal teorema di derivazione di funzione composta. Q.E.D.

Vedremo la prossima volta che vale il viceversa di questo teorema: una forma differenziale è esatta se e soltanto se il suo integrale su *tutti* i cammini chiusi si annulla. Troveremo anche una caratterizzazione dell'esattezza attraverso le *derivate* di ω , valida a patto che la forma sia \mathcal{C}^1 e che l'aperto A soddisfi certe ipotesi.

Lezione del 13/10/2005 (2 ore): Il primo risultato di oggi fornisce una caratterizzazione integrale delle forme esatte (e quindi dei campi conservativi): una forma è esatta se e solo se il suo integrale su tutti i cammini chiusi è nullo, ovvero se il suo integrale su una curva qualunque dipende soltanto dagli estremi della curva stessa. A questo scopo, è utile la seguente definizione di aperto connesso per archi.

DEFINIZIONE: Un aperto $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ esiste una curva $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b]; A)$ ¹¹ tale che $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Ogni aperto di \mathbf{R}^n può essere scritto come unione di (al più) una successione di aperti disgiunti, ciascuno dei quali è connesso per archi.

TEOREMA: Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ un aperto, $\omega \in C^0(A; (\mathbf{R}^n)')$ una forma differenziale. Le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

(i) ω è esatta;

(ii) data una qualunque curva $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b]; A)$, il valore dell'integrale $\int_{\gamma} \omega$ dipende soltanto da $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.

(iii) data una qualunque curva chiusa $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b]; A)$ si ha $\int_{\gamma} \omega = 0$.

DIM.: Abbiamo visto la volta scorsa che (i) implica (ii) e (iii): infatti, se f è una primitiva di ω e γ è una curva in A di classe \mathcal{C}^1 , si ha $\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, per cui il valore dell'integrale dipende solo dagli estremi della curva, ed è 0 se la curva è chiusa.

Mostriamo che (iii) \Rightarrow (ii): supponiamo che ω abbia integrale chiuso su tutte le curve chiuse e prendiamo due curve $\gamma, \tilde{\gamma}$ con gli stessi estremi. Cambiando eventualmente parametrizzazione (ma non orientazione), possiamo supporre che sia $\gamma, \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow A$ con $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ e $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$.

Consideriamo poi la curva $\tilde{\tilde{\gamma}} : [0, 2] \rightarrow A$ data da

$$\tilde{\tilde{\gamma}}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ \tilde{\gamma}(2-t) & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}$$

Questa è una curva chiusa, che si ottiene percorrendo dapprima γ , e poi $\tilde{\gamma}$ in senso inverso: per ipotesi si avrà $\int_{\tilde{\tilde{\gamma}}} \omega = 0$, ma d'altra parte (per quanto abbiamo visto sulla dipendenza dell'integrale di una forma dalla sua parametrizzazione) abbiamo anche

$$0 = \int_{\tilde{\tilde{\gamma}}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\tilde{\gamma}} \omega,$$

che è quel che volevamo.

¹¹Grazie al fatto che A è aperto, ci sono dei risultati di approssimazione grazie ai quali sarebbe la stessa cosa richiedere che γ sia soltanto continua (A connesso per *archi continui*), oppure che γ sia una spezzata (A connesso per *poligonalità*).

Mostriamo infine che (ii) implica (i). Intanto, possiamo supporre che A sia connesso per archi: se non lo è, lo decomponiamo in una successione di aperti disgiunti connessi per archi, e per mostrare che ω ammette una primitiva sarà sufficiente farlo vedere per ciascuno degli aperti della suddivisione.

Fissiamo $x_0 \in A$: se $x \in A$ è un qualunque altro punto, esiste una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ con $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. Definiamo allora “d’ufficio” $f(x) = \int_{\gamma} \omega$: questa è una ben definita funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, in quanto il valore dell’integrale non dipende dalla scelta della curva γ , ma solo dai suoi due estremi, uno dei quali è sempre x_0 mentre l’altro è x .

Facciamo poi vedere che $df(x) = \omega(x)$ per ogni $x \in A$: se scriviamo $\omega(x) = \sum_i \omega_i dx_i$, questo equivale a mostrare che $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x)$ per ogni $x \in A$ e per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. Fissiamo dunque x ed una direzione e_i : il rapporto incrementale di f in direzione e_i e con incremento h è dato da $\frac{f(x+he_i) - f(x)}{h}$, dove f è definita come sopra. Fissata una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ con $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$ con la quale possiamo calcolare $f(x)$, per calcolare $f(x + he_i)$ possiamo scegliere qualunque curva che congiunge x_0 a $x + he_i$... e decidiamo di scegliere la seguente: usiamo dapprima γ per andare da x_0 a x , dopodiché andiamo da x a $x + he_i$ lungo il segmento r che li congiunge (parametrizzato con velocità costante). Si vede subito che, nel calcolo del rapporto incrementale, l’integrale lungo γ si cancella: rimaniamo allora con l’espressione

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_r \omega.$$

Una parametrizzazione di $r : [0, 1] \rightarrow A$ è data da $r(t) = x + the_i$: calcolando esplicitamente l’integrale otteniamo

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 \omega_i(x + the_i) h dt = \omega_i(x + \xi he_i),$$

dove $\xi \in [0, 1]$ esiste grazie al teorema della media integrale. Passando al limite per $h \rightarrow 0$ si ottiene $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x)$. Q.E.D.

Data una forma “in carne ed ossa”, il teorema appena visto non è molto pratico per verificarne l’esattezza... È pur vero che potremmo tentare di calcolarne una primitiva, ma probabilmente saremmo molto più propensi a svolgere un esercizio di questo tipo se sapessimo già se la forma è esatta o meno!

Per fortuna, per le forme di classe \mathcal{C}^1 esiste una condizione necessaria per l’esattezza che spesso diventa sufficiente: la *chiusura*.

DEFINIZIONE: Una forma differenziale $\omega : A \rightarrow (\mathbf{R}^n)'$, di classe \mathcal{C}^1 sull’a-

perto A di \mathbf{R}^n , $\omega(x) = \sum_i \omega_i dx_i$ si dice *chiusa* se e soltanto se

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

PROPOSIZIONE: Se A è un aperto di \mathbf{R}^n e $\omega \in C^1(A; (\mathbf{R}^n)')$ è una forma esatta, allora ω è chiusa.

DIM.: La dimostrazione è un'immediata conseguenza del teorema di Schwarz: se $\omega = df$, la definizione di chiusura richiede semplicemente l'indipendenza dall'ordine di derivazione delle derivate seconde di f . Q.E.D.

Purtroppo, il viceversa della proposizione appena vista non è vero: esistono forme chiuse che non sono esatte (e ne vedremo un esempio la prossima volta). D'altra parte, se l'aperto A soddisfa certe ipotesi, allora ogni forma chiusa è esatta: la prossima volta discuteremo quali condizioni si debbano mettere su A affinché questo sia vero.

Lezione del 19/10/2005 (2 ore): Cominciamo la lezione verificando che esistono forme differenziali chiuse che non sono esatte:

ESEMPIO: Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

definita sull'aperto $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Si verifica subito che la forma è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

D'altra parte la forma non è esatta: sulla curva chiusa $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow A$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ si ha $\int_\gamma \omega = 2\pi \neq 0$.

Il fatto che sull'aperto A dell'esempio esistano forme chiuse che non sono esatte, dipende dalle caratteristiche topologiche di A e precisamente dalla presenza di un "buco" (l'origine). In particolare, se A soddisfa certe condizioni (se è *stellato*, o più in generale se è *semplicemente connesso*), allora tutte le forme chiuse sono esatte.

Per studiare le forme chiuse sugli aperti "senza buchi", avremo bisogno del seguente teorema di derivazione sotto il segno di integrale, utilissimo anche in numerose altre situazioni:

TEOREMA (di derivazione sotto il segno di integrale): Sia $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua, con derivata rispetto alla seconda variabile continua. Allora la funzione

$$g(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

è derivabile su $[c, d]$ e si ha

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

DIM.: Sia $x_0 \in [c, d]$ fissato, e consideriamo il rapporto incrementale $\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$. Per il teorema del valor medio esiste un numero $\xi(t, h)$ compreso tra 0 e h tale che

$$\frac{f(t, x_0 + h) - f(t, x_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0 + \xi(t, h)) :$$

scrivendo $\xi(t, h)$ abbiamo voluto sottolineare la dipendenza di ξ sia da t che da h . Si ha allora

$$(*) \quad \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0 + \xi(t, h)) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt + \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0 + \xi(t, h)) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) \right) dt$$

Il teorema risulta dimostrato se riusciamo a far vedere che l'ultimo integrale in (*) tende a 0 per $h \rightarrow 0$: a questo scopo usiamo l'uniforme continuità della funzione $\frac{\partial f}{\partial x}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$: grazie a questa uniforme continuità esiste $\delta > 0$ tale che se $|(t, x) - (\tilde{t}, \tilde{x})| < \delta$ si ha

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{t}, \tilde{x}) \right| < \varepsilon.$$

Se $h < \delta$ si avrà $|(t, x_0) - (t, x_0 + \xi(t, h))| < \delta$ e quindi

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0 + \xi(t, h)) \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b],$$

per cui l'ultimo integrale in (*) sarà minore di $\varepsilon(b-a)$: il che prova che esso tende a 0 per $h \rightarrow 0$. Q.E.D.

Diamo subito la definizione di aperto stellato:

DEFINIZIONE: Un sottinsieme $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice *stellato* rispetto a $x_0 \in A$ se per ogni $x \in A$ il segmento di estremi x_0 e x è tutto contenuto in A .

TEOREMA (Forme chiuse su aperti stellati): Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ un aperto stellato rispetto ad un suo punto, $\omega \in \mathcal{C}^1(A; (\mathbf{R}^n)')$ una forma chiusa su A . Allora ω è esatta: esiste $f \in \mathcal{C}^2(A; \mathbf{R})$ tale che $\omega(x) = df(x)$ per ogni $x \in A$.

DIM.: A meno di una traslazione, possiamo supporre che A sia stellato rispetto all'origine. Allora, per ogni fissato $x \in A$, il segmento che congiunge l'origine ad x è tutto contenuto in A : una parametrizzazione di tale segmento è data da $r^x : t \mapsto tx$ con $t \in [0, 1]$.

Definiamo la nostra “candidata primitiva” nel modo seguente:

$$f(x) = \int_{r^x} \omega.$$

Più esplicitamente, in termini delle componenti di ω si avrà

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) x_i dt.$$

Deriviamo sotto il segno di integrale rispetto a x_j (siccome stiamo considerando tutte le altre componenti di x come parametri fissati, è perfettamente legittimo usare il nostro teorema in due sole variabili...), ed utilizziamo l'ipotesi che ω sia chiusa. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \sum_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(tx) tx_i + \omega_j(tx) dt = \int_0^1 \sum_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(tx) tx_i + \omega_j(tx) dt \\ &= \int_0^1 t \frac{d}{dt}(\omega_j(tx)) + \omega_j(t, x) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t\omega_j(tx)) dt = [t\omega_j(tx)]_0^1 = \omega_j(x). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lezione del 20/10/2005 (2 ore): Le forme chiuse sono tutte esatte in una classe di insiemi molto più ampia degli aperti stellati: gli aperti *semplicemente connessi*. Moralmemente, essi sono aperti in cui ogni curva chiusa si può deformare con continuità in un punto... in dimensione 2, questi sono esattamente gli aperti “senza buchi”.

Per dare una definizione precisa, abbiamo bisogno del concetto di omotopia tra due curve:

DEFINIZIONE: Sia A un aperto di \mathbf{R}^n . Due curve chiuse continue $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow A$ si dicono *omotope in A* se esiste una funzione continua $\tilde{\gamma} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$ (detta omotopia) tale che $\tilde{\gamma}(t, 0) = \gamma(t)$, $\tilde{\gamma}(t, 1) = \eta(t)$ per ogni

$t \in [a, b]$ e tale che le curve $t \mapsto \tilde{\gamma}(t, s)$ siano chiuse: $\tilde{\gamma}(a, s) = \tilde{\gamma}(b, s)$ per ogni $s \in [0, 1]$. In sostanza, $\tilde{\gamma}(t, s)$ è una famiglia di curve, parametrizzate in modo continuo dal parametro $s \in [0, 1]$, che “interpolano” tra la curva iniziale γ e la curva finale η .¹²

L'aperto A si dice *semplicemente connesso* se è connesso per archi, e se ogni curva chiusa $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ è omotopa (in A) ad una curva costante.

ESEMPI: Un aperto stellato è semplicemente connesso: se A è stellato rispetto all'origine e $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ è una curva chiusa, un'omotopia tra γ e il cammino costante 0 è data da $\tilde{\gamma}(t, s) = (1 - s)\gamma(t)$.

Invece, $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non lo è: ogni cammino che “giri” attorno all'origine non è contraibile con continuità ad un punto. Invece, $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0)\}$ è semplicemente connesso (abbiamo una dimensione in più che ci consente di contrarre una curva chiusa evitando l'origine...).

