Dipartimento di Informatica - Università di Verona
Piano Lauree Scientifiche - Progetto Nazionale di Matematica

Le funzioni continue: cosa sono. . . e perché le amiamo

Incontro con le Classi V del Liceo Fracastoro

S. Baldo, 21 ottobre 2017

1 Funzioni continue

In questo incontro vedremo un bel po' di cose sulle funzioni continue: cominciamo subito vedendone la definizione, che costituisce uno dei concetti fondamentali dell'analisi matematica.

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, ove (per il momento) $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo: vedremo a breve una generalizzazione a funzioni definite su sottinsiemi qualunque della retta reale.

DEFINIZIONE (Funzione continua su un intervallo): Dato $x_0 \in I$, diciamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nel caso in cui x_0 sia l'estremo sinisto (risp. l'estremo destro) dell'intervallo, il limite è da intendersi come limite destro (risp. sinistro).

Se f è continua in tutti i punti di I, diremo che essa è continua in I.

Informalmente, questa definizione ci dice che i valori assunti da $f(x)$ per x vicino a x_0 sono vicini a$f(x_0)$, o meglio che $f(x)$ diventa *arbitrariamente vicino a* $f(x_0)$ a patto di prendere x *sufficientemente vicino* a x_0.

Molti testi descrivono una funzione continua su un intervallo come una funzione il cui grafico si può disegnare "senza staccare la penna dal foglio": un immagine molto evocativa ma da prendere un po' con le pinze...

Purtroppo, infatti, non si presta affatto a descrivere funzioni continue definite su insiemi che non siano intervalli. Inoltre, esistono funzioni continue così"brutte" che è davvero difficile immaginare di poterle disegnare!

Vediamo come generalizzare la nostra definizione ad una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, dove $A \subset \mathbb{R}$ è arbitrario.

Ricordo che x_0 si dice *punto di accumulazione* per A se esistono punti di A *arbitrariamente vicini* a x_0 e distinti da x_0 (in altre parole, se la distanza di x_0 da $A \subset \{x_0\}$ è nulla). Questa nozione ha una certa importanza perché ha senso chiedersi quanto vale il limite di una funzione soltanto in punti di accumulazione del suo dominio. Un punto $x_0 \in A$ che non sia di accumulazione per A si dice *punto isolato* di A: questo significa che esiste un intervallino non banale, centrato in x_0, che non contiene nessun altro punto di A.

DEFINIZIONE (Funzione continua, caso generale): Siano $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. f si dice continua in x_0 se x_0 è di accumulazione per A e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

oppure se x_0 è un punto isolato di A. Se f è continua in ogni punto $x_0 \in A$, si dice continua in A.

Come si vede, abbiamo deciso di dichiarare che una funzione è sempre continua in un punto isolato del suo dominio: questo è in accordo con l'idea informale che $f(x)$ diventi arbitrariamente vicina a $f(x_0)$ a patto che x sia abbastanza vicino a x_0. Infatti, se ci avviciniamo abbastanza a x_0 non troviamo nessun altro punto in cui la funzione sia definita... e quindi non c'è nessun confronto da fare! Questa parte della definizione di continuità è piuttosto sottile, ma ha una sua piccola importanza. Mettendo assieme la nostra definizione con quella di limite possiamo scrivere

FORMULAZIONE EQUIVALENTE della definizione di continuità: Siano $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. f si dice continua in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$ valga $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si noti che la definizione equivalente vale anche nei punti isolati di A.

Si verifica immediatamente che le funzioni costanti $f(x) = k$ e la funzione identità $f(x) = x$ sono continue in tutti i punti di $\mathbb{R}$. Lo sono anche le funzioni $\sin x$, $\cos x$ e la funzione esponenziale a^x con $a > 0$. Inoltre, grazie alle ben note proprietà dei limiti, somme, prodotti e rapporti di funzioni continue in un punto sono continue in quel punto (per il rapporto, ovviamente, non deve annullarsi il denominatore perché il punto deve appartenere al dominio della funzione). Ne segue subito che polinomi e funzioni razionali (anche in seno, coseno, esponenziale) sono funzioni continue.

