gaetano.zampieri@univr.it

Dinamica Lagrangiana, Teorema di Noether e costanti del moto nonlocali

Verona, 28 Aprile 2023

- ***Data una funzione Lagrangiana autonoma e regolare*** $\mathcal{L}(q,v)$, $q,v\in\mathbb{R}^n$, ***si dicono moti naturali le soluzioni dell'equazione (vettoriale) di Eulero-Lagrange***

$$\boxed{\frac{d}{dt}\partial_v\mathcal{L}\big(q(t),\dot q(t)\big)-\partial_q\mathcal{L}\big(q(t),\dot q(t)\big)=0}$$

dove $\partial_q\mathcal{L}=(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_n})$, $\partial_v\mathcal{L}=(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_1},\dots,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_n})$, $\dot q(t)=\frac{d}{dt}q(t)$.

- *Data una funzione* ***Lagrangiana*** *autonoma e regolare* $\mathcal{L}(q,v)$, $q,v \in \mathbb{R}^n$, *si dicono moti* ***naturali*** *le soluzioni dell'equazione (vettoriale) di Eulero-Lagrange*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\partial_v\mathcal{L}\big(q(t),\dot q(t)\big) - \partial_q\mathcal{L}\big(q(t),\dot q(t)\big) = 0}$$

dove $\partial_q\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_n}\right)$, $\partial_v\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_1},\ldots,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_n}\right)$, $\dot q(t) = \frac{d}{dt}q(t)$.

- *L'****energia*** *è* ***costante del moto*** *("integrale primo")*

$$E(q,v) = \partial_v\mathcal{L}\big(q,v\big)\cdot v - \mathcal{L}\big(q,v\big)$$

- ***Data una funzione Lagrangiana autonoma e regolare*** $\mathcal{L}(q,v)$, $q,v \in \mathbb{R}^n$, ***si dicono moti naturali le soluzioni dell'equazione (vettoriale) di Eulero-Lagrange***

$$\boxed{\frac{d}{dt}\partial_v\mathcal{L}\big(q(t),\dot q(t)\big) - \partial_q\mathcal{L}\big(q(t),\dot q(t)\big) = 0}$$

dove $\partial_q\mathcal{L} = (\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_n})$, $\partial_v\mathcal{L} = (\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_1},\dots,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_n})$, $\dot q(t) = \frac{d}{dt}q(t)$.

- ***L'energia è costante del moto ("integrale primo")***

$$E(q,v) = \partial_v\mathcal{L}\big(q,v\big)\cdot v - \mathcal{L}\big(q,v\big)$$

  - Infatti derivando nel tempo lungo una soluzione

$$\frac{d}{dt}E(q(t),\dot q(t)) = \frac{d}{dt}\partial_v\mathcal{L}\cdot\dot q + \partial_v\mathcal{L}\cdot\ddot q - \frac{d}{dt}\partial_q\mathcal{L}\cdot\dot q - \partial_v\mathcal{L}\cdot\ddot q = 0.$$

Per esempio nel caso di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza di energia potenziale $U(q)$, la Lagrangiana $\mathcal{L}(q,v) = \frac{1}{2}m|v|^2 - U(q)$ dà l'equazione

$$\frac{d}{dt}\partial_v\mathcal{L}\big(q(t),\dot q(t)\big) - \partial_q\mathcal{L}\big(q(t),\dot q(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(m\dot q(t)\big) + \partial_q U(q(t)) = 0$$

che è l'equazione di Newton $m\ddot q(t) = -\partial_q U(q(t))$ e l'energia è

$$E(q,v) = \partial_v\mathcal{L}\cdot v - \mathcal{L} = mv\cdot v - \frac{1}{2}m|v|^2 + U(q)$$

cioè $E(q,v) = \frac{1}{2}m|v|^2 + U(q)$ energia cinetica più energia potenziale.