Mostriamo, per finire la nostra discussione, che l'integrale di una forma chiusa su due curve chiuse omotope è lo stesso: in particolare, le forme chiuse su un aperto semplicemente connesso sono esatte.

TEOREMA (Forme chiuse su aperti semplicemente connessi): Sia A un aperto di \mathbf{R}^n , $\omega \in \mathcal{C}^1(A; (\mathbf{R}^n)')$ una forma chiusa. Se $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow A$ sono due curve chiuse¹³ di classe \mathcal{C}^2 omotope in A , allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\eta} \omega.$$

In particolare, se A è semplicemente connesso, l'integrale di ω su ogni curva chiusa regolare è nullo (perché evidentemente l'integrale di ω su una curva costante vale 0): dunque ω è esatta.

DIM.: Sia $\tilde{\gamma} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$ un'omotopia tra γ e η , e consideriamo la funzione di una variabile

$$g(s) := \int_{\tilde{\gamma}(\cdot, s)} \omega = \int_0^1 \sum_i \omega_i(\tilde{\gamma}(t, s)) \frac{\partial \tilde{\gamma}_i}{\partial t}(t, s) dt.$$

Se riusciamo a dimostrare che $g'(s) = 0$ per ogni $s \in (0, 1)$, allora g è costante e la tesi segue immediatamente, perché $g(0) = \int_{\gamma} \omega$, $g(1) = \int_{\eta} \omega$.

Supponiamo, senza perdita di generalità, che $\tilde{\gamma}$ sia di classe \mathcal{C}^2 all'interno del rettangolo (vedi nota alla definizione di omotopia). Usiamo il teorema di

¹²Se γ, η hanno una maggiore regolarità, per esempio se sono \mathcal{C}^2 , non è restrittivo chiedere che l'omotopia $\tilde{\gamma}$ abbia anch'essa quella regolarità.

¹³Cioè $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\eta(a) = \eta(b)$.

derivazione sotto il segno di integrale ed integriamo per parti: si ottiene

$$g'(s) = \int_a^b \sum_{ij} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(\tilde{\gamma}) \frac{\partial \tilde{\gamma}_j}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\gamma}_i}{\partial t} dt + \int_a^b \sum_i \partial \omega_i(\tilde{\gamma}) \frac{\partial^2 \tilde{\gamma}_i}{\partial t \partial s} dt =$$

$$\int_a^b \sum_{ij} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(\tilde{\gamma}) \frac{\partial \tilde{\gamma}_j}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\gamma}_i}{\partial t} dt - \int_a^b \sum_{ij} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(\tilde{\gamma}) \frac{\partial \tilde{\gamma}_i}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\gamma}_j}{\partial t} dt + \left[\sum_i \omega_i(\tilde{\gamma}) \frac{\partial \tilde{\gamma}_i}{\partial s} \right]_a^b$$

L'ultima espressione si annulla: usando l'ipotesi che ω sia chiusa, si vede subito che i primi due integrali si cancellano. Invece, l'espressione tra parentesi quadre vale 0 perché $\tilde{\gamma}(a, s) = \tilde{\gamma}(b, s)$ per ogni s (e quindi la stessa cosa vale per la derivata parziale di $\tilde{\gamma}$ rispetto a s). Q.E.D.

Lezione del 9/11/2005 (2 ore): In questa lezione vogliamo introdurre la teoria dell'integrale secondo Riemann in \mathbf{R}^n : vedremo che si tratta di una generalizzazione piuttosto semplice e pulita di quanto visto in dimensione 1. D'altra parte, vedremo presto che per certi scopi (più o meno non appena si cerca di uscire dall'ambito delle funzioni continue...) l'integrale di Riemann non è più sufficiente: saremo quindi costretti a passare alla teoria ben più complessa ma anche molto più soddisfacente dell'integrale di Lebesgue.

Cominciamo col dare una definizione di funzione a scala simile a quella che avevamo in una variabile:

DEFINIZIONE: Un *intervallo* o *rettangolo* in \mathbf{R}^n è un sottinsieme $I \subset \mathbf{R}^n$ che sia prodotto cartesiano di intervalli unidimensionali: $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$. Gli intervalli unidimensionali di cui si fa il prodotto possono essere anche chiusi, oppure chiusi in una sola delle due estremità. La *misura* di un intervallo I è per definizione il numero

$$|I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Si vede subito che per $n = 2$ il nostro intervallo è un rettangolo con lati paralleli agli assi, e la sua misura coincide con l'area. Invece, per $n = 3$, I sarà un parallelepipedo e la sua misura coincide con il volume.

Una funzione $\phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ si dice *a scala* se esistono un numero finito di intervalli $I_1, \dots, I_N \subset \mathbf{R}^n$, che abbiano due a due in comune solo punti della frontiera, tali che $\phi(x)$ assume un valore costante c_i sulla parte interna di ciascun intervallo I_i , mentre $\phi(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{(I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N)}$. Non facciamo volutamente nessuna assunzione sui valori di ϕ sulle frontiere degli intervalli (che tanto non cambierebbero l'integrale di ϕ ...). Definiamo,

in modo abbastanza naturale, l'integrale della funzione a scala ϕ come segue:

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx = \sum_{i=1}^N c_i |I_i|.$$

Il significato geometrico dell'integrale è abbastanza evidente, almeno per $n = 2$: si tratta del volume del sottografico di ϕ , con segno: le parti di sottografico che giacciono sotto il piano $z = 0$ vengono contante col segno meno.

Esattamente come succedeva in una variabile, possiamo verificare che le funzioni a scala formano uno spazio vettoriale su \mathbf{R} e che l'integrale è lineare e monotono (nel senso che $\phi_1 \leq \phi_2$ implica $\int \phi_1 \leq \int \phi_2$).

A questo punto, abbiamo tutti gli ingredienti per definire l'integrale di Riemann di una funzione definita su \mathbf{R}^n .

DEFINIZIONE (Integrale di Riemann): Sia $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione limitata (cioè esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$), nulla al di fuori di un insieme limitato (cioè esiste $R > 0$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $|x| \geq R$). Allora gli integrali superiore ed inferiore secondo Riemann di f si definiscono rispettivamente come

$$\begin{aligned} \overline{\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx} &= \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) dx : \phi \text{ a scala, } \phi \geq f \right\}, \\ \underline{\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx} &= \sup \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x) dx : \psi \text{ a scala, } \psi \leq f \right\}. \end{aligned}$$

Se questi due numeri coincidono, diremo che la funzione f è integrabile secondo Riemann (ed indicheremo il suo integrale senza mettere barrette sopra o sotto il segno di integrale...).

Visto che la definizione è praticamente identica, tutto quel che valeva per l'integrale di Riemann in \mathbf{R} rimane vero: le funzioni integrabili secondo Riemann formano uno spazio vettoriale, e l'integrale è lineare e monotono. Inoltre, f è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare due funzioni a scala ϕ, ψ con $\psi \leq f \leq \phi$ tali che $\int_{\mathbf{R}^n} (\phi - \psi) dx < \varepsilon$.

Dato un insieme limitato $A \subset \mathbf{R}^n$, val la pena di definire anche l'integrale (su A) e l'integrabilità di una funzione limitata $f : A \rightarrow \mathbf{R}$: diciamo che f è integrabile secondo Riemann su A e ne definiamo l'integrale tramite

$$\int_A f(x) dx := \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}(x) dx,$$

dove $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ coincide con f dentro A , mentre vale 0 al di fuori di A , se e solo se la funzione estesa \tilde{f} è integrabile secondo Riemann. Vedremo nel

seguito che questo è garantito se per esempio f è *continua*, e se l'insieme A è sufficientemente regolare (precisamente, A deve essere *misurabile secondo Peano-Jordan*).

Cominciamo col dimostrare che una funzione continua su un intervallo chiuso di \mathbf{R}^n è integrabile:

PROPOSIZIONE: Sia $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ un rettangolo chiuso di \mathbf{R}^n , $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile secondo Riemann su Q .

DIM.: La dimostrazione è praticamente identica a quella dell'integrabilità di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato di \mathbf{R} .

Per il teorema di Weierstrass f è limitata, mentre per il teorema di Heine-Cantor essa è uniformemente continua su Q . Ne segue che per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare $\delta > 0$ tale che se $x, y \in Q$, $|x - y| \leq \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Decomponiamo l'intervallo Q in un numero finito di intervalli chiusi I_1, I_2, \dots, I_N che si intersechino due a due al più sulla frontiera, e tali che $\text{diam}(I_i) \leq \delta^{14}$, $i = 1, \dots, N$. Definiamo due funzioni a scala ϕ, ψ con $\psi \leq f \leq \phi$, entrambe nulle fuori da Q e tali che $\psi(x) = m_i = \min\{f(x) : x \in I_i\}$ per ogni x nella parte interna di I_i , $\phi(x) = M_i = \max\{f(x) : x \in I_i\}$ per x nella parte interna di I_i . Per la nostra scelta di δ , abbiamo $M_i - m_i \leq \varepsilon$ ($i = 1, \dots, N$), da cui segue subito che

$$\int_{\mathbf{R}^n} (\phi(x) - \psi(x)) dx \leq \varepsilon |Q|,$$

che implica l'integrabilità di f . Q.E.D.

Se vogliamo usare insiemi di integrazione più generali degli intervalli (dei rettangoli...), è necessaria una certa cura: l'esempio seguente mostra che una funzione regolarissima (addirittura costante!) definita su un insieme A "cattivo" può non essere integrabile:

ESEMPIO/ESERCIZIO: Si consideri l'insieme $A \subset \mathbf{R}^2$ dato da

$$A = ([0, 1] \times [0, 1]) \cap (\mathbf{Q} \times \mathbf{Q})$$

e la funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ che vale costantemente 1 in A . Mostrare che f non è integrabile secondo Riemann su A .

I buoni insiemi di integrazione sono precisamente quelli che sono *misurabili secondo Peano-Jordan*: sono insiemi la cui area si approssima bene, sia da fuori che da dentro, con unioni finite di intervalli.

¹⁴Ricordiamo che $\text{diam}(A) := \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$.

DEFINIZIONE (Insieme misurabile secondo Peano-Jordan): Un sottinsieme $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice misurabile secondo Peano-Jordan se è limitato e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un numero finito di intervalli $I_1, \dots, I_N, J_1, \dots, J_K \subset \mathbf{R}^n$ tali che gli I_i hanno due a due in comune solo punti della frontiera, i J_i hanno due a due in comune solo punti della frontiera,

$$\bigcup_{i=1}^N I_i \subset A \subset \bigcup_{i=1}^K J_i$$

e infine

$$\sum_{i=1}^K |J_i| - \sum_{i=1}^N |I_i| \leq \varepsilon.$$

In tal caso, la *misura di Peano-Jordan* di A si definisce come

$$\begin{aligned} |A| &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^N |I_i| : I_i \text{ due a due con interni disgiunti, } \bigcup_{i=1}^N I_i \subset A \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^K |J_i| : J_i \text{ due a due con interni disgiunti, } \bigcup_{i=1}^K J_i \supset A \right\}. \end{aligned}$$

È facile vedere che un rettangolo è misurabile secondo Peano-Jordan, mentre l'insieme di punti a coordinate razionali considerato nell'esempio non lo è. Nel piano, sono misurabili secondo Peano-Jordan gli insiemi dati dalla parte di piano compresa tra i grafici di due funzioni di una variabile integrabili secondo Riemann:

ESERCIZIO: Siano $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni di una variabile, integrabili secondo Riemann e con $g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Consideriamo l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}$. Mostrare che A è misurabile secondo Peano-Jordan e si ha

$$|A| = \int_a^b (h(x) - g(x)) dx.$$

Un insieme A di questo tipo si chiama *semplice rispetto all'asse delle x* ... Gli insiemi semplici rispetto all'asse delle y si definiscono in modo analogo, e ci sono anche naturali generalizzazioni in dimensione più alta.

TEOREMA: Sia A un insieme limitato e misurabile secondo Peano-Jordan, $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua e limitata. Allora f è integrabile secondo Riemann su A .

DIM.: Sia $M = \sup_A |f(x)|$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome A è per ipotesi misurabile secondo Peano-Jordan, troviamo due insiemi B, C con $B \subset A \subset C$ tali

che B e C sono unioni finite di intervalli chiusi e $|C \setminus B| < \varepsilon$. Si noti che anche l'insieme $|C \setminus B|$ è unione finita di intervalli (con parti interne due a due disgiunte).