Vedremo in seguito un risultato sulla continuità della funzione inversa che ci assicurerà, ad esempio, che la funzione radice quadrata (e tutte le radici n-esime) esistono e sono continue, e che la stessa cosa vale per il logaritmo e le funzione goniometriche inverse.

Anche la *composizione* di due funzioni continue è continua: se g è continua in x_0 e f è continua in $y_0 = f(x_0)$, allora $f(g(x))$ è continua in x_0. È facile convincersene a partire dalla "traduzione informale" della definizione, oppure dimostrarlo in modo rigoroso grazie alla definizione con ε, δ.

Nel caso di una funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$, con A insieme qualunque, l'idea informale secondo cui si può disegnare il grafico di una funzione continua senza staccare la penna dal foglio diventa piuttosto pericolosa:

ESEMPIO: La funzione $f(x) = 1/x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$: il dominio in questo caso non è un intervallo ma ha un buco. Inoltre, si tratta di una funzione continua in tutti i punti del suo dominio... ma è piuttosto evidente che non si può tracciarne il grafico senza staccare la penna dal foglio!

A questo proposito, noto che alcuni libri di testo (soprattutto delle scuole superiori) dichiarano che il punto $x = 0$ è di *discontinuità* per la funzione $f(x) = 1/x$. Personalmente, preferisco parlare di continuità e di discontinuità soltanto per punti che appartengano *al dominio della funzione*... ma si tratta solo di mettersi d'accordo sulle definizioni! Tra l'altro, questo non toglie nulla al fatto che attorno ai punti in cui si annulla il denominatore di una funzione razionale possano succedere cose interessanti...

Il seguente esempio mostra ancora una volta che aver dichiarato che una funzione è continua nei punti isolati del suo dominio può avere una sua piccola utilità:

ESEMPIO: Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$. Essa è continua in quanto composizione delle funzioni continue $g(x) = \sin x - 1$ e $h(x) = \sqrt{x}$. D'altra parte, il suo dominio è costituito soltanto da punti isolati: si tratta infatti dell'insieme

$$\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2 Il teorema di esistenza degli zeri e le sue conseguenze

Veniamo ora a due dei risultati più importanti sulle funzioni continue: il teorema di esistenza degli zeri ed il teorema di Weierstrass.

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI: Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione *continua* tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Si vede facilmente che la tesi può fallire se il dominio della funzione non è un intervallo, oppure se la funzione non è continua.

Questo teorema dall'aria innocua si rivela in realtà assai utile. Per esempio, consideriamo la funzione continua $f(x) = x^2 - a$ (con $a > 0$) sull'intervallo $[0, a+1]$. Si vede subito che $f(0) = -a < 0$, mentre $f(a+1) = a^2+a+1 > 0$. Il teorema ci assicura che esiste un punto c dell'intervallo tale che $c^2 - a = 0$: abbiamo così dimostrato che esiste la radice quadrata di a. Essa è poi unica perché la funzione considerata è strettamente crescente sulla semiretta dei reali positivi (e quindi non si può annullare due volte).

In maniera analoga possiamo dimostrare l'esistenza del logaritmo, delle funzioni trigonometriche inverse, delle radici di ogni ordine....Non sarà nemmeno difficile verificare che tutte queste funzioni sono continue.

DIMOSTRAZIONE del teorema di esistenza degli zeri: Usiamo il cosiddetto *metodo di bisezione*. Sia $d = (b - a)/2$ il punto medio dell'intervallo $[a, b]$: se $f(d) = 0$ siamo felicissimi perché abbiamo trovato il punto voluto, in caso contrario avremo $f(d) < 0$ oppure $f(d) > 0$. In ogni caso, in uno dei due "mezzi intervalli" $[a, d]$ oppure $[d, b]$ si ripropone la situazione di partenza:

f è negativa nell'estremo sinistro dell'intervallo, positiva nell'estremo destro. Chiamiamo $[a_1, b_1]$ il semiintervallo che gode di questa proprietà.

