Esercizi sulle equazioni differenziali

a cura di Sisto Baldo, Elisabetta Ossanna e Sandro Innocenti

1. Verifica che $y(t) = -1 - t + 2e^t$ è una soluzione dell'equazione $y'(t) = y(t) + t$.

2. Scrivi un'equazione differenziale che ha come soluzione $y(t) = \cos(t)$.

3. Sia $y(t)$ una soluzione dell'equazione differenziale $y'(t) = \log(1 + y^2(t))$ tale che $y(0) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   - $y'(0) > 0$
   - $y'(0) \leq 0$

4. Considera l'equazione differenziale $y'(t) = e^{y(t)-t^2}(3 + y^2(t))$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta per ogni soluzione $y(t)$?

   - $y(t)$ è costante
   - $y(t)$ è crescente
   - $y(t)$ è decrescente

5. Verifica che una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   è la funzione $y(t) = \frac{1}{1-t}$ e che tale soluzione risulta definita solo per $t < 1$[1]. Verifica che è possibile applicare il teorema di esistenza e unicità locale (e quindi possiamo legittimamente dire che questa è "la" soluzione!).

6. Affronta lo studio qualitativo delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'(t) = t \cdot y(t)$. (Considera che per questa equazione vale il teorema di esistenza e unicità enunciato a lezione, e che le soluzioni sono definite per ogni t reale).

7. Considera il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

[1] Si noti che, per definizione, una soluzione di un problema di Cauchy deve essere una funzione *derivabile* definita in un *INTERVALLO contenente il punto iniziale*. La funzione $y(t) = \frac{1}{1-t}$ risulta definita anche per $t > 1$, ma tale soluzione non ha più alcuna relazione con il dato iniziale $y(0) = 1$...

Verifica che questo problema ammette come soluzione la funzione $y(t) = 0$, ma anche le infinite funzioni

$$y(t) = \begin{cases} 0 & se\ t < t_0 \\ \frac{(t-t_0)^2}{4} & se\ t \geq t_0 \end{cases}$$

per qualunque scelta di $t_0 > 0$. Perché in questo caso il teorema di esistenza e unicità fallisce?

8. Verifica che l'equazione differenziale $y''(t)+y'(t) = \cos t$ ha una soluzione della forma $y(t) = a\cos t + b\sin t$, per opportuni valori delle costanti a e b.

Attenzione: I problemi che seguono non sono proprio facili...

9. Complichiamo un po' l'esercizio 2: spiega se è possibile trovare un'equazione del tipo $y'(t) = f(y(t))$ (con f funzione regolare) che abbia come soluzione $y(t) = \cos(t)$ (per ogni t reale). E una del tipo $y''(t) = f(y(t))$?

10. Durante la lezione, abbiamo fatto uso del seguente risultato: se $y(t)$ è una funzione derivabile tale che esiste finito il limite $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \ell$, e se inoltre esiste il limite $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = m$, allora $m = 0$ (detto in altre parole: se una funzione $y(t)$ ha un asintoto orizzontale per $t \to +\infty$, e la sua derivata ammette limite a $+\infty$, questo limite è necessariamente 0).

    Prova a dimostrare che questo enunciato è vero!

    [Suggerimento: *Se non fosse vero, dovrebbe essere $m > 0$ oppure $m < 0$. Supponiamo per esempio $m > 0$: per la definizione di limite avremo che $y'(t) \geq \frac{m}{2}$ per x abbastanza grande (diciamo per $t \geq \bar{t}$).*

    Dico che allora

    $$(*) \qquad y(t) \geq y(\bar{t}) + \frac{m}{2}(t-\bar{t}) \text{ per } t \geq \bar{t},$$

    da cui si ricava facilmente un assurdo passando al limite per $t \to +\infty$...

    Per mostrare che la $(*)$ è vera, si studi la funzione $g(t) = y(t) - y(\bar{t}) - \frac{m}{2}(t-\bar{t})$ per $t \geq \bar{t}$.]

11. Considera la funzione $y(t) = \frac{1}{t} \sin t^3$, e calcola il limite per $t \to +\infty$ di $y(t)$ e di $y'(t)$ (ammesso che questi limiti esistano...). Spiega perché il risultato ottenuto non contraddice l'enunciato dell'esercizio precedente! E' possibile costruire un esempio di questo tipo con una funzione *crescente*?