Teorema di Noether di base

- *Data una Lagrangiana autonoma reg.* $\mathcal{L}(q, v)$ *si dice sua* ***simmetria*** *una funzione regolare*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (\lambda, q) \mapsto Q_\lambda(q)$$

dove ciascuna $q \mapsto Q_\lambda(q)$ *è una trasformazione invertibile con inversa regolare (un cambio di coordinate) e valgono*

Teorema di Noether di base

- *Data una Lagrangiana autonoma reg.* $\mathcal{L}(q,v)$ *si dice sua* ***simmetria*** *una funzione regolare*

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (\lambda,q)\mapsto Q_\lambda(q)$$

dove ciascuna $q\mapsto Q_\lambda(q)$ *è una trasformazione invertibile con inversa regolare (un cambio di coordinate) e valgono*

- *(i)* $Q_0 = id,$
- *(ii)* $Q_{\lambda_1}\circ Q_{\lambda_2} = Q_{\lambda_1+\lambda_2},$ *per ogni* λ_1,λ_2
- *(iii)* $\mathcal{L}\big(Q_\lambda(q), Q'_\lambda(q)v\big) = \mathcal{L}(q,v),$ *per ogni* $\lambda, q, v,$
  - dove $Q'_\lambda(q)v$ è la matrice Jacobiana delle derivate in q applicata al vett. v.

Teorema di Noether di base

- ***Data una Lagrangiana autonoma reg.*** $\mathcal{L}(q, v)$ ***si dice sua*** ***simmetria*** ***una funzione regolare***

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (\lambda, q) \mapsto Q_\lambda(q)$$

dove ciascuna $q \mapsto Q_\lambda(q)$ ***è una trasformazione invertibile con inversa regolare (un cambio di coordinate) e valgono***

- ***(i)*** $Q_0 = id,$
- ***(ii)*** $Q_{\lambda_1} \circ Q_{\lambda_2} = Q_{\lambda_1+\lambda_2},$ ***per ogni*** λ_1, λ_2
- ***(iii)*** $\mathcal{L}\big(Q_\lambda(q), Q'_\lambda(q)v\big) = \mathcal{L}(q, v),$ ***per ogni*** $\lambda, q, v,$
  - dove $Q'_\lambda(q)v$ è la matrice Jacobiana delle derivate in q applicata al vett. v.

Le proprietà (i) e (ii) sono quelle di gruppo, la (iii) dice che $\mathcal{L}$ ***è invariante per la famiglia di trasformazioni*** $Q_\lambda(q)$.

- ***Teorema di Noether di base.*** *Sia $Q_\lambda(q)$* ***simmetria*** *della Lagrangiana regolare aut. $\mathcal{L}$. Allora le soluzioni dell'eq. di Eulero-Lagrange hanno la* ***costante del moto***

$$\boxed{\partial_v \mathcal{L}(q,v) \cdot \frac{\partial Q_\lambda}{\partial \lambda}(q)\Big|_{\lambda=0}\,.}$$

- ***Teorema di Noether di base.* *Sia $Q_\lambda(q)$ simmetria della Lagrangiana regolare aut. $\mathcal{L}$. Allora le soluzioni dell'eq. di Eulero-Lagrange hanno la costante del moto***

$$\boxed{\partial_v \mathcal{L}(q,v) \cdot \frac{\partial Q_\lambda}{\partial \lambda}(q)\Big|_{\lambda=0}.}$$

  - Se manca la coordinata q_1 nella $\mathcal{L}$ allora la prima componente del momento $\frac{\partial L}{\partial v_1}(q,v)$ si conserva. Infatti, dalla prima componente dell'eq. di E-L

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1}(q(t),\dot q(t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1}(q(t),\dot q(t)) \equiv 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1}(q(t),\dot q(t)) = \mathit{costante}$$

- ***Teorema di Noether di base. Sia $Q_\lambda(q)$ simmetria della Lagrangiana regolare aut. $\mathcal{L}$. Allora le soluzioni dell'eq. di Eulero-Lagrange hanno la costante del moto***

$$\boxed{\partial_v \mathcal{L}(q,v) \cdot \frac{\partial Q_\lambda}{\partial \lambda}(q)\Big|_{\lambda=0}.}$$

  - Se manca la coordinata q_1 nella $\mathcal{L}$ allora la prima componente del momento $\frac{\partial L}{\partial v_1}(q,v)$ si conserva. Infatti, dalla prima componente dell'eq. di E-L

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1}(q(t),\dot q(t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1}(q(t),\dot q(t)) \equiv 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1}(q(t),\dot q(t)) = \mathit{costante}$$

Ma possiamo ricavarlo dal Teorema della Noether grazie alla simmetria $Q_\lambda(q) = (q_1+\lambda, q_2, \ldots, q_n)$ delle traslazioni in q_1 per cui $\frac{\partial Q_\lambda}{\partial \lambda}(q)\Big|_{\lambda=0} = (1,0,\ldots,0)$.