Abbiamo visto che una funzione continua su un intervallo chiuso (e quindi anche su una unione finita di intervalli chiusi quale è B) è integrabile secondo Riemann: possiamo dunque trovare due funzioni a scala ϕ, ψ tali che $\psi(x) \leq f(x) \leq \phi(x)$ per ogni $x \in B$ e $\int_B (\phi - \psi) dx < \varepsilon$. Estendiamo ϕ e ψ a due funzioni a scala definite su tutto \mathbf{R}^n ponendole uguali a 0 fuori da C , e uguali rispettivamente a M e a $-M$ su $C \setminus B$. Otteniamo due funzioni a scala $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ con $\tilde{\psi}(x) \leq \tilde{f}(x) \leq \tilde{\phi}(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$. Inoltre, per il nostro assunto sulla misura di $C \setminus B$, abbiamo $\int_{\mathbf{R}^n} (\tilde{\phi} - \tilde{\psi}) dx < \varepsilon + 2M\varepsilon$. Q.E.D.

Lezione del 10/11/2005 (2 ore): Concludiamo l'analisi delle proprietà fondamentali dell'integrale di Riemann in più variabili con il seguente teorema "alla Fubini", che riduce il calcolo di un integrale in \mathbf{R}^n a quello di n integrali in 1 variabile. Per semplicità, diamo l'enunciato solo in dimensione 2:

TEOREMA (di riduzione degli integrali doppi): Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione limitata, nulla fuori da un limitato ed integrabile secondo Riemann. Supponiamo che abbia senso il seguente integrale iterato:

$$I = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx \right) dy$$

(cioè per ogni fissata y la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è integrabile secondo Riemann, e inoltre la funzione $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx$ è anch'essa integrabile secondo Riemann)¹⁵. Allora

$$I = \int_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy.$$

[E se poi ha senso anche l'integrale fatto integrando prima rispetto a y e poi rispetto a x , anche questo è uguale ai primi due].

DIM.: Un semplice conto permette di verificare che il teorema è vero se $f(x, y)$ è la funzione caratteristica di un intervallo, cioè se esiste un intervallo I tale che

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in I, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

¹⁵Si noti che i nostri integrali unidimensionali NON sono integrali impropri, perché f si annulla fuori da un insieme limitato

Siccome gli integrali sono lineari, segue subito che il teorema è vero per le funzioni a scala, che non sono altro che combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli.

Passiamo al caso generale: sia $f(x, y)$ come nelle ipotesi del teorema. Poiché f è integrabile secondo Riemann, esistono due funzioni a scala $\psi \leq f \leq \phi$ tali che (*) $\int_{\mathbf{R}^2} (\phi - \psi) dx dy < \varepsilon$. Per monotonia dell'integrale (sia in \mathbf{R} che in \mathbf{R}^2) abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^2} \psi(x, y) dx dy &\leq \int_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy \leq \int_{\mathbf{R}^2} \phi(x, y) dx dy \\ &\parallel & \parallel \\ \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \psi(x, y) dx \right) dy &\leq \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx \right) dy \leq \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \phi(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza tra i membri di sinistra e di destra delle due righe segue dal fatto che il teorema è vero per le funzioni a scala. Poiché i membri di destra e di sinistra differiscono meno di ε , che può essere preso piccolo a piacere, le due quantità centrali devono essere uguali. Q.E.D.

OSSERVAZIONE: Esistono semplici esempi (ne abbiamo visto uno in classe) che mostrano come il fatto che l'integrale iterato abbia senso è un'ipotesi del teorema, e non segue necessariamente dall'integrabilità secondo Riemann della funzione di due variabili. Questo non è un gran male nel calcolo effettivo di integrali, perché l'ipotesi si verifica automaticamente mentre si esegue il conto. D'altra parte, si tratta di una cosa antipatica dal punto di vista teorico: vedremo comunque che l'analogo teorema per l'integrale di Lebesgue (il teorema di Fubini-Tonelli) ha un'enunciato molto più pulito.

Chiuso per il momento l'argomento dell'integrale di Riemann, vogliamo passare ora ad una teoria molto più generale e soddisfacente da molti punti di vista, quella dell'integrale di Lebesgue. La potenza della nuova teoria, che giustificherà le complicazioni formali che dovremo superare, si vedrà soprattutto nei teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Prima però di passare a definire la misura e l'integrale di Lebesgue, è necessario impratichirsi con un concetto che ricorre spessissimo in questo argomento: quello di insieme numerabile. Questo dipende a sua volta da un'importante osservazione di Cantor: non tutti gli insiemi infiniti "hanno lo stesso numero di elementi"!

DEFINIZIONE (Cardinalità, insieme numerabile): Diciamo che due insiemi A, B hanno la stessa cardinalità (e scriviamo $\#(A) = \#(B)$) se esiste una funzione invertibile $f : A \rightarrow B$, cioè se i due insiemi possono essere in biezione.

Un insieme A si dice *numerabile* se può essere messo in bigezione con l'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali, cioè se esiste una funzione bigettiva $f : \mathbf{N} \rightarrow A$. (Ancora in altre parole, A è l'immagine di una successione iniettiva... che costituisce un' "enumerazione" dei suoi elementi!)

Gli insiemi numerabili sono i "più piccoli" insiemi infiniti: ogni insieme infinito contiene un sottinsieme numerabile.

Quando però applichiamo la definizione di cardinalità a insiemi infiniti, dobbiamo imparare a convivere con il "paradosso" che un insieme può essere equipotente ad una sua parte propria: per esempio, l'insieme \mathbf{N} dei numeri naturali ha la stessa cardinalità dell'insieme dei soli numeri pari (possono essere messi in bigezione tramite la funzione $n \mapsto 2n$). A sua volta, \mathbf{N} è equipotente a \mathbf{Z} , e anche all'insieme \mathbf{Z}^2 dei punti del piano con entrambe le coordinate intere (la bigezione può essere ottenuta tramite un opportuno "percorso a spirale")!

Ancora più sorprendentemente, \mathbf{N} può essere messo in bigezione con \mathbf{Q} : infatti, i razionali possono essere identificati con il sottinsieme di \mathbf{Z}^2 composto dalle coppie (m, n) con m e n primi tra loro e $n > 0$: basta quindi "saltare tutti i punti che non servono" nella spirale che permette di enumerare tutti i punti di \mathbf{Z}^2 !

È molto naturale anche la seguente

DEFINIZIONE: Diciamo che $\#(A) \leq \#(B)$ (la cardinalità di A è minore o uguale alla cardinalità di B) se esiste una funzione *iniettiva* $f : A \rightarrow B$.

In particolare, un sottinsieme di A avrà certamente cardinalità minore o uguale ad A .

Questa relazione di "minore o uguale" per le cardinalità è evidentemente riflessiva e transitiva. Il fatto che valga anche la proprietà antisimmetrica (e quindi essa sia una vera relazione d'ordine) è vero ed estremamente utile, ma non ovvio:

TEOREMA (di Bernstein-Schroeder): Se $\#(A) \leq \#(B)$ e $\#(B) \leq \#(A)$, allora $\#(A) = \#(B)$.

Omettiamo la dimostrazione del teorema, ma ne vediamo subito un'applicazione che ne rende evidente la potenza.

Innanzitutto, è facile vedere che \mathbf{R} è equipotente a qualunque intervallo aperto (a, b) : una funzione invertibile tra $(-\pi/2, \pi/2)$ e \mathbf{R} è data per esempio da $x \mapsto \tan x$, e il caso generale segue componendo con un opportuno "cambio di variabile" affine. Molto più difficile è invece costruire una funzione invertibile tra un intervallo *chiuso* $[a, b]$ e \mathbf{R} (provateci un po'...).

Il teorema di Bernstein ci dice però che essa esiste: infatti, una funzione iniettiva di $[-\pi, \pi]$ in \mathbf{R} è data dall'inclusione, mentre una funzione iniettiva di \mathbf{R} in $[-\pi, \pi]$ è per esempio $x \mapsto \arctan x$.

In conclusione, la retta reale \mathbf{R} è equipotente a qualunque intervallo o semiretta (perché?). Analogamente, il piano cartesiano \mathbf{R}^2 è equipotente al quadrato $(0, 1) \times (0, 1)$...e il quadrato è equipotente al segmento $(0, 1)$! Infatti, è evidente che $\#((0, 1)) \leq \#((0, 1) \times (0, 1))$, basta prendere la mappa iniettiva $x \mapsto (x, 1/2)$. Viceversa, una mappa iniettiva dal quadrato nel segmento può essere ottenuta nel modo seguente: se (x, y) è un punto del quadrato, possiamo scrivere x e y in modo unico come numeri decimali infiniti (se conveniamo di evitare code di tutti 9): $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, $y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$. Per ottenere la nostra mappa iniettiva, mandiamo (x, y) nel numero decimale $0, a_1 b_2 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$ ottenuto alternando le cifre di x e y .

Sorge a questo punto il dubbio che \mathbf{N} e \mathbf{R} siano equipotenti! Questo però non è vero: la cardinalità di \mathbf{R} (che si chiama “cardinalità del continuo”) è *strettamente maggiore* del numerabile. Vediamo la dimostrazione data da Cantor di questo fatto: se per assurdo \mathbf{R} fosse numerabile, potremmo costruire una funzione surgettiva da \mathbf{N} in $(0, 1)$. In altre parole, potremmo costruire un “elenco” (infinito) di tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1: in notazione decimale, e con la solita convenzione per evitare ambiguità:

$$\begin{aligned} &0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots \\ &0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots \\ &0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots \\ &0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Facciamo vedere che c'è almeno un numero reale compreso tra 0 e 1 che *non fa parte* della lista, che quindi non era completa: prendiamo un numero $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ tale che

- α_1 è diversa da a_1 (prima cifra del primo numero dell'elenco) e da 9;
- α_2 è diversa da a_2 (seconda cifra del secondo numero dell'elenco) e da 9;
- ...;
- α_k è diversa dalla k -esima cifra del k -esimo numero dell'elenco e da 9.

Questo numero, ottenuto col cosiddetto “procedimento diagonale di Cantor”, differisce da *tutti* i numeri dell’elenco: precisamente, differisce dal numero dell’elenco di posto k per la k -esima cifra!

Lezione del 16/11/2005 (2 ore): Il concetto di numerabilità che abbiamo appreso la volta scorsa ha una grande importanza in analisi, soprattutto in teoria della misura. La seguente proposizione mostra come qualunque aperto di \mathbf{R}^n , comunque complicato, possa essere ottenuto facendo un’unione numerabile di intervalli.

PROPOSIZIONE: Ogni aperto $A \subset \mathbf{R}^n$ è unione numerabile di intervalli aperti.

DIM.: Consideriamo la famiglia \mathcal{F} costituita da tutti i cubi di \mathbf{R}^n del tipo $(q_1 - r, q_1 + r) \times (q_2 - r, q_2 + r) \times \dots \times (q_n - r, q_n + r)$, dove tutti i q_i ed r sono razionali. Questa è una famiglia numerabile di intervalli.

Mostriamo che A è unione degli elementi della famiglia numerabile di intervalli

$$\mathcal{F}' = \{I \in \mathcal{F} : I \subset A\}.$$

Infatti, poiché A è aperto, per ogni $x \in A$ esiste una palla aperta $B_{r(x)}(x) \subset A$. Dentro questa palla possiamo trovare un cubo centrato in x dentro il quale, grazie alla densità dei razionali, c’è un elemento $I_x \in \mathcal{F}$ che contiene x . Per costruzione, $I_x \in \mathcal{F}'$: abbiamo mostrato che per ogni $x \in A$ c’è un elemento della famiglia numerabile \mathcal{F}' che lo contiene. Dunque $A = \bigcup_{I \in \mathcal{F}'} I$.

Q.E.D.

Ci sarà utile anche la seguente

PROPOSIZIONE: Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ un insieme chiuso e limitato, $\{A_j\}_j$ una successione di insiemi aperti tali che $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset K$. Allora esiste un numero naturale N tale che $\bigcup_{j=1}^N A_j \supset K$.

DIM.: Questa proposizione è un caso particolare di un fatto importante che vedrete nel corso di geometria: un sottinsieme di \mathbf{R}^n è chiuso e limitato (compatto) se e solo se da ogni suo ricoprimento aperto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Vediamo però una dimostrazione diretta.

Consideriamo, per ogni $i = 1, 2, \dots$, gli insiemi $C_i = K \setminus (\bigcup_{j=1}^i A_j)$. Questa è una successione decrescente di insiemi chiusi e limitati: $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$, e inoltre

$$(**) \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \emptyset$$

perché gli A_j ricoprono K . Mostriamo che esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che $C_N = \emptyset$: questa è esattamente la tesi.

Se così non fosse, per ogni $i = 1, 2, \dots$ potremmo scegliere un punto $x_i \in C_i$. Poiché K è chiuso e limitato, per il teorema di Bolzano-Weierstrass posso estrarre una sottosuccessione convergente: esiste $x_{i_k} \rightarrow \bar{x} \in K$. Dico che $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$, il che contraddice (***) e mi fornisce l'assurdo. Infatti, se così non fosse dovrebbe esistere ν tale che $\bar{x} \notin C_\nu$. Scegliamo \bar{k} tale che $i_{\bar{k}} \geq \nu$. Allora $\bar{x} \notin C_{i_{\bar{k}}}$: questo è assurdo perché $C_{i_{\bar{k}}}$ è chiuso, e la successione x_{i_k} appartiene definitivamente a questo insieme perché i C_i formano una successione decrescente. Q.E.D.