12. Data la funzione (discontinua)

$$f(y) = \begin{cases} 1 & se\ y < 0 \\ -1 & se\ y \geq 0 \end{cases}$$

considera il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

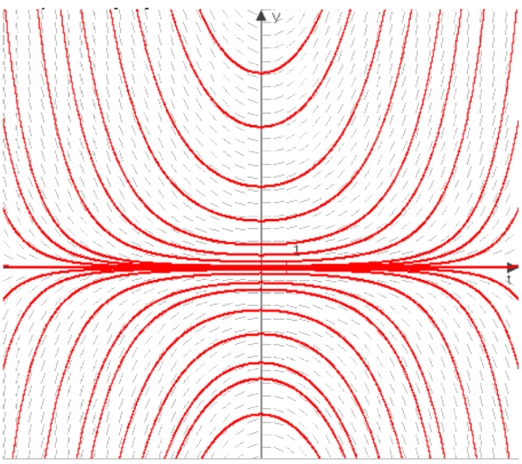
Mostra che questo problema non ammette soluzione in nessun intorno destro dell'istante iniziale $t = 0$.

13. Affronta lo studio qualitativo delle soluzioni dell'equazione differenziale del problema 1, *senza* risolverla esplicitamente. (Anche in questo caso, vale il teorema di esistenza e unicità locale. Inoltre, le soluzioni sono definite per ogni t reale).

Soluzioni

1. Si tratta semplicemente di sostituire nell'equazione...
2. Per esempio, $y'(t) = -\sin t$.
3. Si ha $y'(0) = \log(1 + y^2(0)) = \log 1 = 0$, per cui l'affermazione corretta è la seconda.
4. Il secondo membro dell'equazione differenziale è strettamente positivo, quindi tutte le soluzioni dell'equazione differenziale data sono crescenti.
5. Per verificare che la funzione data è soluzione dell'equazione basta sostituire. Questo è un esempio di problema di Cauchy per cui si ha soltanto esistenza *locale* della soluzione: la soluzione non è definita per ogni t reale.
6. Il secondo membro dell'equazione è positivo nel primo e terzo quadrante (nei quali perciò le soluzioni saranno crescenti), e negativo nel secondo e quarto quadrante (dove le soluzioni saranno decrescenti). La funzione $y(t) = 0$ è una soluzione costante, che le altre soluzioni non possono oltrepassare per il teorema di unicità. Inoltre, $y''(t) = y(t) + ty'(t) = (1 + t^2)y(t)$: la derivata seconda ha lo stesso segno di $y(t)$ (per cui le soluzioni sono *convesse* al di sopra dell'asse delle t, *concave* al di sotto.

   Le informazioni così riassunte sono sufficienti a dire che le soluzioni avranno l'aspetto in figura:



7. Le funzioni proposte sono derivabili anche per $t = t_0$ (la costante e la parabola si “attaccano” con derivata 0). Per verificare che sono soluzioni dell'equazione, basta sostituire.

   In questo caso, il teorema di esistenza e unicità locale non è applicabile perché la funzione $f(y) = \sqrt{|y|}$ non è derivabile per $y = 0$.

8. Sostituiamo la nostra “candidata soluzione” nel primo membro dell'equazione differenziale: otteniamo $y''(t) + y'(t) = (b - a)\cos t - (a + b)\sin t$. Quest'espressione deve essere uguale al secondo membro $\cos t$, per cui si deve avere $b - a = 1$ e $a + b = 0$. Si trova $b = 1/2$, $a = -1/2$.

9. L'equazione logistica studiata a lezione era proprio del tipo $y'(t) = f(y(t))$ (equazione autonoma). Se riapplichiamo i ragionamenti del nostro studio qualitativo, ci accorgiamo che un'equazione di questo tipo può avere soltanto soluzioni costanti, crescenti oppure decrescenti (a seconda del segno di $f(y)$ nelle varie strisce del piano ty). In particolare, non esiste un'equazione autonoma che abbia come soluzione la funzione oscillante $y(t) = \cos t$.

   La risposta alla seconda domanda è invece affermativa: l'equazione $y''(t) + y(t) = 0$ ha come soluzione $y(t) = \cos t$.

10. Supponiamo per assurdo che sia $m > 0$. Applichiamo la definizione di limite all'infinito (con $\varepsilon = \frac{m}{2}$): troviamo $\bar{t}$ tale che per ogni $t \geq \bar{t}$ si ha $|y'(t) - m| < \frac{m}{2}$. In particolare, $y'(t) > \frac{m}{2}$ per ogni $t \geq \bar{t}$.