Ripetiamo poi la stessa costruzione: prendiamo il punto di mezzo dell'intervallo $[a_1, b_1]$ e osserviamo che se la funzione non si annulla nel punto di mezzo (ma se così fosse avremmo finito), in uno dei due mezzi intervalli che chiameremo $[a_2, b_2]$ si ripropone la situazione di partenza: $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) > 0$.

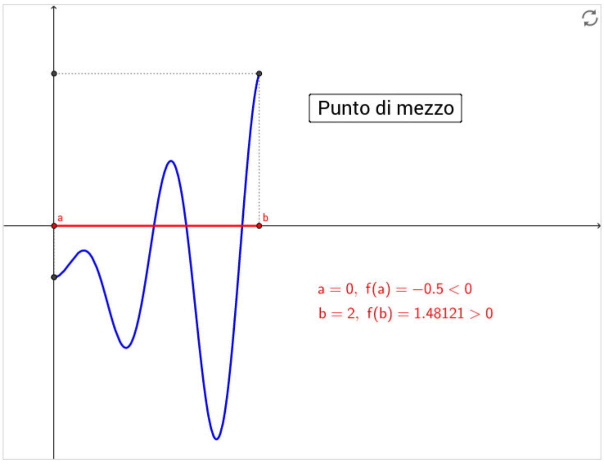
Iteriamo questa costruzione: se il processo non si arresta perché troviamo un punto in cui la funzione si annulla, avremo individuato una successione infinita di intervalli $[a_n, b_n]$, ciascuno contenuto nel precedente e tali che $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Per costruzione abbiamo che la successione degli estremi sinistri a_n è crescente, la successione degli estremi destri b_n è decrescente e inoltre $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. Siccome una successione crescente e limitata ammette limite finito[1], esisterà il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$, ed evidentemente $c \in [a, b]$.

È evidente che si ha anche $\lim_{n\to+\infty} b_n = c$ per quanto osservato sopra sulla differenza tra a_n e b_n. Grazie alla continuità di f, si ha poi

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) \qquad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c).$$

D'altra parte, il primo limite deve essere necessariamente ≤ 0 in quanto limite di una successione di numeri negativi, mentre il secondo deve essere ≥ 0 in quanto limite di una successione di numeri positivi: siccome i due limiti sono entrambi uguali a $f(c)$, ne deriva che $f(c) = 0$. Q.E.D.

Ecco un tentativo di illustrare la dimostrazione del teorema di esistenza degli zeri con GeoGebra (`https://www.geogebra.org/m/qZF8bzJj`):



[1] Più precisamente si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (esercizio!).

Un immediato corollario del teorema di esistenza degli zeri è il seguente

TEOREMA (dei valori intermedi): Se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *è una funzione continua, essa assume tutti i valori compresi tra* $f(a)$ *e* $f(b)$.

DIMOSTRAZIONE: Sia y_0 un valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Basta applicare il Teorema di esistenza degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - y_0$...
Q.E.D.

Questo teorema è particolarmente utile per dimostrare che certe funzioni continue sono *invertibili*.

DEFINIZIONE: Una funzione $f : A \to B$ (A, B insiemi) si dice *iniettiva* o *uno a uno* se $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$: in altre parole, dato $b \in B$ esiste *al più* un $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (oppure nessuno!).

f si dice poi *suriettiva* se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$, ossia se *l'immagine coincide col codominio*: $f(A) = B$.

Infine, f si dice *biiettiva* o *biunivoca* o *invertibile* se è sia iniettiva che suriettiva. In tal caso, esiste un'unica funzione $g : B \to A$ tale che $g(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$ e $f(g(b)) = b$ per ogni $b \in B$. Tale g si chiama inversa di f. Vale evidentemente anche il viceversa: esiste dunque l'inversa se e soltanto se f è biiettiva.

Dal teorema dei valori intermedi segue che se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ è una funzione continua e strettamente crescente (che è evidentemente iniettiva!), essa è *suriettiva* sull'intervallo $[f(a), f(b)]$: in altre parole, essa è *invertibile*. Questo ci assicura l'esistenza di radici, logaritmi, funzioni inverse delle funzioni trigonometriche...