Siamo ora in grado di definire la *misura esterna di Lebesgue* di un sottinsieme di \mathbf{R}^n : l'idea è molto simile a quella della definizione della misura di Peano-Jordan, solo che useremo unioni numerabili anziché unioni finite di intervalli.

DEFINIZIONE (Misura esterna di Lebesgue): Se $A \subset \mathbf{R}^n$, la sua *misura esterna di Lebesgue* si definisce come

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : I_i \text{ intervalli, } \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A \right\}.$$

Si noti che non richiediamo che gli intervalli abbiano parti interne disgiunte. Inoltre, consideriamo anche l'insieme vuoto come intervallo degenere, in modo da poter considerare anche ricoprimenti finiti.

La misura esterna di Lebesgue gode delle seguenti proprietà elementari:

TEOREMA (Proprietà elementari della misura esterna di Lebesgue): Sia $m : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ la misura esterna di Lebesgue¹⁶. Valgono i fatti seguenti:

(i) $m(\emptyset) = 0$, $m(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$.

(ii) Se $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, con $A, A_1, A_2, \dots \subset \mathbf{R}^n$, allora

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

(numerabile subadditività della misura di Lebesgue). In particolare, se $A \subset B$ vale $m(A) \leq m(B)$ (monotonia della misura di Lebesgue).

¹⁶ $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ denota l'insieme delle parti di \mathbf{R}^n , ossia l'insieme di tutti i sottinsiemi di \mathbf{R}^n .

(iii) Nella definizione della misura esterna di Lebesgue, non è restrittivo chiedere che gli intervalli I_i siano tutti aperti.

(iv) $m(I) = |I|$ per ogni intervallo $I \subset \mathbf{R}^n$. Inoltre, $m(\mathbf{R}^n) = +\infty$.

DIM.: La (i) è lasciata come facile esercizio. Per quanto riguarda la (ii), è importante fare un'osservazione preliminare che ricorre in tutta la teoria della misura: la somma di una serie di numeri non negativi (che ovviamente può essere $+\infty$) non cambia se si permuta l'ordine degli addendi della serie (per esercizio si provi a dimostrare questo fatto, che è falso per le serie a termini di segno qualunque che non siano assolutamente convergenti).

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e un indice i : per definizione di inf possiamo trovare una successione di intervalli $\{I_j^i\}_j$ tali che $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^i \supset A_i$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j^i| < m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Allora $\{I_{i,j}^i\}$ è un ricoprimento numerabile di A fatto di intervalli, e per definizione di misura di Lebesgue abbiamo

$$m(A) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |I_{i,j}^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |I_j^i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} (m(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) + \varepsilon,$$

da cui segue (ii) perché ε può essere preso arbitrariamente piccolo.

Vedremo domani la fine della dimostrazione del teorema.

Lezione del 17/11/2005 (2 ore): Concludiamo la dimostrazione del teorema di ieri. La monotonia è conseguenza immediata della subadditività numerabile. Dimostriamo (iii): se $A \subset \mathbf{R}^n$, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare degli intervalli I_j tali che $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per ogni $j = 1, 2, \dots$ sia $I'_j \supset I_j$ un intervallo *aperto* di poco più grande, scelto in modo che $|I'_j| < |I_j| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Allora

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I'_j| < \sum_{j=1}^{\infty} (|I_j| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

e (iii) è dimostrata.

Sorprendentemente, la (iv) è la proprietà più difficile da dimostrare. Grazie alla (iii), essa segue immediatamente dalla seguente

AFFERMAZIONE: Se I è un intervallo, allora per ogni successione di intervalli I_j aperti con $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset I$ si ha

$$(*) \quad |I| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

La (*) è evidentemente vera se gli I_j sono in numero finito, lo è meno nel caso generale di un ricoprimento numerabile. Se però $J \subset I$ è un intervallo *chiuso e limitato*, possiamo usare la proposizione dimostrata ieri per dire che esiste un numero finito di intervalli I_1, I_2, \dots, I_N del nostro ricoprimento di I tali che $J \subset \bigcup_{j=1}^N I_j$. Poiché la (*) è vera per i ricoprimenti finiti, se ne deduce che

$$|J| \leq \sum_{j=1}^N |I_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

Poiché la misura di J può essere presa vicina quanto si vuole alla misura di I , (*) risulta dimostrata. Q.E.D.

Come immediata conseguenza del nostro teorema, vediamo che un sottinsieme *numerabile* di \mathbf{R}^n ha misura zero: infatti, un punto di \mathbf{R}^n ha evidentemente misura di Lebesgue zero e la nostra affermazione segue dalla numerabile subadditività.

La misura esterna di Lebesgue è un importante caso particolare di un oggetto più generale, chiamato misura esterna:

DEFINIZIONE (Misura esterna): Una *misura esterna* su \mathbf{R}^n è una funzione $\mu : \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che sia numerabilmente subadditiva: se $A, A_1, A_2, A_3, \dots \subset \mathbf{R}^n$ e $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, allora

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Dalla numerabile subadditività segue che μ è monotona: se $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Un esempio di misura esterna diversa dalla misura di Lebesgue è la *restrizione* della misura di Lebesgue a un sottinsieme $A_0 \subset \mathbf{R}^n$: questa è la misura \tilde{m} definita da

$$\tilde{m}(A) := m(A \cap A_0).$$

Un altro esempio è la misura δ_0 (*delta di Dirac centrata in 0*) definita da

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in A, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ancora, è una misura esterna la “*misura che conta*” definita da

$$\#(A) = \begin{cases} \text{numero degli elementi di } A & \text{se } A \text{ è finito,} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In generale, si può dire che la misura di Lebesgue non ha buone proprietà su *tutti* i sottinsiemi di \mathbf{R}^n : essa mostra un comportamento assai più simpatico e desiderabile su una particolare classe di insiemi, detti *misurabili*:

DEFINIZIONE (Insiemi misurabili secondo Lebesgue, definizione di Carathéodory): Un sottinsieme $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* o *m-misurabile* se vale l’uguaglianza

$$m(T) = m(T \cap A) + m(T \setminus A)$$

per ogni sottinsieme $T \subset \mathbf{R}^n$. In sostanza, chiediamo che A “spezzi bene” la misura di ogni insieme di \mathbf{R}^n .

Si noti che grazie alla numerabile subadditività della misura esterna abbiamo sempre $m(T) \leq m(T \cap A) + m(T \setminus A)$: è quindi sufficiente verificare che valga la disuguaglianza opposta

$$m(T) \geq m(T \cap A) + m(T \setminus A) \quad \forall T \subset \mathbf{R}^n.$$

Analogamente, data una misura esterna μ , A si dice μ -misurabile se $\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$ per ogni $T \subset \mathbf{R}^n$.

OSSERVAZIONE: In seguito ci sarà utile il seguente fatto: se $A \subset \mathbf{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue e \tilde{m} denota la restrizione della misura di Lebesgue a $A_0 \subset \mathbf{R}^n$, allora A è anche \tilde{m} -misurabile. Se infatti $T \subset \mathbf{R}^n$ abbiamo

$$\begin{aligned} \tilde{m}(T) &= m(T \cap A_0) = m((T \cap A_0) \cap A) + m((T \cap A_0) \setminus A) = \\ &= m((T \cap A) \cap A_0) + m((T \setminus A) \cap A_0) = \tilde{m}(T \cap A) + \tilde{m}(T \setminus A). \end{aligned}$$

Il seguente teorema mostra due cose: innanzitutto, se partiamo da insiemi misurabili e facciamo operazioni di unione numerabile, complementazione e intersezione numerabile, rimaniamo sempre nell’ambito degli insiemi misurabili. Inoltre, la misura di Lebesgue ristretta agli insiemi misurabili ha buone

proprietà, la principale delle quali è la *numerabile additività*: la misura dell'unione di una famiglia numerabile di insiemi due a due disgiunti è uguale alla somma delle loro misure.

TEOREMA (Proprietà degli insiemi misurabili e della misura sugli insiemi misurabili): Valgono i seguenti fatti

(i) Se A è misurabile secondo Lebesgue, allora $A^C = \mathbf{R}^n \setminus A$ è misurabile secondo Lebesgue. Inoltre, se $m(A) = 0$ allora A è misurabile secondo Lebesgue.

(ii) Unione o intersezione numerabile di insiemi misurabili secondo Lebesgue è misurabile secondo Lebesgue.

(iii) Se $\{A_i\}_i$ è una famiglia di insiemi misurabili s.L. due a due disgiunti e $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, allora

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

(numerabile additività della misura di Lebesgue sui misurabili).

(iv) Se $\{A_i\}$ è una successione crescente di insiemi misurabili s.L., cioè se $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, e $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ allora

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} m(A_i).$$

(v) Se $\{A_i\}$ è una successione decrescente di insiemi misurabili s.L., cioè se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, se $m(A_1) < +\infty$ e se infine $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, allora

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} m(A_i).$$

(vi) Tutte le proprietà precedenti sono ancora vere se sostituiamo alla misura di Lebesgue una qualunque misura esterna μ , e agli insiemi misurabili secondo Lebesgue gli insiemi μ -misurabili.

DIM.: La (i) è ovvia se si osserva che la condizione di misurabilità può essere riscritta:

$$m(T) \geq m(T \cap A) + m(T \cap A^C) \quad \forall T \subset \mathbf{R}^n.$$

Mostriamo una versione indebolita di (ii): se A e B sono misurabili, allora $A \cup B$ e $A \cap B$ sono misurabili. Infatti, se $T \subset \mathbf{R}^n$ si ha

$$m(T) = m(T \cap A) + m(T \setminus A) = \\ m((T \cap A) \cap B) + m((T \cap A) \setminus B) + m((T \setminus A) \cap B) + m((T \setminus A) \setminus B).$$

Si osservi l'ultima riga: l'unione degli insiemi nei primi tre addendi è esattamente $T \cap (A \cup B)$ per cui, per la subadditività della misura di Lebesgue, la somma dei primi tre addendi è $\geq m(T \cap (A \cup B))$. Invece, l'insieme nell'ultimo addendo non è altro che $T \setminus (A \cup B)$: si ha allora

$$m(T) \geq m(T \cap (A \cup B)) + m(T \setminus (A \cup B)),$$

e $A \cup B$ è misurabile. Da questo e da (i) segue la misurabilità di $A \cap B$ perché $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$. Per induzione, segue anche che unione e intersezione *finita* di insiemi misurabili è misurabile (alle unioni e intersezioni numerabili arriveremo solo alla fine, dopo aver dimostrato tutto il resto!).

Cominciamo a dimostrare (iii): essa è vera per l'unione di *due* insiemi misurabili e disgiunti in quanto $m(A \cup B) = m((A \cup B) \cap A) + m((A \cup B) \setminus A) = m(A) + m(B)$. Per induzione, ne deriva che (iii) è vera per l'unione di una famiglia finita di insiemi misurabili due a due disgiunti.

Vedremo la prossima volta la conclusione di questa (lunga) dimostrazione!

Lezione del 23/11/2005 (2 ore): Concludiamo la dimostrazione del teorema sulle proprietà fondamentali degli insiemi misurabili. Ci eravamo fermati alla dimostrazione della numerabile additività per una famiglia *finita* di insiemi due a due disgiunti.

Nel caso generale di una famiglia *numerabile* di insiemi due a due disgiunti, la numerabile subadditività della misura di Lebesgue fornisce $m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$, mentre la monotonia assicura che per ogni $N \in \mathbf{N}$

$$m(A) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^N (A_i)\right) = \sum_{i=1}^N m(A_i),$$

dove l'ultima uguaglianza vale per quanto osservato sulle unioni finite di insiemi misurabili disgiunti. Passando al sup su N si ricava

$$m(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

e (iii) è dimostrata.

Dimostriamo (iv): basta applicare (iii) alla successione di insiemi due a due disgiunti data da $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ ($i \geq 2$). Si ha

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N m(B_i) = \lim_{N \rightarrow +\infty} m(A_N).$$

Dimostriamo (v): Definiamo la successione crescente di insiemi $B_i = A_1 \setminus A_i$, $i = 2, 3, \dots$. Allora

$$A_1 = A \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i$$

e per (iv) si ha

$$m(A_1) \leq m(A) + \lim_{i \rightarrow +\infty} [m(A_1) - m(A_i)],$$

da cui $\lim_{i \rightarrow +\infty} m(A_i) \leq m(A)$. La disuguaglianza opposta vale per monotonia, per cui la (v) è dimostrata.

A questo punto il teorema è quasi dimostrato: manca la (vi) e la (ii). Ora, tutto quanto detto fino adesso vale anche per una misura esterna μ ed i suoi insiemi μ -misurabili: non abbiamo mai usato le proprietà specifiche della misura di Lebesgue, ma solo la sua subadditività e la sua monotonia. Resta quindi da dimostrare la (ii) (sia per la misura di Lebesgue che per una misura esterna μ), dopodiché la dimostrazione è conclusa.