Più in generale se la traslazione $q + \lambda u$ è simmetria di $\mathcal{L}$ si conserva $\partial_v \mathcal{L} \cdot u$.

Più in generale se la traslazione $q + \lambda u$ è simmetria di $\mathcal{L}$ si conserva $\partial_v \mathcal{L} \cdot u$.

- La Lagrangiana $\mathcal{L}(q, v) = \frac{1}{2} m |v|^2 - V(|q|)$, $q \in \mathbb{R}^3$, è invariante per rotazioni di centro l'origine attorno ad un versore u qualsiasi. Un calcoletto mostra che il Teorema di Noether dà la conservazione della componente $u \cdot q \wedge v$ del momento angolare e quindi di tutto $q \wedge v$ essendo u arbitriario.

Più in generale se la traslazione $q+\lambda u$ è simmetria di $\mathcal{L}$ si conserva $\partial_v\mathcal{L}\cdot u$.

- La Lagrangiana $\mathcal{L}(q,v)=\frac{1}{2}m|v|^2-V(|q|)$, $q\in\mathbb{R}^3$, è invariante per rotazioni di centro l'origine attorno ad un versore u qualsiasi. Un calcoletto mostra che il Teorema di Noether dà la conservazione della componente $u\cdot q\wedge v$ del momento angolare e quindi di tutto $q\wedge v$ essendo u arbitriario.

  Facciamo vedere che le rotazioni attorno all'asse q_3

$$Q_\lambda(q)=(q_1\cos\lambda-q_2\sin\lambda,q_1\sin\lambda+q_2\cos\lambda,q_3)$$

  danno la conservazione della terza componente di $q\wedge v$. Infatti,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}(q,v)\cdot\frac{\partial Q_\lambda}{\partial\lambda}(q)\Big|_{\lambda=0}=mv\cdot(-q_1\sin\lambda-q_2\cos\lambda,q_1\cos\lambda-q_2\sin\lambda,0)\Big|_{\lambda=0}=$$

$$m(v_1,v_2,v_3)\cdot(-q_2,q_1,0)=m(q_1v_2-q_2v_1).$$

Costanti del moto nonlocali

- ***Il seguito fa parte di ricerche svolte con Gianluca Gorni dell'Università di Udine.***

- ***Per una funzione Lagrangiana regolare*** $L(t, q, v)$, $t \in \mathbb{R}$, $q, v \in \mathbb{R}^n$, ***consideriamo l'equazione di Eulero-Lagrange***

$$\boxed{\frac{d}{dt}\partial_v L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) - \partial_q L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) = 0}$$

- ***Il seguito fa parte di ricerche svolte con Gianluca Gorni dell'Università di Udine.***
- ***Per una funzione Lagrangiana regolare*** $L(t, q, v)$, $t \in \mathbb{R}$, $q, v \in \mathbb{R}^n$, ***consideriamo l'equazione di Eulero-Lagrange***

$$\boxed{\frac{d}{dt}\partial_v L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) - \partial_q L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) = 0}$$

- ***Ispirati dalle simmetrie nel Teorema di Noether, siamo interessati a un concetto più generale. Una funzione*** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, (\lambda, t) \mapsto q_\lambda(t)$ ***regolare è detta* famiglia di moti variati (sincroni) *di*** $q_0(\cdot)$.

- ***Teorema.*** *Sia $q(t)$ sol. delle eq. di Eulero-Lagrange e sia $q_\lambda(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, una famiglia di moti variati tale che $q_0(t) \equiv q(t)$. Allora la seguente funzione di t è costante*

$$\boxed{\partial_v L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial \lambda}(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot{q}_\lambda(s)\big)\Big|_{\lambda=0} ds \,.}$$

- ***Teorema.*** *Sia $q(t)$ sol. delle eq. di Eulero-Lagrange e sia $q_\lambda(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, una famiglia di moti variati tale che $q_0(t) \equiv q(t)$. Allora la seguente funzione di t è costante*

$$\boxed{\partial_v L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial \lambda}(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot q_\lambda(s)\big)\Big|_{\lambda=0} ds\,.}$$