Ecco un teomera che assicura la continuità della funzione inversa:

TEOREMA (Continuità delle funzioni monotone): Una funzione crescente $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *è continua se e solo se*

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)].$$

Un risultato analogo vale per le funzioni decrescenti.

DIM.: Se f è continua, la tesi è una conseguenza immediata del Teorema dei valori intermedi. Viceversa, supponiamo che f *non sia continua*, e sia x_0 un suo punto di discontinuità (supponiamo per semplicità $x_0 \in (a,b)$: le semplici modifiche necessarie nei casi $x_0 = a$ o $x_0 = b$ sono lasciate per esercizio).

Abbiamo osservato che le funzioni crescenti ammettono sempre limite destro e sinistro, che evidentemente devono essere diversi in x_0:

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) :\ a \le x < x_0\} < \\ \ell_2 &= \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) :\ x_0 < x \le b\}. \end{aligned}$$

Per la crescenza di f, segue subito che $f([a, b])$ contiene al più un punto dell'intervallo aperto (ℓ_1, ℓ_2), ossia il valore $f(x_0)$ se questo non coincide con uno dei due limiti: per questo motivo f non può essere suriettiva.
Q.E.D.

Da quest'ultimo teorema segue che *la funzione inversa di una funzione continua e strettamente crescente definita su un intervallo* $[a, b]$*, è anch'essa continua.* Infatti, la funzione inversa è strettamente crescente e suriettiva da $[f(a), f(b)]$ in $[a, b]$.

Sono in particolare continue le radici, i logaritmi, le funzioni trigonometriche inverse...

3 Il teorema di Weierstrass

Un altro, fondamentale risultato sulle funzioni continue è il teorema di Weierstrass, che sotto ragionevoli condizioni sul dominio ci assicura che una funzione continua ammette massimo e minimo assoluti:

TEOREMA (di Weierstrass): Una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, definita su un intervallo chiuso e limitato, ammette massimo e minimo assoluti in* $[a, b]$*.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $M = \sup\{f(x) : \ x \in [a, b]\}$. Dobbiamo mostrare che M è il massimo di f, cioè che $M < +\infty$ ed esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = M$.

Dimostriamo questo teorema con un procedimento di bisezione: dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in due intervalli uguali tramite il suo punto medio $c = (a + b)/2$. Su almeno uno dei due semiintervalli $[a, c]$ o $[c, b]$, l'estremo superiore di f sarà ancora M. Questo nuovo intervallo potrà poi essere ancora suddiviso in due, e su una delle due metà il sup sarà necessariamente M...

Proseguendo con questo procedimento, possiamo costruire una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ tali che

1. $[a_0, b_0] = [a, b]$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ per $n = 1, 2, \ldots,$
2. $\sup\{f(x) : \ x \in [a_n, b_n]\} = M,$
3. $b_n - a_n = (b - a)/2^n.$

Ci accorgiamo che la successione a_n è crescente, per cui esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0 \in [a, b]$, e che $\lim_{n\to+\infty} b_n = x_0$ (a causa di 3.).