Sia $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, con gli A_i tutti misurabili s.L. Dobbiamo mostrare che A è misurabile s.L.

Sia $T \subset \mathbf{R}^n$. Consideriamo la successione crescente di insiemi misurabili $B_N := \bigcup_{i=1}^N A_i$: essi sono misurabili anche per la misura esterna \tilde{m} data dalla restrizione di m all'insieme T (cioè $\tilde{m}(A) := m(T \cap A)$ per ogni $A \subset \mathbf{R}^n$). Per la monotonia della misura di Lebesgue abbiamo:

$$(***) \quad m(T) = m(T \cap B_N) + m(T \setminus B_N) \geq m(T \cap B_N) + m(T \setminus A)$$

D'altra parte, per (iv) applicata alla misura esterna \tilde{m} abbiamo

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} m(T \cap B_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{m}(B_N) = \tilde{m}(A) = m(T \cap A)$$

e la misurabilità di A segue passando al limite per $N \rightarrow +\infty$ in (***). La misurabilità di $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ segue al solito scrivendo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C \right)^C.$$

Questo stesso ragionamento si applica anche ad una generica misura esterna μ , applicando (iv) alla misura esterna $\tilde{\mu}$, restrizione di μ all'insieme T . Q.E.D.

Il seguente risultato mostra che gli insiemi misurabili abbondano:

TEOREMA (Regolarità della misura di Lebesgue): I sottinsiemi aperti e i sottinsiemi chiusi di \mathbf{R}^n sono misurabili secondo Lebesgue. Inoltre, se A è un insieme misurabile secondo Lebesgue, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono B aperto e C chiuso, con $C \subset A \subset B$ e $m(B \setminus C) < \varepsilon$.

DIM.: È un esercizio relativamente semplice verificare che gli intervalli sono insiemi misurabili secondo Lebesgue: un intervallo si ottiene come intersezione finita di *semispazi*. A sua volta, un semispazio S è misurabile secondo Lebesgue: se T è un insieme test, fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\{I_i\}$ una famiglia numerabile di intervalli che ricopre T tale che $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < m(T) + \varepsilon$. Definiamo poi $I'_i = I_i \cap S$, $I''_i = I_i \cap (\mathbf{R}^n \setminus S)$: questi sono ancora intervalli (eventualmente vuoti), la somma delle cui misure è esattamente $|I_i|$. Inoltre, la famiglia $\{I'_i\}$ ricopre $T \cap S$, mentre $\{I''_i\}$ ricopre $T \cap S^C$: dunque

$$m(T) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} |I'_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |I''_i| \geq m(T \cap S) + m(T \cap S^C)$$

e la misurabilità di S segue perché ε è arbitrario.

Di conseguenza gli intervalli sono misurabili, e lo sono anche gli aperti perché possono essere ottenuti come unione numerabile di intervalli.

I chiusi sono misurabili perché i loro complementari sono aperti e quindi misurabili.

Sia ora A misurabile, $\varepsilon > 0$: mostriamo che esiste un aperto $B \supset A$ con $m(B \setminus A) < \varepsilon/2$.

Supponiamo dapprima che A abbia misura finita. Per definizione di misura di Lebesgue, possiamo trovare una famiglia numerabile di intervalli I_1, I_2, \dots con $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq m(A) + \varepsilon/2$. Abbiamo già visto che non è restrittivo supporre che gli I_i siano tutti aperti. Se $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, allora B è aperto e per subadditività

$$m(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \leq m(A) + \varepsilon/2,$$

da cui $m(B \setminus A) = m(B) - m(A) \leq \varepsilon/2$.

Vedremo domani il caso $m(A) = +\infty$ e come fare l'approssimazione dall'interno con chiusi.

Lezione del 24/11/2005 (2 ore): Concludiamo la dimostrazione del teorema di ieri: mostriamo che anche un insieme misurabile A con $m(A) = +\infty$ si approssima “da fuori” con insiemi aperti: prendiamo $\varepsilon > 0$ e mostriamo che esiste $B \supset A$, B aperto, tale che $m(B \setminus A) < \varepsilon$.

A tal fine consideriamo gli insiemi misurabili $A_N = A \cap B_N(0)$, $N = 1, 2, \dots$: essi hanno tutti misura finita e la loro unione è A . Per ciascuno di questi possiamo trovare $B_N \supset A_N$, B_N aperto tale che $m(B_N \setminus A_N) < \frac{\varepsilon}{2^{N+1}}$: definiamo $B = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$.

Ora, B è un aperto che contiene A , e inoltre $B \setminus A \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} (B_N \setminus A_N)$: per subaddittività numerabile ricaviamo $m(B \setminus A) \leq \sum_{N=1}^{\infty} m(B_N \setminus A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mostriamo infine che dato A misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste un chiuso $C \subset A$ con $m(A \setminus C) < \varepsilon/2$: questo concluderà la nostra dimostrazione. A questo fine, scegliamo un aperto $F \supset A^C$ tale che $m(F \setminus A^C) < \varepsilon/2$. Allora $C = F^C$ è un chiuso, $C \subset A$, e $m(A \setminus C) = m(F \setminus A^C) < \varepsilon/2$. Q.E.D.

Nonostante vi siano moltissimi insiemi misurabili secondo Lebesgue, non tutti i sottinsiemi di \mathbf{R}^n lo sono:

ESEMPIO (Insieme non misurabile di Vitali): Mettiamoci nel caso $n = 1$, e consideriamo l'intervallo $[0, 1] \subset \mathbf{R}$. Definiamo la seguente relazione di equivalenza su $[0, 1]$: diciamo che $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbf{Q}$. La nostra relazione di equivalenza partiziona l'intervallo $[0, 1]$ in infinite classi di equivalenza: definiamo un insieme A che contenga esattamente un elemento per ogni classe di equivalenza¹⁷. Mostriamo che l'insieme A non è misurabile secondo Lebesgue.

Per ogni $q \in \mathbf{Q} \cap [0, 1)$ definiamo gli insiemi $A_q = \{x + q : x \in A\}$. Siccome la misura di Lebesgue è invariante per traslazione (questo è ovvio per come è definita: la misura di un intervallo è invariante per traslazione!) abbiamo che $m(A_q) = m(A)$. Poiché gli intervalli sono misurabili secondo Lebesgue abbiamo anche $m(A) = m(A_q) = m(A_q \cap [0, 1]) + m(A_q \setminus [0, 1])$. Se $B_q = A_1 \setminus [0, 1]$, definiamo $\tilde{B}_q = \{x : x + 1 \in B_q\}$: evidentemente $m(\tilde{B}_q) = m(B_q)$ per l'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

Definiamo infine $\tilde{A}_q = (A_q \cap [0, 1]) \cup \tilde{B}_q$. Per quanto visto sopra, abbiamo $m(\tilde{A}_q) = m(A)$. Ora, è facile vedere che gli insiemi A_q sono due a due disgiunti al variare di $q \in \mathbf{Q} \cap [0, 1)$ e che $\bigcup_q \tilde{A}_q = [0, 1]$. Se A fosse misurabile,

¹⁷Per poter definire questo insieme, dobbiamo assumere la validità dell'assioma della scelta!

lo sarebbero anche gli insiemi \tilde{A}_q e per additività numerabile avremmo

$$1 = m([0, 1]) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\tilde{A}_q) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A).$$

Questo è assurdo: infatti la misura di A è nulla oppure positiva. Se fosse $m(A) = 0$, l'espressione di destra varrebbe 0, mentre se fosse $m(A) > 0$ essa varrebbe $+\infty$: in tutti e due i casi essa non può essere uguale a 1. Dunque A non è misurabile secondo Lebesgue.

In vista della definizione dell'integrale di Lebesgue, occorre definire un'importante classe di funzioni: le funzioni *misurabili*.

DEFINIZIONE (funzione misurabile): Sia $A \subset \mathbf{R}^n$, $f : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Il simbolo $\overline{\mathbf{R}}$ denota l'insieme $\mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$: in questo contesto, in futuro useremo la “strana” convenzione che $0 \cdot \pm\infty = 0$, mentre la somma $+\infty - \infty$ rimarrà non definita, come è giusto che sia!

La funzione f si dice *misurabile* (secondo Lebesgue) se per ogni $a \in \mathbf{R}$ gli insiemi $f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > a\}$ sono misurabili.

Una caratterizzazione equivalente della misurabilità, un po' più topologica, è data dalla seguente

PROPOSIZIONE (Caratterizzazione delle funzioni misurabili): Una funzione $f : A_0 \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ (con $A_0 \subset \mathbf{R}^n$) è misurabile se e solo se $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ sono misurabili e $f^{-1}(U)$ è misurabile per ogni aperto $U \subset \mathbf{R}$.

DIM.: Se sappiamo che $f^{-1}(\{+\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ sono misurabili e $f^{-1}(U)$ è misurabile per ogni aperto $U \subset \mathbf{R}$, allora f è misurabile perché $f^{-1}((a, +\infty]) = f^{-1}((a, +\infty)) \cup f^{-1}(\{+\infty\})$.

Viceversa, supponiamo che f sia misurabile. Possiamo scrivere

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{N=1}^{\infty} f^{-1}((N, +\infty]),$$

per cui $f^{-1}(\{+\infty\})$ è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili.

Dall'ipotesi di misurabilità di f segue allora che $f^{-1}((a, +\infty))$ è misurabile per ogni $a \in \mathbf{R}$. Dimostriamo che anche gli insiemi $f^{-1}([a, +\infty))$, $f^{-1}((-\infty, a))$ e $f^{-1}((-\infty, a])$ sono tutti misurabili per ogni $a \in \mathbf{R}$. Infatti, $f^{-1}([a, +\infty)) = \bigcap_{N=1}^{\infty} f^{-1}((a - \frac{1}{N}, +\infty))$ è misurabile in quanto intersezione numerabile di misurabili. Le controimmagini di semirette “sinistre” del tipo $f^{-1}([-\infty, a))$ e $f^{-1}([-\infty, a])$ sono misurabili in quanto sono complementari di controimmagini di semirette “destre”. Ne segue che $f^{-1}(\{-\infty\})$

è misurabile: $f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{N=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, -N])$...e sono misurabili anche le controimmagini di semirette “sinistre” senza $-\infty$.

Allora, anche le controimmagini di intervalli aperti sono misurabili, infatti $f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((-\infty, b)) \cap f^{-1}(a, +\infty)$. Se poi $U \subset \mathbf{R}$ è aperto, scriviamo $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, con $I_i \subset \mathbf{R}$ intervalli aperti. Allora $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(I_i)$ è misurabile. Q.E.D.

Come conseguenza di questo teorema, il dominio A di f deve necessariamente essere misurabile (perché $A = f^{-1}(\mathbf{R}) \cup f^{-1}(\{+\infty\}) \cup f^{-1}(\{-\infty\})$). Inoltre, una funzione continua a valori reali, definita su un aperto di \mathbf{R}^n , è certamente misurabile. Perché?

Lezione del 30/11/2005 (2 ore): Le funzioni misurabili sono “stabili” per tutta una serie di operazioni algebriche e di limite:

PROPOSIZIONE (Stabilità delle funzioni misurabili): Supponiamo che f, g siano misurabili, $\lambda \in \mathbf{R}$ e che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni misurabili. Allora

- (i) l'insieme $\{x : f(x) > g(x)\}$ è misurabile;
- (ii) se $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è continua, allora $\phi \circ f$ è misurabile (sul suo dominio);
- (iii) le funzioni $f + g$, λf , $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ e fg sono tutte misurabili nel loro dominio;
- (iv) le funzioni $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ e $\lim f_n$ sono tutte misurabili nel loro dominio.

DIM.: Per verificare la (i), osserviamo che se $f(x) > g(x)$, allora esiste un razionale q compreso tra $g(x)$ e $f(x)$. Allora il nostro asserto è vero in quanto possiamo scrivere

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} f^{-1}((q, +\infty]) \cap g^{-1}([-\infty, q)),$$

per cui abbiamo espresso il nostro insieme come unione numerabile di insiemi misurabili.

La (ii) è ovvia grazie alla nostra caratterizzazione delle funzioni misurabili: sappiamo infatti che la controimmagine di un aperto secondo ϕ è un aperto.

Vediamo la (iii): siano f, g misurabili e consideriamo la funzione somma $f + g$ (essa è definita sull'intersezione dei domini, privata dei punti in cui la

somma si presenta nella forma $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$). Essa è misurabile in quanto

$$(f + g)^{-1}((a, +\infty]) = \{x : f(x) > a - g(x)\}$$

è misurabile grazie a (i): la funzione $a - g(x)$ è infatti banalmente misurabile. Da (ii) segue poi la misurabilità di λf , di $|f|$ e di f^2 (che si ottengono da f componendo con una funzione continua). Possiamo poi scrivere $\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$, $\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$, $f(x)g(x) = \frac{1}{2}((f(x) + g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x))$, il che ci fornisce la misurabilità di $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ e fg .