- **Infatti, facendo la derivata in t:**

$$\frac{d}{dt}\Big(\partial_v L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \partial_\lambda q_\lambda(t)\big|_{\lambda=0}\Big) - \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(t, q_\lambda(t), \dot q_\lambda(t)\big)\Big|_{\lambda=0} =$$
$$= \frac{d}{dt}\partial_v L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \partial_\lambda q_\lambda(t)\big|_{\lambda=0} + \partial_v L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \frac{d}{dt}\partial_\lambda q_\lambda(t)\big|_{\lambda=0} +$$
$$-\partial_q L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \partial_\lambda q_\lambda(t)\big|_{\lambda=0} - \partial_v L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \partial_\lambda \dot q_\lambda(t)\big|_{\lambda=0} = 0$$

la somma dei termini in rosso è nulla a causa dell'equazione di E-L ed i termini blu sono uguali scambiando l'ordine di derivazione.

- Diciamo

$$\partial_v L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial \lambda}(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot q_\lambda(s)\big)\Big|_{\lambda=0} ds$$

la costante del moto associata alla famiglia $q_\lambda(t)$. Si noti che $q_\lambda(t)$ per $\lambda \neq 0$ in generale non sono soluzioni.

- Diciamo

$$\partial_v L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial \lambda}(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot{q}_\lambda(s)\big)\Big|_{\lambda=0} ds$$

la costante del moto associata alla famiglia $q_\lambda(t)$. Si noti che $q_\lambda(t)$ per $\lambda \neq 0$ in generale non sono soluzioni.

- La costante del moto in generale è banale o inutile e nonlocale, cioè il suo valore in t dipende non solo da $(q(t), \dot{q}(t))$ ma anche da tutta la storia fra t_0 e t.

- Diciamo

$$\partial_v L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial \lambda}(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot q_\lambda(s)\big)\Big|_{\lambda=0} ds$$

  la costante del moto associata alla famiglia $q_\lambda(t)$. Si noti che $q_\lambda(t)$ per $\lambda \neq 0$ in generale non sono soluzioni.

- La costante del moto in generale è banale o inutile e nonlocale, cioè il suo valore in t dipende non solo da $(q(t), \dot q(t))$ ma anche da tutta la storia fra t_0 e t.
- Se $L(t, q, v) = \mathcal{L}(q, v)$ ha una simmetria $Q_\lambda(q)$, la $q(t)$ è soluzione dell'eq. di E-L, posto $q_\lambda(t) = Q_\lambda(q(t))$, il termine integrale si annulla e $q_\lambda(t)$ sono tutte soluzioni. Vedremo che il termine integrale può risultare interessante e utile in modi diversi.

Semipiano di Poincaré

Semipiano di Poincaré

- Il semipiano di Poincaré è un modello classico per la geometria iperbolica di Lobachevsky. Questo tipo di modelli risale a Beltrami seguito da Klein.

- Il semipiano di Poincaré è un modello classico per la geometria iperbolica di Lobachevsky. Questo tipo di modelli risale a Beltrami seguito da Klein.
  È il semipiano superiore dotato della Lagrangiana

$$\boxed{\mathcal{L}(q,v) = \frac{|v|^2}{2q_2^2}}, \qquad q \in \{(q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_2 > 0\}, \quad v \in \mathbb{R}^2.$$

Semipiano di Poincaré

- Il semipiano di Poincaré è un modello classico per la geometria iperbolica di Lobachevsky. Questo tipo di modelli risale a Beltrami seguito da Klein.

  È il semipiano superiore dotato della Lagrangiana

  $$\boxed{\mathcal{L}(q,v) = \frac{|v|^2}{2q_2^2}}, \qquad q \in \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_2 > 0\}, \quad v \in \mathbb{R}^2.$$

  Le sol. dell'eq. di Euler-Lagrange, geodetiche, hanno la costante dell'energia

  $$\partial_v \mathcal{L} \cdot v - \mathcal{L} = \frac{v}{q_2^2} \cdot v - \frac{|v|^2}{2q_2^2} = \frac{|v|^2}{2q_2^2} = E > 0.$$

- Il semipiano di Poincaré è un modello classico per la geometria iperbolica di Lobachevsky. Questo tipo di modelli risale a Beltrami seguito da Klein.
  È il semipiano superiore dotato della Lagrangiana

$$\boxed{\mathcal{L}(q,v) = \frac{|v|^2}{2q_2^2}}, \qquad q \in \{(q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_2 > 0\}, \quad v \in \mathbb{R}^2.$$