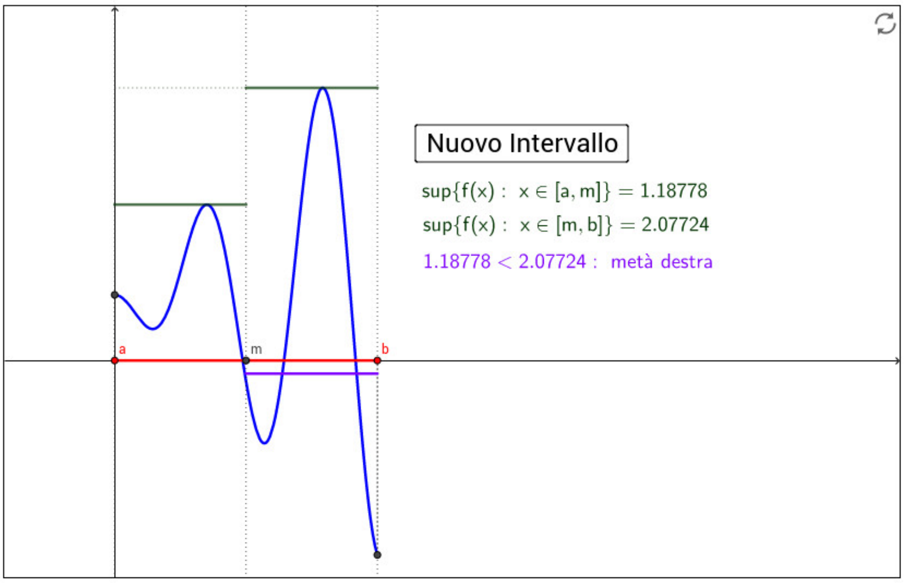
Dico che $f(x_0) = M$: questo è abbastanza credibile perché, grazie alla continuità di f in x_0, i valori assunti da $f(x)$ nell'intervallo $[a_n, b_n]$ (che diventa arbitrariamente piccolo) diventeranno arbitrariamente vicini a $f(x_0)$. Volendo darne una dimostrazione rigorosa, osserviamo innanzitutto che $f(x_0) \leq M$ per definizione di sup.

Supponiamo per assurdo che sia $f(x_0) < M$ e scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $f(x_0) + \varepsilon < M$. Per la continuità di f, esiste un intorno I di x_0 tale che, per ogni $x \in I \cap [a, b]$, si abbia

$$(*) \qquad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Siccome per n abbastanza grande avremo $[a_n, b_n] \subset I \cap [a, b]$, è chiaro che l'estremo superiore di f su $I \cap [a, b]$ dovrà essere $\leq M$: assurdo per la disuguaglianza di destra in $(*)$.
Q.E.D.

Ecco un tentativo di illustrare la dimostrazione del teorema di Weierstrass con GeoGebra (`https://www.geogebra.org/m/bEQgD77p`):



4 Esercizi

Questi esercizi vogliono dare degli spunti di riflessione su quanto abbiamo visto. Alcuni degli esercizi non sono semplici e richiedono attenzione e qualche idea: vale però la pena di provare a svolgerli da soli... prima di guardare la soluzione scritta di seguito.

Nello svolgimento di questi esercizi è a volte utile il seguente

TEOREMA (Del confronto o dei carabinieri): Siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ *con* $A \subset \mathbb{R}$ *tali che*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in A,$$

x_0 *un punto di accumulazione per* A*. Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell,$$

allora si ha anche $\lim_{x \to 0} g(x) = \ell$.

Se non ne avete visto la dimostrazione, si tratta di un semplice...esercizio in più!

1. Mostrare che, se diamo per buono che le funzioni $\sin x$, $\cos x$, e^x siano continue in 0, allora sono continue su tutta la retta reale.

2. Mostrare che le funzioni $\sin x$, $\cos x$ sono continue in 0. *[Sugg.: Si osservi che per angoli acuti* $0 < x < \pi/2$ *valgono le disuguaglianze* $0 < \sin x < x$ *e* $1 - \cos x < x$ *(da cui* $1 - x < \cos x < 1$*). Distinguere poi la continuità a destra e a sinistra...]*

3. Mostrare che la funzione e^x è continua in 0. *[Esercizio non facile! Sugg.: Si provi dapprima che* $\lim_{n \to +\infty} e^{1/n} = 1$ *(limite di successione). Questo può essere dimostrato usando la disuguaglianza di Bernoulli*

$$(1 + t)^n \geq 1 + nt,$$

valida per $t > -1$ *e* $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ *e dimostrabile facilmente per induzione. Se ne deduca la continuità a destra e poi quella a sinistra.]*

4. Mostrare che la composizione di due funzioni continue è una funzione continua.

5. Funzioni discontinue: mostrare che 0 è un punto di discontinuità per le funzioni

   $(a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & se\ x \neq 0, \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases}$ $\qquad$ $(b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & se\ x \neq 0, \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases}$

   $(c)\ f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & se\ x \neq 0, \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases}$ $\qquad$ $(d)\ f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \geq 0, \\ 0 & se\ x < 0. \end{cases}$

6. Mostrare che una successione crescente di numeri reali ammette limite, e che questo è uguale al suo estremo superiore.