Per quanto riguarda la (iv), sia $f(x) = \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$. Si ha $f^{-1}((a, +\infty)) = \bigcup_n f_n^{-1}((a, +\infty))$, per cui f è misurabile essendolo le f_n . Analogamente, $\inf_n f_n(x)$ è misurabile.

La funzione $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ è misurabile in quanto $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sup_n \inf\{f_m(x) : m \geq n\}$. Analogamente, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ è misurabile. L'insieme dove le due funzioni misurabili $\liminf_n f_n$ e $\limsup_n f_n$ coincidono è misurabile: tale insieme è proprio quello in cui esiste $\lim_n f_n$, che quindi è misurabile. Q.E.D.

Un'importante sottoclasse delle funzioni misurabili è quella delle *funzioni semplici*: nella definizione di integrale di Lebesgue esse giocheranno lo stesso ruolo che le funzioni a scala avevano in quella dell'integrale di Riemann.

Ricordiamo che, dato $A \subset \mathbf{R}^n$, la sua *funzione caratteristica* è la funzione

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

DEFINIZIONE: Una *funzione semplice* $\phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili secondo Lebesgue. In altre parole, ϕ è semplice se esistono un numero finito di insiemi misurabili A_1, A_2, \dots, A_N e dei numeri reali c_1, c_2, \dots, c_N tali che $\phi(x) = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$. Evidentemente, non è restrittivo supporre che gli A_i siano due a due disgiunti: se così è, e se $\phi(x) \geq 0$ per ogni x , definiamo in modo naturale l'integrale (di Lebesgue) di ϕ come

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) dx = \sum_{i=1}^N c_i m(A_i).$$

Osserviamo che una funzione a scala è una funzione semplice in cui gli insiemi A_i sono intervalli. Per questo tipo di funzioni, la nuova definizione di integrale coincide con la precedente. Inoltre, non è difficile vedere che

l'integrale sulle funzioni semplici gode delle usuali proprietà di linearità e monotonia.

Il prossimo, fondamentale teorema dice che ogni funzione misurabile *non negativa* può essere approssimata da sotto con una successione di funzioni semplici:

TEOREMA (Approssimazione di funzioni misurabili con funzioni semplici): Sia $f : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Allora esiste una successione $\phi_k : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ di funzioni semplici tali che $f \geq \phi_{k+1} \geq \phi_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) e tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_k(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

DIM.: Per ogni fissato $k = 1, 2, \dots$ e $j = 0, 2, \dots, k2^k - 1$ definiamo gli insiemi misurabili $E_{k,j} = f^{-1}([\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}))$, mentre poniamo $E_{k,k2^k} = f^{-1}([k2^k, +\infty))$.

Consideriamo poi le funzioni semplici

$$\phi_k(x) = \sum_{j=0}^{k2^k} \frac{j}{2^k} \mathbf{1}_{E_{k,j}}(x).$$

Per costruzione, queste funzioni sono misurabili e sono tutte minori o uguali a f . Inoltre, esse formano una successione crescente: basta osservare che per ogni k e per ogni $j = 1, \dots, k2^k - 1$ si ha $E_{k,j} = E_{k+1,2j} \cup E_{k+1,2j+1}$. Quanto poi a $E_{k,k2^k}$, questo verrà suddiviso al passo successivo in $2^k + 1$ insiemi...

È poi facile vedere che $\phi_k(x) \rightarrow f(x)$ per ogni x : se $f(x) < +\infty$, per k abbastanza grande si ha $f(x) - \phi_k(x) \leq 2^{-k}$, mentre se invece $f(x) = +\infty$ si ha $x \in E_{k,2^k}$ per ogni k e quindi $\phi_k(x) = k \rightarrow +\infty$. Q.E.D.

È finalmente giunto il momento di introdurre l'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile non negativa:

DEFINIZIONE: L'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile $f : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ si definisce come

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \sup \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) dx : \phi \text{ semplice, } \phi \leq f \right\}.$$

Se poi $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ è misurabile, definiamo $\int_A f(x) dx$ come $\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{f}(x) dx$, dove $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ si ottiene estendendo f ponendola uguale a 0 fuori da A .

Lezione del 1/12/2005 (2 ore): Il prossimo risultato di convergenza integrale si rivelerà importantissimo per la teoria dell'integrale di Lebesgue, grazie anche al risultato di approssimazione con funzioni semplici che abbiamo dimostrato prima.

TEOREMA (di Beppo Levi): Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni misurabili non negative, $f_k : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$, e supponiamo che la successione sia anche crescente: $f_{k+1}(x) \geq f_k(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ e per ogni $k = 1, 2, 3, \dots$. Allora, se $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$, si ha

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx.$$

DIM.: Notiamo innanzitutto che la funzione f è misurabile in quanto limite (sup) di funzioni misurabili. Inoltre, la successione $k \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx$ è crescente: indichiamo con α il suo limite. Evidentemente, essendo $f \geq f_k$ per ogni k , si ha $\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \geq \alpha$: in particolare, se $\alpha = +\infty$, il teorema è dimostrato. Se invece $\alpha \in \mathbf{R}$, ci rimane da dimostrare la disuguaglianza opposta

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \leq \alpha.$$

A tal fine, fissiamo $c \in (0, 1)$ e una funzione semplice $s : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ con $s \leq f$. La funzione semplice s può essere scritta $s(x) = \sum_{j=1}^N s_j \mathbf{1}_{A_j}(x)$, con A_j insiemi misurabili due a due disgiunti. Definiamo $E_k = \{x \in \mathbf{R}^n : f_k(x) \geq cs(x)\}$. Grazie al fatto che le f_k tendono a f e che $c < 1$, abbiamo che $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbf{R}^n$, e inoltre la successione di insiemi misurabili E_k è crescente perché lo sono le f_k . Definiamo poi $A_{j,k} = A_j \cap E_k$: grazie alla continuità della misura di Lebesgue sulle successioni crescenti abbiamo $m(A_{j,k}) \rightarrow m(A_j)$ per $k \rightarrow +\infty$. Allora:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx \geq \\ & \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} f_k(x) dx \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} c s(x) dx = \\ & \lim_{k \rightarrow +\infty} c \sum_{j=1}^N s_j m(A_{j,k}) = c \sum_{j=1}^N s_j m(A_j) = c \int_{\mathbf{R}^n} s(x) dx. \end{aligned}$$

Passando al sup su tutte le funzioni semplici $s \leq f$ e su tutti i $c < 1$, si ottiene la disuguaglianza che ci mancava. Q.E.D.

Vediamo subito alcune importanti conseguenze del teorema di Beppo Levi:

- (i) *Additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda:* Siano $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ funzioni misurabili. Allora

$$\int_{\mathbf{R}^n} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx + \int_{\mathbf{R}^n} g(x) dx.$$

Infatti possiamo trovare due successioni crescenti di funzioni semplici, $\{s_k\}$, $\{u_k\}$ con $s_k \rightarrow f$, $u_k \rightarrow g$. L'integrale delle funzioni semplici è evidentemente additivo: il teorema di Beppo-Levi ci consente di passare al limite e ottenere l'identità voluta.

- (i) *Numerabile additività dell'integrale rispetto all'insieme di integrazione:* Se $\{A_i\}$ è una successione di insiemi misurabili due a due disgiunti e f è una funzione misurabile non negativa definita su $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, allora

$$\int_A f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(x) dx.$$

Basta infatti considerare la successione crescente di funzioni misurabili $g_k(x) = \sum_{i=1}^k f(x) \mathbf{1}_{A_i}(x)$, che converge alla funzione $g(x) = f(x) \mathbf{1}_A(x)$. Un'applicazione del teorema di Beppo Levi dimostra subito la tesi.

- (iii) *Integrazione per serie:* Se $\{f_k\}$ è una successione di funzioni misurabili non negative definite su A , allora

$$\int_A \sum_{i=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f_k(x) dx.$$

Basta applicare il teorema di Beppo Levi e l'additività dell'integrale rispetto alla funzione integranda alle somme parziali della serie.

DEFINIZIONE (Integrale di funzioni di segno qualunque): Che fare se abbiamo una funzione misurabile di *segno qualunque* $f : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$? Definiamo la parte positiva e la parte negativa di f nel modo seguente:

$$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) := -\min\{0, f(x)\}.$$

Evidentemente, si ha $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Se gli integrali di f^+ e f^- non sono *entrambi* $+\infty$, f si dice *integrabile secondo Lebesgue* e definiamo

$$\int_A f(x) dx := \int_A f^+(x) dx - \int_A f^-(x) dx.$$

Se poi i due integrali della parte positiva e della parte negativa sono *entrambi finiti*, allora $f(x)$ si dice *sommabile*, ed ha integrale finito.

Si noti che le proprietà di additività rispetto alla funzione integranda, e di numerabile additività rispetto all'insieme di integrazione, continuano a valere per funzioni sommabili. In particolare, poiché è evidente dalla definizione che le costanti si possono “portare fuori dall'integrale”, l'integrale di Lebesgue è lineare.

Vediamo altri due celebri teoremi di convergenza sotto il segno di integrale: il Lemma di Fatou e il Teorema della convergenza dominata.

TEOREMA (Lemma di Fatou): Sia $f_k : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ una successione di funzioni misurabili non negative, $f(x) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$. Allora

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx.$$

DIM.: Sappiamo già che f è misurabile non negativa. Si ha $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(x)$, dove $g_k(x) = \inf\{f_h(x) : h \geq k\}$. Poiché le g_k sono una successione crescente di funzioni misurabili non negative abbiamo per Beppo Levi

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} g_k(x) dx.$$

La tesi segue allora grazie alla monotonia dell'integrale di Lebesgue, poiché si ha evidentemente $g_k(x) \leq f_k(x)$. Q.E.D.

Un paio di osservazioni: il lemma di Fatou è in generale falso per funzioni di segno qualunque. Si prenda per esempio $A = \mathbf{R}$, $f_k(x) = -1/k$ (funzioni costanti). Allora $f_k(x) \rightarrow 0$, ma

$$\int_{\mathbf{R}} f_k(x) dx = -\infty, \quad \int_{\mathbf{R}} 0 dx = 0.$$

Le stesse funzioni *cambiate di segno* mostrano che nella tesi può valere la disuguaglianza stretta.

Lezione del 7/12/2005 (2 ore): Probabilmente il più celebre risultato di convergenza integrale nel quadro della teoria di Lebesgue è il seguente:

TEOREMA (Della convergenza dominata di Lebesgue): Sia $f_k : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ una successione di funzioni misurabili, e supponiamo che esiste una funzione sommabile $\phi : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ tale che $|f_k(x)| \leq \phi(x)$ per ogni k e per ogni x . Se esiste il limite $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$, allora

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx.$$

DIM.: La funzione limite f è misurabile, ed è anche sommabile perché il suo modulo è dominato da ϕ .

Consideriamo le funzioni $\phi + f_k$ e $\phi - f_k$: esse sono misurabili e non negative (grazie alla proprietà di ϕ). Allora possiamo applicare il Lemma di Fatou ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) dx + \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx &= \int_{\mathbf{R}^n} (\phi(x) + f(x)) dx \leq \\ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} (\phi(x) + f_k(x)) dx &= \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) dx + \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx, \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx.$$

Facendo lo stesso conto con la successione $\phi - f_k$ (e ricordando che $\liminf_{k \rightarrow +\infty} (-a_k) = -\limsup_{k \rightarrow +\infty} a_k$) si ottiene

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx.$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze si ha la tesi. Q.E.D.

Vedremo subito un'importante applicazione dei nostri risultati di convergenza integrale: il confronto tra l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue.

Prima di farlo, è utile introdurre una comoda terminologia: si dice che una certa proprietà è vera *per quasi ogni* $x \in \mathbf{R}^n$ (o *q.o.* $x \in A$, con A misurabile) se l'insieme degli x per cui la proprietà è falsa ha misura di Lebesgue nulla. Per esempio, date due funzioni $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$, diremo che esse sono *quasi ovunque uguali* se $m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

È un semplice esercizio verificare che una funzione quasi ovunque uguale ad una funzione misurabile è essa stessa misurabile (infatti tutti gli insiemi di misura nulla sono misurabili). Inoltre, due funzioni quasi ovunque uguali hanno lo stesso integrale. Vale anche il seguente risultato:

PROPOSIZIONE: Se $f : A \rightarrow [0, +\infty]$ è misurabile e $\int_A f(x) dx = 0$, allora $f = 0$ quasi ovunque in A .

DIM.: Possiamo scrivere

$$\{x \in A : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Tutti gli insiemi a destra hanno misura nulla: se fosse infatti $m(E_{\bar{n}}) > 0$, con $E_{\bar{n}} = \{x \in A : f(x) > \frac{1}{\bar{n}}\}$ avremmo

$$\int_A f(x) dx \geq \int_{E_{\bar{n}}} f(x) dx \geq m(E_{\bar{n}})/\bar{n} > 0,$$

contro l'ipotesi. Q.E.D.