    Consideriamo ora, come da suggerimento, la funzione $g(t) = y(t) - y(\bar{t}) - \frac{m}{2}(t - \bar{t})$. Si ha $g(\bar{t}) = 0$, ed inoltre $g'(t) = y'(t) - \frac{m}{2}$. Per quanto visto sopra, si ha $g'(t) > 0$ per $t \geq \bar{t}$, per cui la funzione g è crescente nella semiretta $t \geq \bar{t}$. Ne segue che $g(t) \geq g(\bar{t}) = 0$ per $t \geq \bar{t}$, da cui

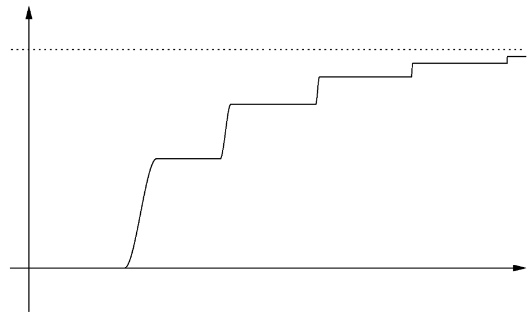
    $$y(t) \geq y(\bar{t}) + \frac{m}{2}(t - \bar{t}) \qquad \forall t \geq \bar{t}$$

    Ora, il membro di destra della disuguaglianza tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$, per cui $y(t)$ non può avere limite finito, contro l'ipotesi. In maniera del tutto analoga si dimostra che non può essere $m < 0$.

11. Si ha evidentemente $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$, mentre $y'(t) = -\frac{1}{t^2}\sin t^3 + 3t\cos t^3$. Il limite di $y'(t)$ per $t \to +\infty$ non esiste: il primo addendo tende a 0, ma il secondo oscilla assumendo valori positivi e negativi arbitrariamente grandi.

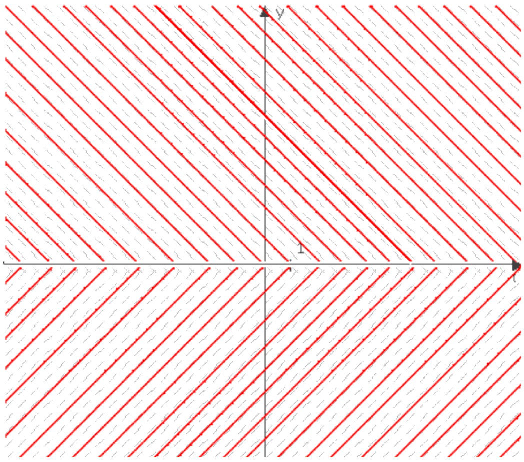
Questo non contraddice l'enunciato dell'esercizio precedente: in quel caso abbiamo infatti supposto *per ipotesi* che il limite della derivata ci sia!

È anche possibile, ma più complicato, ottenere un esempio del genere con una funzione crescente: per averne un'idea, si osservi la funzione in figura



Si tratta di una specie di scaletta, con infiniti scalini "arrotondati" (in modo da avere una funzione derivabile). Gli scalini sono sempre più bassi, in modo che l'altezza totale della scala rimanga finita (e ci sia quindi l'asintoto orizzontale). In compenso, i trattini in salita sono sempre più stretti, in modo che la derivata si mantenga alta. Questa funzione avrà dunque derivata zero per la maggior parte del tempo, ma c'è una successione divergente di punti in cui la derivata è lontana da zero (e si può anzi fare in modo che tenda all'infinito): in conclusione, non esiste il limite della derivata per $t \to +\infty$.

12. Notiamo innanzitutto che la funzione $f(y)$ è discontinua solo per $y = 0$, mentre è costante in un intorno di qualunque altro valore. Per questo motivo, il teorema di esistenza e unicità locale è perfettamente applicabile ad ogni dato iniziale (t_0, y_0) con $y_0 \neq 0$. Con tale dato iniziale, la soluzione in un intorno di t_0 sarà $y(t) = y_0 + t - t_0$ se $y_0 < 0$, mentre sarà $y(t) = y_0 + t_0 - t$ se $y_0 > 0$ (evidentemente, tali soluzioni restano "valide" finché non intersecano l'asse delle t...). Insomma, se prendiamo punti iniziali che *non* giacciono sull'asse delle t otteniamo delle soluzioni come in figura:



Dalla figura, è intuibile che una soluzione può "arrivare" in un punto sull'asse delle t, ma non può "ripartirne". Consideriamo infatti il problema di Cauchy assegnato, e supponiamo (per assurdo) che ci sia una soluzione $y(t)$ definita in un certo intorno destro $[0, \delta)$ di 0. Evidentemente, tale soluzione non può essere identicamente nulla (perché la costante $y(t) = 0$ non soddisfa l'equazione differenziale): deve esistere un istante t_0 compreso tra 0 e δ tale che $y(t_0) \neq 0$.