7. Ecco una funzione continua che non è poi così facile da disegnare:

   $$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & se\ x \neq 0, \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases}$$

   Mostrare che f è continua in tutti i punti della retta reale ed abbozzarne un grafico.

8. Una funzione definita su tutta la retta reale può essere discontinua in tutti i punti. Un esempio è dato dalla *funzione di Dirichlet*

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

9. Una funzione definita su tutta la retta reale può essere continua in un solo punto (e discontinua in tutti gli altri). Un esempio è dato da

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

   Qual è l'unico punto di continuità? Giustificare le proprie affermazioni!

10. Una funzione ancora più strana: è possibile costruire una funzione definita sull'intervallo $]0, 1[$, continua in tutti i punti irrazionali e discontinua in tutti i punti razionali. A questo scopo, ricordiamo che ogni $q \in \mathbb{Q}$ può essere scritto in modo unico come frazione $q = m/n$ con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ tali che $M.C.D.(m, n) = 1$ (frazione ridotta ai minimi termini). Definiamo allora

    $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & se\ x \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[,\ \ x = m/n\ con\ m, n \in \mathbb{N},\ \ MCD(m, n) = 1, \\ 0 & se\ x \in]0, 1[\setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

    Dimostrare *(non è facilissimo!)* che questa funzione gode della proprietà vantata.

5 Soluzioni degli esercizi

1. Abbiamo deciso di dare per buono che

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin(0) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = \cos(0) = 1.$$

Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \lim_{x\to x_0} \sin(x_0 + (x - x_0)) = \lim_{y\to 0} \sin(x_0 + y) =$$
$$\lim_{y\to 0}(\sin x_0 \cos y + \cos x_0 \sin y) = \sin x_0,$$

dove abbiamo effettuato il cambio di variabile $y = x - x_0$. In maniera del tutto analoga si dimostra la continuità della funzione $\cos x$.

Per l'esponenziale, sappiamo che $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x\to x_0} e^x = \lim_{x\to x_0} e^{x_0+(x-x_0)} = \lim_{y\to 0} e^{x_0} e^y = e^{x_0},$$

dove ancora una volta abbiamo effettuato il cambio di variabile $y = x - x_0$.

2. Le disuguaglianze date vengono da semplici considerazioni geometriche. Siccome per angoli acuti (positivi) si ha $0 < \sin x < x$, passando al limite per $x \to 0^+$ (teorema del confronto) si ha $\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0 = \sin 0$. Si ha poi, con il cambio di variabile $y = -x$:

$$\lim_{x\to 0^-} \sin x = \lim_{y\to 0^+} \sin(-y) = -\lim_{y\to 0^+} \sin(y) = 0$$

e abbiamo provato che la funzione seno è continua in 0.

Analogamente, siccome $1 - x < \cos x < 1$ abbiamo $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1 = \cos 0$. Il limite sinistro si tratta come prima (la funzione coseno è pari...).

3. Dimostriamo per induzione la disuguaglianza di Bernoulli: per $n = 1$ essa è evidentemente vera. Supponiamola vera per n e dimostriamo che allora è vera anche per $n + 1$ (passo induttivo): si ha infatti

$$(1+t)^{n+1} = (1+t)(1+t)^n \geq (1+t)(1+nt) = 1+(n+1)t+nt^2 \geq 1+(n+1)t$$

ove nel terzo passaggio abbiamo usato l'ipotesi induttiva.

Sia poi $a_n = e^{1/n} - 1$, da cui $e = (1 + a_n)^n$. Poiché $a_n > 0$, dalla disuguaglianza di Bernoulli deduciamo $e = (1+a_n)^n \geq 1 + na_n$, da cui

$$0 < a_n \leq \frac{e-1}{n}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ (teorema del confronto) si ottiene $\lim_{n\to+\infty}(e^{1/n} - 1) = 0$, cioè $\lim_{n\to+\infty} e^{1/n} = 1$.