  Le sol. dell'eq. di Euler-Lagrange, geodetiche, hanno la costante dell'energia

$$\partial_v \mathcal{L} \cdot v - \mathcal{L} = \frac{v}{q_2^2} \cdot v - \frac{|v|^2}{2q_2^2} = \frac{|v|^2}{2q_2^2} = E > 0.$$

  Un altro integrale primo immediato è la prima componente del *momento* (quantità di moto) che è una conseguenza della mancanza di q_1 nella $\mathcal{L}$

$$\frac{\dot{q}_1}{q_2^2} = p.$$

Per il nostro Lagrangiano

$$L(t, q, v) = \frac{|v|^2}{2q_2^2}$$

è naturale considerare le *omotetie* $q_\lambda(t) = e^\lambda q(t)$ poiché lasciano invariante il Lagrangiano $L\big(t, q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t)\big) = L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big)$.

Per il nostro Lagrangiano

$$L(t, q, v) = \frac{|v|^2}{2q_2^2}$$

è naturale considerare le *omotetie* $q_\lambda(t) = e^\lambda q(t)$ poiché lasciano invariante il Lagrangiano $L\big(t, q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t)\big) = L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big)$.

Così il termine integrale nella nostra formula si annulla e la costante del moto associata è quella del Teorema di Noether

$$\partial_v L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial \lambda}(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot{q}_\lambda(s)\big)\Big|_{\lambda=0} ds =$$

$$= \partial_v L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial \lambda}(t)\Big|_{\lambda=0} = \frac{\dot{q}(t)}{q_2(t)^2} \cdot q(t)\,.$$

Quindi abbiamo i tre integrali primi

$$\frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2q_2^2} = E > 0, \qquad \frac{\dot{q}_1}{q_2^2} = p\,, \qquad \frac{q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2}{q_2^2} = b\,.$$

Quindi abbiamo i tre integrali primi

$$\frac{\dot q_1^2 + \dot q_2^2}{2q_2^2} = E > 0, \qquad \frac{\dot q_1}{q_2^2} = p\,, \qquad \frac{q_1\dot q_1 + q_2\dot q_2}{q_2^2} = b\,.$$

Il secondo come abbiamo detto può essere dedotto nello spirito della Noether dalla famiglia delle *q_1-traslazioni*: $q_\lambda(t) = \big(q_1(t) + \lambda, q_2(t)\big)$ che lascia invariante il Lagrangiano.

Quindi abbiamo i tre integrali primi

$$\frac{\dot q_1^2+\dot q_2^2}{2q_2^2}=E>0, \qquad \frac{\dot q_1}{q_2^2}=p\,, \qquad \frac{q_1\dot q_1+q_2\dot q_2}{q_2^2}=b\,.$$

Il secondo come abbiamo detto può essere dedotto nello spirito della Noether dalla famiglia delle *q_1-traslazioni*: $q_\lambda(t)=\big(q_1(t)+\lambda, q_2(t)\big)$ che lascia invariante il Lagrangiano.

Proviamo a usare la nostra formula con la famiglia delle *q_2-traslazioni* cioè $q_\lambda(t)=\big(q_1(t), q_2(t)+\lambda\big)$, una scelta che sembra stupida. Allora

$$\frac{\partial q_\lambda}{\partial\lambda}(t)\Big|_{\lambda=0}=\big(0,1\big), \quad \frac{\partial}{\partial\lambda}L\big(t,q_\lambda(t),\dot q_\lambda(t)\big)\Big|_{\lambda=0}=-\frac{\dot q_1(t)^2+\dot q_2(t)^2}{q_2(t)^3}=-\frac{2E}{q_2(t)}$$

dove abbiamo usato la costante del moto dell'energia.