Se fosse $y_0 = y(t_0) > 0$, abbiamo appena visto che l'unica soluzione dell'equazione differenziale che passa per il punto (t_0, y_0) è della forma $y(t) = y_0 + t_0 - t$ (finché tale funzione non interseca l'asse delle t: in particolare, la soluzione è di questo tipo per ogni $t < t_0$). Poiché una tale soluzione non soddisfa certamente la condizione iniziale $y(0) = 0$, il nostro assunto è impossibile.

Analogamente, se avessimo $y_0 = y(t_0) < 0$ la soluzione sarebbe $y(t) = y_0 + t - t_0$ per ogni $t < t_0$, e anche in questo caso la condizione $y(0) = 0$ non sarebbe verificata. Dobbiamo concludere che il nostro problema di Cauchy non ammette alcuna soluzione a destra di 0.

Si noti che, complicando leggermente l'esempio, si può ottenere un problema di Cauchy che non abbia soluzione *né a destra né a sinistra di* 0: basta prendere la funzione

$$f(t, y) = \begin{cases} 1 & \textit{se } ty < 0 \\ -1 & \textit{se } ty \geq 0 \end{cases}$$

ed il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

non ammette soluzione né a destra né a sinistra di $t = 0$.

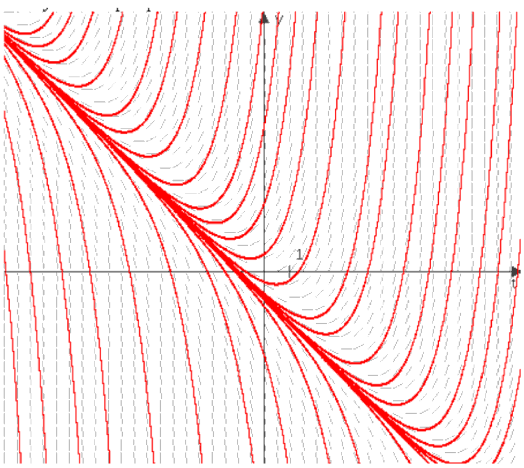
13. L'equazione differenziale data è $y'(t) = y(t) + t$: si tratta di un'equazione lineare, che si potrebbe anche risolvere esplicitamente.

Il secondo membro della nostra equazione è dato dalla funzione $f(t, y) = y + t$. Dunque, le soluzioni avranno derivata m sulle rette $y = -t + m$ ("isocline").

In particolare, le soluzioni avranno derivata zero quando attraversano la retta $y = -t$, mentre saranno crescenti al di sopra di essa e decrescenti al di sotto. Dunque, una soluzione che attraversi la retta avrà ivi un *punto di minimo*.

Si ha poi $y''(t) = y'(t) + 1 = y(t) + t + 1$. Se ne deduce che le soluzioni sono *convesse* se $y > -t-1$, concave se $y < -t-1$. Ci si accorge anche (magia!) che la funzione $y(t) = -t - 1$ (la retta su cui "cambia la convessità delle soluzioni") è una soluzione dell'equazione differenziale. Evidentemente, per il teorema di unicità nessuna altra soluzione potrà attraversare questa retta!

A questo punto, possiamo "indovinare" che le soluzioni abbiano l'andamento in figura:



Nel disegno, abbiamo implicitamente supposto che tutte le soluzioni siano asintotiche alla retta $y = -t - 1$ per $t \to -\infty$: questo può essere dimostrato in modo rigoroso come segue.

Abbiamo visto che una soluzione $y(t)$ contenuta nel semipiano $y > -t-1$ è convessa: in particolare, la sua derivata è una funzione crescente e deve esistere $\lim_{t\to-\infty} y'(t) = \overline{m}$. Dall'equazione differenziale si ricava allora che $y(t) - (-t + \overline{m}) \to 0$ per $t \to -\infty$: la retta $y = -t - m$ è un asintoto obliquo per la soluzione. Ma allora la derivata $y'(t)$ (che abbiamo visto ammette limite) deve tendere proprio alla pendenza dell'asintoto, che è -1: in conclusione, $\overline{m} = -1$ e la soluzione $y(t)$ ha come asintoto proprio la retta $y = -t - 1$.

Lo stesso ragionamento si applica anche alle soluzioni (concave) contenute nel semipiano $y = -t - 1$.