Da questa si deduce facilmente che $\lim_{x\to 0^+} e^x = 1$. Sia infatti $\varepsilon > 0$. Grazie al limite di successione, possiamo trovare $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $1 < e^{1/\overline{n}} < 1+\varepsilon$ e quindi, se $0 < x < 1/\overline{n}$ avremo $1-\varepsilon < e^x < e^{1/\overline{n}} < 1+\varepsilon$, cioè $|e^x - 1| < \varepsilon$, che è proprio il nostro asserto.

Per il limite sinistro usiamo il solito cambio di variabile $y = -x$:

$$\lim_{x\to 0^-} e^x = \lim_{y\to 0^+} e^{-y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{e^y} = 1.$$

4. Sia f una funzione continua in x_0, $y_0 = f(x_0)$, g una funzione continua in y_0. Dimostriamo che la funzione composta $g(f(x))$ è continua in x_0.

   Sia infatti $\varepsilon > 0$. Per la continuità di g esiste $\eta > 0$ tale che

   $$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

   se $|y - y_0| < \eta$ e $y \in \mathrm{Dom}(g)$.

   D'altra parte, per la continuità di f esiste $\delta > 0$ tale che

   $$|f(x) - f(x_0)| < \eta$$

   se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Utilizzando entrambe le disuguaglianze (la prima con $y = f(x)$ e $y_0 = f(x_0)$) otteniamo che

   $$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

   se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in \mathrm{Dom}(f \circ g)$. Grazie all'arbitrarietà di ε, la funzione composta è continua in x_0.

5. (a) La funzione ha limite 1 per $x \to 0$, valore diverso da $f(0)$. (b) La funzione tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e a $-\infty$ per $x \to 0^-$, valori (per forza di cose!) diversi da $f(0)$. (c) La funzione non ammette limite (e neanche limite destro né limite sinistro) in 0. (d) La funzione ha limite 1 per $x \to 0^+$, limite 0 per $x \to 0^-$ (discontinuità di salto): solo il limite destro è uguale al valore della funzione!

6. Sia $\{a_n\}$ una successione crescente, $A = \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, $\ell = \sup A$. Mostriamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, distinguendo i due casi $\ell = +\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$.

   Se $\ell = +\infty$, l'insieme A è illimitato superiormente: dato un qualunque numero $M > 0$, esiste un elemento di A che lo supera, cioè esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\overline{n}} > M$. Siccome la successione è crescente, per $n \geq \overline{n}$ avremo $a_n \geq a_{\overline{n}} > M$ e per l'arbitrarietà di M abbiamo dimostrato che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

   Se $\ell \in \mathbb{R}$, abbiamo innanzitutto che $a_n \leq \ell$ perché ℓ è un maggiorante di A. Se poi $\varepsilon > 0$, $\ell - \varepsilon$ non è un maggiorante di A: esiste $\overline{n}$ tale che $\ell - \varepsilon < a_{\overline{n}}$. Siccome la successione è crescente, per ogni $n \geq \overline{n}$ avremo

$$\ell - \varepsilon < a_{\overline{n}} \leq a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon,$$

   ossia $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

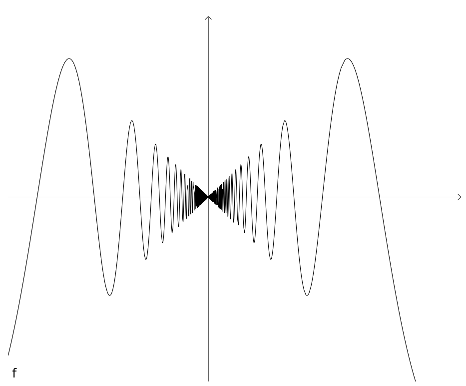
7. Per $x \neq 0$ la funzione è evidentemente continua in quanto prodotto e composizione di funzioni continue: l'unico punto "dubbio" è 0. D'altra parte, $\sin(\frac{1}{x})$ è compreso tra $+1$ e -1: ne segue che per $x > 0$ avremo

$$-x \leq x\sin(\frac{1}{x}) \leq x,$$

   da cui (passando al limite e applicando il teorema del confronto) otteniamo $\lim_{x\to0^+} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$. Anche il limite sinistro vale 0 perché f è una funzione pari, dunque