La nostra formula dà la costante del moto nonlocale

$$\partial_v L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial \lambda}(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot q_\lambda(s)\big)\big|_{\lambda=0} ds =$$

$$= \frac{\dot q_2(t)}{q_2(t)^2} + 2E \int_{t_0}^{t} \frac{1}{q_2(s)} ds.$$

La nostra formula dà la costante del moto nonlocale

$$\partial_v L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) \cdot \frac{\partial q_\lambda}{\partial \lambda}(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot{q}_\lambda(s)\big)\big|_{\lambda=0} ds =$$

$$= \frac{\dot{q}_2(t)}{q_2(t)^2} + 2E \int_{t_0}^{t} \frac{1}{q_2(s)} ds.$$

Per derivazione abbiamo una equazione separata lineare

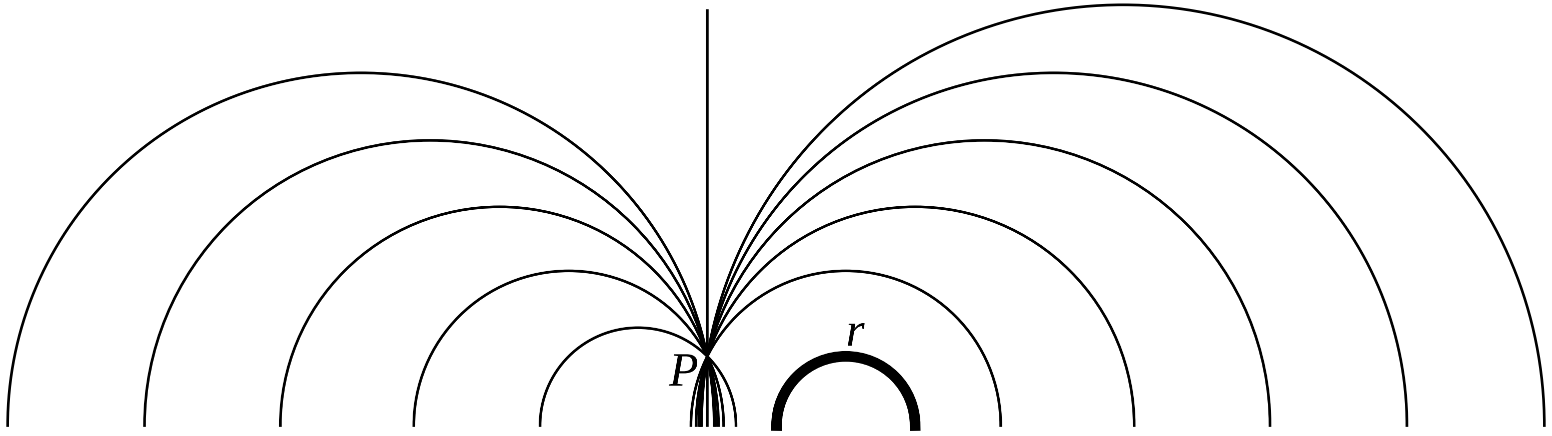
$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{q_2(t)} - 2E\,\frac{1}{q_2(t)} = 0.}$$

Inserendo la soluzione $q_2(t)$ nella prima componente del momento $b = \dot{q}_1(t)/q_2(t)^2$, e integrando, si ha $q_1(t)$. Questa è una separazione nonstandard di variabili ottenuta usando solo le due costanti del moto immediate E, p.

Semipiano di Poincaré

Per $b = 0$ la geodetica è una semiretta verticale $q_2(t) = q_2(0)e^{-t\sqrt{2E}}$, o $q_2(t) = q_2(0)e^{t\sqrt{2E}}$. Se $b \neq 0$, eliminando t abbiamo un semicerchio con centro sull'asse q_1 (asse che non appartiene al semipiano di Poincaré).

Per $b = 0$ la geodetica è una semiretta verticale $q_2(t) = q_2(0)e^{-t\sqrt{2E}}$, o $q_2(t) = q_2(0)e^{t\sqrt{2E}}$. Se $b \neq 0$, eliminando t abbiamo un semicerchio con centro sull'asse q_1 (asse che non appartiene al semipiano di Poincaré).