Il seguente teorema mostra che l'integrale di Riemann coincide con l'integrale di Lebesgue sulle funzioni integrabili secondo Riemann (limitate su un insieme limitato: per gli integrali impropri la faccenda è leggermente più complicata). Enunciamo e dimostriamo¹⁸ il teorema in dimensione 1: la generalizzazione a dimensioni superiori non sarebbe difficile.

TEOREMA: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann. Allora f è misurabile secondo Lebesgue, e il suo integrale di Lebesgue coincide con l'integrale di Riemann.

DIM.: Ai fini della dimostrazione, dobbiamo provvisoriamente distinguere l'integrale di Riemann da quello di Lebesgue: data $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, conveniamo che $\int_a^b f(x) dx$ rappresenti il suo integrale di Lebesgue, mentre indicheremo con $\mathcal{R} \int_a^b f(x) dx$ il suo integrale di Riemann (purché esistano)... Ricordiamo anche che l'integrale di Lebesgue delle funzioni a scala coincide per definizione con il loro integrale di Riemann.

Per definizione di integrale (superiore ed inferiore) secondo Riemann, è possibile trovare due successioni di funzioni a scala $\{\psi_n\}$ e $\{\phi_n\}$, con $\psi_n \geq f \geq \phi_n$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \phi_n dx = \mathcal{R} \int_a^b f dx.$$

Siano ora $\bar{\psi}(x) = \inf\{\psi_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$, $\underline{\phi}(x) = \sup\{\phi_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$. Queste due funzioni sono misurabili, e $\underline{\phi} \leq f \leq \bar{\psi}$. Per la monotonia dell'integrale sarà

$$\int_a^b \psi_n(x) dx \geq \int_a^b \bar{\psi}(x) dx,$$

¹⁸La dimostrazione che scrivo su queste pagine è molto più semplice di quella che vi ho ammanito in classe: evidentemente ottenebrato dalla mancanza di sonno, ho seguito una strada più complicata del necessario!

da cui passando al limite

$$\mathcal{R} \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \bar{\psi}(x) dx,$$

e analogamente

$$\mathcal{R} \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \underline{\phi}(x) dx.$$

Siccome $\bar{\psi} \geq \underline{\phi}$, se ne deduce che $\int_a^b (\bar{\psi} - \underline{\phi}) dx = 0$, da cui $\bar{\psi} - \underline{\phi} = 0$ quasi ovunque, ossia $\bar{\psi} = \underline{\phi} = f$ quasi ovunque in $[a, b]$. Ne segue immediatamente che f è misurabile e che il suo integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann. Q.E.D.

In realtà, si può dimostrare che una funzione limitata è integrabile secondo Riemann se e soltanto se essa è *quasi ovunque continua* (Teorema di Vitali). Per motivi di tempo, non dimostreremo questo teorema.

Come non dimostreremo il seguente, importantissimo teorema, che migliora di gran lunga il teorema di riduzione degli integrali doppi che abbiamo visto per l'integrale di Riemann:

TEOREMA (di Fubini e Tonelli): Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ una funzione misurabile. Allora

- (i) Se $f \geq 0$, allora per quasi ogni $y \in \mathbf{R}$ la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è misurabile sulla retta reale. Inoltre, la funzione $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx$ è misurabile e si ha

$$(*) \int_{\mathbf{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Ovviamente, le stesse cose valgono anche scambiando il ruolo di x e y .

- (ii) Se f è di segno qualunque e $\int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx) dy < +\infty$, allora f è sommabile. La stessa cosa vale anche scambiando l'ordine di integrazione.

- (iii) Se f è di segno qualunque e sommabile, continua a valere l'enunciato del punto (i).

Buona parte del teorema è dovuta a Fubini. La parte (ii) dell'enunciato segue immediatamente dalla (i) (perchè $|f|$ è una funzione non negativa). La parte dovuta a Tonelli è un passaggio assolutamente non ovvio e fondamentale nel punto (iii). Precisamente: se una funzione di segno qualunque $f(x, y)$ è sommabile, allora le restrizioni alle rette orizzontali $x \mapsto f(x, y)$ sono sommabili per quasi ogni y , e inoltre la funzione $y \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx$ è sommabile.

Se la funzione f è di segno qualunque e non è sommabile, l'enunciato non è più vero e i due integrali iterati possono essere diversi, come mostrano esempi anche semplici. Invece, il teorema si generalizza a dimensione superiore: lo spazio ambiente può essere $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$, e possiamo supporre $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^k \dots$

Visto che stiamo dando una lista di enunciati senza dimostrazione, tanto vale dare anche quello del teorema di cambio di variabile per gli integrali multipli, che avete già visto a esercitazione: guarda un po', non lo dimostreremo!

TEOREMA (Del cambiamento di variabili negli integrali multipli): Sia $\Phi : A \rightarrow B$ un diffeomorfismo, $f : B \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ una funzione integrabile. Allora si ha

$$\int_B f(y) dy = \int_A f(\Phi(x)) |\det(\nabla\Phi(x))| dx.$$

Lezione del 14/12/2005 (2 ore): Oggi vogliamo occuparci del calcolo dell'area di una superficie regolare in \mathbf{R}^3 , e del calcolo di integrali su di essa.

Innanzitutto, vale la pena di ricordare che se $D \subset \mathbf{R}^2$ è un aperto limitato e $\phi : \overline{D} \rightarrow \mathbf{R}^3$ è una funzione iniettiva di classe C^1 tale che la matrice jacobiana $\nabla\phi$ ha ovunque rango due, allora ϕ è una parametrizzazione di una superficie regolare di \mathbf{R}^3 . Grazie al teorema del Dini, l'immagine $\phi(D)$ può essere descritta localmente come grafico di funzioni regolari definite su opportuni sottinsiemi dei piani coordinati.

Ma come possiamo definire l'area di $\phi(D)$? Verrebbe la tentazione di usare lo stesso procedimento che abbiamo seguito per le curve, e di definire l'area di una superficie come il sup delle aree delle *superfici poliedrali inscritte* alla superficie (cioè superfici fatte di triangolini adiacenti, i cui vertici stanno tutti sulla superficie). Purtroppo questo non funziona: in classe abbiamo visto un esempio, dovuto a Schwartz, che mostra come il sup delle aree delle poliedrali inscritte può essere $+\infty$ anche per un oggetto bellissimo come la superficie laterale di un cilindro.

L'idea euristica per arrivare ad una definizione soddisfacente dell'area di $\phi(D)$ è la seguente: decomponiamo il dominio D in tanti pezzetti disgiunti D_i , e scegliamo all'interno di ciascuno di questi un punto (u_i, v_i) . Vicino a questo punto, avremo che $\phi(u, v) \simeq \phi(u_i, v_i) + \nabla\phi(u_i, v_i) \cdot (u - u_i, v - v_i)$, cioè ϕ si approssima bene col suo polinomio di Taylor di ordine 1. Ebbene, prendiamo l'area dell'immagine di D_i secondo questa funzione affine, sommiamo su tutti gli elementi della suddivisione e passiamo al limite al tendere a zero dei diametri dei D_i .

Ora, l'osservazione chiave è la seguente: se D_i è un *insieme misurabile secondo Peano-Jordan*, l'area della sua immagine secondo la funzione affine scritta sopra vale esattamente

$$(*) \quad m(D_i) \left| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u_i, v_i) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u_i, v_i) \right|,$$

dove $w \wedge z$ denota il *prodotto vettoriale* di due vettori $w, z \in \mathbf{R}^3$.

Se questo è vero, diventa del tutto ragionevole la seguente

DEFINIZIONE: Sia $\phi : \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}^3$ una parametrizzazione di una superficie regolare (vedi sopra). Allora l'area di $\phi(D)$ si definisce come

$$\text{Area}(\phi(D)) := \int_D |\phi_u \wedge \phi_v| \, du \, dv.$$

Al fine di comprendere l'affermazione fatta sopra, vale la pena di ripassare un po' le proprietà del prodotto vettoriale, che dovrebbe essere già noto dal corso di fisica.

Il prodotto vettoriale è un'applicazione $\wedge : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $(v, w) \mapsto v \wedge w$ che è *bilineare* e *antisimmetrica* (cioè è lineare in ciascuno dei suoi due argomenti v, w , e inoltre $v \wedge w = -w \wedge v$ per ogni v, w). Sulla base canonica di \mathbf{R}^3 essa è definita come segue:

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_1 \wedge e_3 = -e_2, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1.$$

Grazie alla bilinearità e all'antisimmetria segue subito che se $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, allora

$$v \wedge w = \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} e_1 - \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} e_2 + \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} e_3.$$

Inoltre, si verifica subito che

$$(u \wedge v) \cdot w = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_1 & w_2 \\ u_3 & v_1 & w_3 \end{pmatrix},$$

dove \cdot denota il prodotto scalare standard in \mathbf{R}^3 . Basta infatti sviluppare il determinante rispetto all'ultima colonna e ricordare le definizioni di prodotto vettore e di prodotto scalare.

Immediata conseguenza di ciò è il fatto che $(u \wedge v) \cdot u = (u \wedge v) \cdot v = 0$, cioè il vettore $u \wedge v$ è ortogonale sia a u che a v .

Un'altra simpatica formuletta è la seguente:

$$(u \wedge v) \cdot (w \wedge z) = \det \begin{pmatrix} u \cdot w & v \cdot w \\ u \cdot z & v \cdot z \end{pmatrix}.$$

Essa si verifica agevolmente sui vettori della base canonica e si estende usando la bilinearità. In particolare, prendendo $u = w$, $v = z$ si ottiene

$$|u \wedge v|^2 = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2$$

da cui segue subito che

$$|u \wedge v| = |u| |v| \sin \alpha,$$

dove α è l'angolo ($\leq \pi$) compreso tra u e v . Il significato geometrico di questo è evidente: $|u \wedge v|$ rappresenta l'area del *parallelogramma individuato dai due vettori* u, v .

Di conseguenza, se Q è un quadrato in \mathbf{R}^2 e $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ è un'applicazione lineare, allora l'area del parallelogramma $L(Q)$ è data precisamente da $m(Q) |L(e_1) \wedge L(e_2)|$: da questo segue subito la (*) nel caso in cui D_i sia un quadrato...ed è quindi plausibile (e di dimostrazione non difficilissima) che questo valga anche se D_i è un insieme misurabile secondo Peano-Jordan.

Per verificare la "ragionevolezza" della nostra definizione di area, ci siamo divertiti a calcolare l'area di una sfera di raggio R , tramite la parametrizzazione

$$\phi(u, v) = \begin{pmatrix} R \sin u \cos v \\ R \sin u \sin v \\ R \cos u \end{pmatrix}, \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi].$$

Un semplice conto permette di ottenere $|\phi_u \wedge \phi_v| = R^2 \sin u$, da cui si ricava che l'area della sfera vale $4\pi R^2$...un risultato confortante!

Abbiamo anche verificato che l'area del *grafico* di una funzione $f : D \rightarrow \mathbf{R}$, con $D \subset \mathbf{R}^2$, è data da

$$Area(\Gamma_f) = \int_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dx dy.$$

Infine, abbiamo verificato che l'area di una superficie non dipende dalla sua parametrizzazione: precisamente, sia $\phi : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ una parametrizzazione regolare di una superficie, con $D \subset \mathbf{R}^2$ aperto. Sia poi $\psi : A \rightarrow D$ un diffeomorfismo tra un altro aperto A di \mathbf{R}^2 e D . Allora, la funzione $\tilde{\phi}(s, t) = \phi(\psi(s, t))$ è un'altra parametrizzazione della stessa superficie. Dimostriamo che $Area(\tilde{\phi}(A)) = Area(\phi(D))$.

Infatti si ha

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_s(s, t) &= \phi_u(\psi(s, t))\psi_{1, s}(s, t) + \phi_v(\psi(s, t))\psi_{2, s}(s, t), \\ \tilde{\phi}_t(s, t) &= \phi_u(\psi(s, t))\psi_{1, t}(s, t) + \phi_v(\psi(s, t))\psi_{2, t}(s, t), \\ \tilde{\phi}_s(s, t) \wedge \tilde{\phi}_t(s, t) &= \det \nabla \psi(s, t) \phi_u(\psi(s, t)) \wedge \phi_v(\psi(s, t)),\end{aligned}$$

da cui, ricordando la formula per il cambio di variabili negli integrali multipli:

$$\begin{aligned}Area(\tilde{\phi}(A)) &= \int_A |\phi_u(\psi(s, t)) \wedge \phi_v(\psi(s, t))| |\det \nabla \psi(s, t)| ds dt = \\ &= \int_D |\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)| du dv = Area(\phi(D)).\end{aligned}$$

Lezione del 15/12/2005 (2 ore): Ispirandoci alla definizione di integrale di una funzione lungo una curva (rispetto alla lunghezza d'arco), possiamo definire facilmente l'integrale di una funzione scalare su una superficie:

DEFINIZIONE: Se $\phi : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ è una parametrizzazione regolare di una superficie in \mathbf{R}^3 e $f : \phi(D) \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione continua, l'integrale di f sulla superficie $\phi(D)$ (rispetto all'elemento d'area) è per definizione il numero

$$\int_{\phi(D)} f d\sigma := \int_D f(\phi(u, v)) |\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)| du dv.$$

E' facile verificare che il valore dell'integrale non dipende dalla scelta della parametrizzazione della nostra superficie.