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$$

   e f è continua in 0. Si tratta però di una funzione che oscilla infinite volte in qualunque intorno di 0:

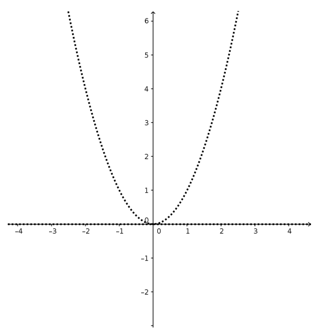


8. Sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$: dati due numeri reali distinti (per quanto vicini), è sempre possibile trovare un numero razionale e un numero irrazionale strettamente compresi tra di essi. In particolare, fissato un qualunque $x_0 \in \mathbb{Q}$ (sicché $f(x_0) = 1$), in un suo qualunque intorno ci sono punti irrazionali ove la funzione vale 0 per cui f è discontinua in x_0. Analogamente, in ogni intorno di un qualunque punto irrazionale (ove la funzione vale 0) vi sono punti razionali in cui la funzione vale 1.

9. Con un ragionamento molto simile a quello dell'esercizio precedente, si vede che la funzione data è discontinua in ogni punto $x_0 \neq 0$: grazie alla densità dei razionali e degli irrazionali, possiamo trovare una successione di numeri razionali $\{a_n\}$ e una successione di numeri irrazionali $\{b_n\}$ tali che $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$. Abbiamo $f(a_n) \to x_0^2$, $f(b_n) \to 0$ per cui f è discontinua in x_0 perché non esiste il limite.

   Viceversa, f è continua in 0 grazie al teorema del confronto: infatti $0 \leq f(x) \leq x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Passando al limite per $x \to 0$ abbiamo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

   Il grafico della funzione non è realmente disegnabile, a causa della densità dei razionali e degli irrazionali in $\mathbb{R}$, ma possiamo immaginarcelo più o meno come in figura:

10. Sia $x_0 \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$: è abbastanza facile vedere che f è discontinua in x_0. Infatti $f(x_0) > 0$, ma grazie alla densità degli irrazionali in $\mathbb{R}$ esiste una successione $\{a_n\}$ di numeri irrazionali con $a_n \to x_0$: siccome $f(a_n) = 0$ per ogni n, non è vero che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

    Un po' più complicato è verificare che f è continua in ogni punto $x_0 \in]0, 1[\setminus \mathbb{Q}$. Siccome $f(x_0) = 0$, devo far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intervallino I centrato in x_0 tale che $|f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$.

    Sia quindi $\varepsilon > 0$. Scelgo $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande, in modo tale che $1/n < \varepsilon$. A questo punto mi chiedo quante sono le frazioni comprese tra 0 e 1, ridotte ai minimi termini, il cui denominatore è minore di n (chiamiamo A l'insieme di questi numeri razionali). A è composto da un numero finito di punti: anche se contassi TUTTE le frazioni tra 0 e 1 con denominatore minore di n, senza chiedere che siano ridotte ai minimi termini, ne avrei esattamente $k-1$ con denominatore k per ogni $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Le frazioni appartenenti all'insieme A corrispondono a tutti e soli i punti razionali dell'intervallo $[0, 1]$ su cui $f(x)$ prende valori più grandi di $1/n$: se ne deduce che $|f(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in]0, 1[\setminus A$. Siccome A è composto da un numero finito di punti, esso si trova a distanza positiva dal punto irrazionale x_0: possiamo certamente trovare un intervallo I centrato in x_0 che non interseca A. Su quell'intervallo abbiamo $|f(x)| < \varepsilon$ e f è continua in x_0 per l'arbitrarietà di ε.

La seguente figura mostra l'(orribile!) grafico di questa funzione f.