C'è anche una nozione di integrale di un campo di vettori su una superficie: si tratta del *flusso*, che è l'integrale della componente *normale alla superficie* del campo di vettori stesso. Per poter calcolare questa componente, è però necessario scegliere un'orientazione della normale stessa.

Se $\phi(D)$ è una superficie parametrizzata in modo regolare dalla funzione $\phi : D \rightarrow \mathbf{R}^3$, quanto abbiamo visto la volta scorsa sul prodotto vettoriale ci dice che il vettore $\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)$ è sempre diverso da 0 (perché la matrice $\nabla \phi$ ha ovunque rango 2 grazie alla regolarità della parametrizzazione), ed è anche ortogonale al piano tangente alla superficie. Ne segue che il vettore

$$n(u, v) = \frac{\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)}{|\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)|}$$

è un vettore unitario (direzione) normale alla superficie. Scegliamo tale vettore come *normale positiva* alla superficie.

È lecito chiedersi cosa succede a questo vettore normale se scegliamo un'altra parametrizzazione della stessa superficie, del tipo $\tilde{\phi}(s, t) = \phi(\psi(s, t))$,

con $\psi : A \rightarrow D$ diffeomorfismo. Ebbene, la nuova parametrizzazione produce un versore normale che coincide con quello dato dalla vecchia parametrizzazione ϕ se $\det \nabla \psi(s, t) > 0$, mentre ha direzione opposta se $\det \nabla \psi(s, t) < 0$: nel primo caso diremo che ψ conserva l'orientazione di \mathbf{R}^2 , nel secondo che la rovescia.

DEFINIZIONE: Sia $\phi : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ una parametrizzazione regolare di una superficie e denotiamo con n il corrispondente versore normale positivo. Data una funzione vettoriale (campo di vettori) $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ (o almeno una funzione vettoriale definita su un aperto contenente $\phi(D)$), il *flusso* di F attraverso la superficie $\phi(D)$ è per definizione l'integrale

$$\int_{\phi(D)} F \cdot n \, d\sigma = \int_D F(\phi(u, v)) \cdot (\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)) \, du \, dv.$$

Esso è semplicemente l'integrale sulla superficie della componente del campo di vettori F lungo la normale n .

Evidentemente, il flusso non cambia se cambiamo la parametrizzazione ϕ con un'altra che determini la stessa orientazione, mentre cambia di segno se l'orientazione viene rovesciata.

Uno dei principali teoremi che coinvolgono integrali di superficie è il teorema della divergenza. Occorre premettere che, data una funzione vettoriale (o campo vettoriale) $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ di classe C^1 , la sua *divergenza* è la funzione scalare

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z),$$

ossia è la traccia della matrice ∇F .

TEOREMA (della divergenza): Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un aperto limitato regolare¹⁹, $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una funzione vettoriale di classe C^1 . Allora, se n denota la normale a $\partial\Omega$ diretta verso l'esterno di Ω , si ha

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Vedremo la prossima volta la dimostrazione di questo teorema, sotto ipotesi un pochino più restrittive sull'aperto Ω che facilitano un bel po' la dimostrazione...

¹⁹Questo significa che Ω , in un intorno di ogni punto della sua frontiera, coincide con il *sottografico* di una funzione di classe C^1 definita su uno dei piani coordinati.

Oggi ci siamo accontentati di vedere un'importante analogo bidimensionale del teorema della divergenza:

TEOREMA (Formula di Gauss-Green): Sia $D \subset \mathbf{R}^2$ un aperto limitato normale rispetto ai due assi coordinati²⁰. Supponiamo inoltre che la frontiera di D sia regolare a tratti, e siano $A(x, y), B(x, y)$ due funzioni regolari definite su \mathbf{R}^2 . Allora vale l'identità

$$\int_{\partial D} A dx + B dy = \int_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy,$$

dove si conviene di orientare la frontiera ∂D in modo che in ogni punto $x \in \partial D$, la coppia ordinata di vettori ortogonali $(n(x), t(x))$, dove $n(x)$ è la normale uscente da D nel punto x e $t(x)$ il vettore tangente a ∂D nel senso di percorrenza della curva, si possa portare a coincidere con la coppia ordinata (e_1, e_2) tramite una rotazione.

DIM.: Essendo D normale rispetto all'asse x , esso si scrive come in nota. Siccome la frontiera è regolare a tratti, le due funzioni f, g sono anche loro C^1 a tratti. Mostriamo che si ha

$$-\int_D \frac{\partial A}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D} A dx.$$

La metà mancante della formula di Gauss-Green si prova poi allo stesso modo, usando la normalità del dominio rispetto all'asse y .

Ora, un conto brutale mostra che

$$-\int_D \frac{\partial A}{\partial y} dx dy = \int_a^b [A(x, g(x)) - A(x, f(x))] dx.$$

Invece, l'integrale della forma differenziale $A dx$ sulla frontiera ∂D percorsa in senso antiorario (si veda sopra la convenzione sull'orientazione) consiste nel grafico di g percorso da sinistra a destra, da due tratti verticali e dal grafico di f percorso da destra a sinistra. Il contributo dei tratti verticali è nullo perché la forma $A dx$ ha solo la componente orizzontale. Invece, l'integrazione sui grafici di g e f fornisce

$$\int_{\partial D} A dx = \int_a^b [A(x, g(x)) - A(x, f(x))] dx,$$

che è la tesi. Q.E.D.

²⁰ D si dice normale rispetto all'asse x se esistono un intervallo (a, b) e due funzioni $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ tali che $D = \{(x, y) : x \in [a, b], g(x) < y < f(x)\}$.

Abbiamo poi visto che questa formula *si applica a domini molto più generali di quelli normali rispetto a entrambi gli assi*: precisamente, se abbiamo un qualunque dominio D che si possa decomporre tramite tagli rettilinei in un numero finito di sottodomini, ciascuno dei quali sia normale rispetto a entrambi gli assi, allora la formula di Gauss-Green vale anche per il dominio D . Infatti, abbiamo visto che gli integrali sui “tagli” si elidono due a due, e rimangono solo i contributi dovuti alla frontiera di D .

Un’interessante ed immediata conseguenza della formula di Gauss-Green sono le seguenti formule per calcolare l’area del dominio D :

$$m(D) = \int_D 1 \, dx \, dy = \int_{\partial D} x \, dy = - \int_{\partial D} y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} [x \, dy - y \, dx].$$

Lezione del 19/12/2005 (2 ore): Con la formula di Gauss-Green si può dare anche una semplice dimostrazione della formula per il cambio di variabili negli integrali doppi (cioè in dimensione due).

Supponiamo che $\psi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ sia un diffeomorfismo tra due aperti A, B di \mathbf{R}^2 , e supponiamo anche che ψ sia di classe C^2 : quest’ipotesi potrebbe essere eliminata ma ci semplifica di molto la dimostrazione.

Sia poi D un aperto regolare con $\bar{D} \subset A$. A un tale aperto è sempre possibile applicare la formula di Gauss-Green (anche se la nostra dimostrazione vale solo se D è decomponibile in un numero finito di aperti normali rispetto a entrambi gli assi coordinati...).

Sia D' l’aperto corrispondente secondo il diffeomorfismo ψ , cioè $D' = \psi(D)$. Anche questo è un aperto regolare. Mostriamo che si ha

$$(*) \quad m(D') = \int_D |\det \nabla \psi(x, y)| \, dx \, dy.$$

In modo analogo anche se più contoso potremmo dimostrare che

$$\int_{D'} f(u, v) \, du \, dv = \int_D f(\psi(x, y)) |\det \nabla \psi(x, y)| \, dx \, dy$$

per ogni funzione f sufficientemente regolare...però ci accontentiamo di dimostrare la (*).

Essendo ψ un diffeomorfismo, la funzione $\det \nabla \psi$ è sempre positiva o sempre negativa: nel primo caso, si può far vedere che ψ manda la curva ∂D percorsa in senso positivo nella curva $\partial D'$ percorsa in senso positivo. In caso contrario, l’orientazione si rovescia.

Supponiamo dunque che sia $\det \nabla \psi > 0$, e che una parametrizzazione regolare di ∂D percorso in senso positivo sia data da $(x(t), y(t))$, con $t \in [a, b]$.

Applicando una delle formule viste la volta scorsa per calcolare l'area di un dominio piano, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} m(D') &= \int_{\partial D'} u \, dv = \int_a^b u(x(t), y(t)) dv(x(t), y(t)) = \\ &= \int_a^b u(x, y)[v_x x' + v_y y'] \, dt = \int_{\partial D} uv_x \, dx + uv_y \, dy = \\ &= \int_D [(uv_y)_x - (uv_x)_y] \, dx \, dy, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la formula di Gauss-Green. Ora, ricordando che $\psi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ è di classe C^2 si ha:

$$(uv_y)_x - (uv_x)_y = u_x v_y + uv_{xy} - u_y v_x - uv_{yx} = u_x v_y - u_y v_x = \det \nabla \psi,$$

da cui (*).

Se poi $\det \nabla \psi < 0$, occorre mettere un segno meno davanti all'ultimo integrale perché il diffeomorfismo cambia l'orientazione della frontiera!

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema della divergenza in \mathbf{R}^3 : essa è molto simile a quella della formula di Gauss-Green.

DIMOSTRAZIONE del teorema della divergenza: Supponiamo per semplicità che l'aperto Ω sia *normale rispetto ai tre piani coordinati*. In particolare, essendo il nostro dominio normale rispetto al piano xy , esistono un aperto $D \subset \mathbf{R}^2$ e due funzioni $f, g : D \rightarrow \mathbf{R}$ tali che $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, g(x, y) < z < f(x, y)\}$. Facciamo vedere che

$$(**) \int_{\partial \Omega} (0, 0, F_3) \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz,$$

dove n rappresenta la normale esterna a $\partial \Omega$. Gli altri due pezzi mancanti dell'enunciato si otterranno allo stesso modo, sfruttando la normalità di Ω rispetto agli altri due piani coordinati.

Calcoliamo dapprima il flusso. Si noti che il contributo all'integrale della "superficie laterale" di $\partial \Omega$ è zero, perché il campo di vettori che stiamo considerando è diretto lungo l'asse z , mentre la normale è orizzontale: rimangono solo i contributi dovuti all'integrazione sui grafici di f e di g : in conclusione, ricordando la definizione di integrale di superficie, otteniamo

$$\begin{aligned} &\int_{\partial \Omega} (0, 0, F_3) \cdot n \, d\sigma = \\ &= \int_D (0, 0, F_3(x, y, f(x, y))) \cdot (-f_x, -f_y, 1) \, dx \, dy - \\ &= \int_D (0, 0, F_3(x, y, g(x, y))) \cdot (-g_x, -g_y, 1) \, dx \, dy = \\ &= \int_D F_3(x, y, f(x, y)) \, dx \, dy - \int_D F_3(x, y, g(x, y)) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Si noti che il segno meno è dovuto al fatto che la normale esterna a $\partial\Omega$ punta verso il basso sul grafico di g .

D'altra parte,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \int_D dx dy \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz = \int_D F_3(x, y, f(x, y)) dx dy - \int_D F_3(x, y, g(x, y)) dx dy$$

e la (***) è dimostrata. Q.E.D.

Un altro importante teorema che coinvolge l'integrazione su superfici in \mathbf{R}^3 è il teorema di Stokes. Sia $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ un campo vettoriale regolare.

Il *rotore* di F è per definizione il campo vettoriale

$$\text{rot } F(x, y, z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{3,y} - F_{2,z} \\ F_{3,x} - F_{1,z} \\ F_{2,x} - F_{1,y} \end{pmatrix}.$$

Vale allora il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione:

TEOREMA (di Stokes): Sia S una superficie regolare orientata in \mathbf{R}^3 con normale positiva n , e supponiamo che ∂S sia una curva regolare con vettore tangente t . Denotiamo inoltre con ν la normale a ∂S , orientata verso l'esterno di S . Supponiamo che t sia orientato in modo che la terna di vettori (t, n, ν) sia riconducibile con una rotazione alla terna (e_1, e_2, e_3) (o, in altri termini, supponiamo che $t \wedge n = \nu$). Allora si ha

$$\int_S \text{rot } F \cdot n d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot t ds.$$

Questo teorema ha un'interessante interpretazione in termini di forme differenziali: se al campo di vettori F facciamo corrispondere la forma $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$, allora F ha rotore nullo se e soltanto se ω è chiusa. Il teorema di Stokes assicura che l'integrale di una forma chiusa è nulla su qualunque cammino chiuso che sia *bordo di una superficie contenuta nel dominio della forma*.