- **Abbiamo ottenuto una separazione di variabili nonstandard anche per il sistema 6-dimensionale Lagrangiano dell'equazioni di Maxwell-Bloch conservative che sono un modello per la dinamica laser.**

Conservazione dell’energia

- Rivisitiamo ora la conservazione dell'energia con la nostra formula. Ciò ci suggerirà poi una famiglia variata per sistemi dissipativi. Per una Lagrangiana autonoma $L(t, q, v) = \mathcal{L}(q, v)$, $q, v \in \mathbb{R}^n$, consideriamo la famiglia delle *t-traslazioni* $q_\lambda(t) = q(t + \lambda)$:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} L\big(t, q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t)\big)\Big|_{\lambda=0} = \partial_q \mathcal{L} \cdot \dot{q}(t) + \partial_v \mathcal{L} \cdot \ddot{q}(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)).$$

Conservazione dell'energia

- Rivisitiamo ora la conservazione dell'energia con la nostra formula. Ciò ci suggerirà poi una famiglia variata per sistemi dissipativi. Per una Lagrangiana autonoma $L(t,q,v) = \mathcal{L}(q,v)$, $q,v \in \mathbb{R}^n$, consideriamo la famiglia delle *t-traslazioni* $q_\lambda(t) = q(t+\lambda)$:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} L\big(t, q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t)\big)\big|_{\lambda=0} = \partial_q\mathcal{L}\cdot\dot{q}(t) + \partial_v\mathcal{L}\cdot\ddot{q}(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t)).$$

La costante del moto è

$$\partial_v\mathcal{L}\cdot\dot{q}(t) - \int_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}\mathcal{L}(q(s),\dot{q}(s))ds =$$

$$= \partial_v\mathcal{L}\cdot\dot{q}(t) - \mathcal{L}\left(q(t),\dot{q}(t)\right) + \mathcal{L}\left(q(t_0),\dot{q}(t_0)\right)$$

L'energia $E(q,v) = \partial_v\mathcal{L}\cdot v - \mathcal{L}\left(q,v\right)$ a meno di una banale costante additiva.

- Rivisitiamo ora la conservazione dell'energia con la nostra formula. Ciò ci suggerirà poi una famiglia variata per sistemi dissipativi. Per una Lagrangiana autonoma $L(t,q,v) = \mathcal{L}(q,v)$, $q, v \in \mathbb{R}^n$, consideriamo la famiglia delle *t-traslazioni* $q_\lambda(t) = q(t+\lambda)$:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} L\big(t, q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t)\big)\big|_{\lambda=0} = \partial_q\mathcal{L}\cdot\dot{q}(t) + \partial_v\mathcal{L}\cdot\ddot{q}(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t)).$$

La costante del moto è

$$\partial_v\mathcal{L}\cdot\dot{q}(t) - \int_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}\mathcal{L}(q(s),\dot{q}(s))ds =$$

$$= \partial_v\mathcal{L}\cdot\dot{q}(t) - \mathcal{L}\left(q(t),\dot{q}(t)\right) + \mathcal{L}\left(q(t_0),\dot{q}(t_0)\right)$$

L'energia $E(q,v) = \partial_v\mathcal{L}\cdot v - \mathcal{L}\left(q,v\right)$ a meno di una banale costante additiva. Per esempio $\mathcal{L}(q,v) = \frac{1}{2}m|v|^2 - U(q)$ dà $E(q,v) = \frac{1}{2}m|v|^2 + U(q)$

- *Consideriamo* $k > 0$, *un potenziale regolare* $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *e l'eq.*

$$m\ddot{q} = -k\dot{q} - \nabla U(q), \qquad q \in \mathbb{R}^n.$$

- ***Consideriamo $k > 0$, un potenziale regolare $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e l'eq.***

$$m\ddot{q} = -k\dot{q} - \nabla U(q), \qquad q \in \mathbb{R}^n.$$

  - Per $k = 0$ si ha l'integrale primo dell'energia

$$E(q, v) = \tfrac{1}{2} m |v|^2 + U(q)$$

    che, per $k > 0$, decresce lungo le soluzioni

$$\frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t)) = m\dot{q} \cdot \frac{1}{m}\Big(-k\dot{q} - \nabla U(q)\Big) + \nabla U(q) \cdot \dot{q} = -k |\dot{q}|^2 \leq 0.$$

- ***Nel seguito U limitato dal basso**, diciamo $U \geq 0$. Per una soluzione, $\dot{q}(t)$ è limitata nel futuro:*

$$\frac{1}{2}m\left|\dot{q}(t)\right|^2 \leq \frac{1}{2}m\left|\dot{q}(t)\right|^2 + U(q(t)) \leq \frac{1}{2}m\left|\dot{q}(t_0)\right|^2 + U\big(q(t_0)\big), \quad t \geq t_0,$$

- *Nel seguito* U ***limitato dal basso***, *diciamo* $U \geq 0$. *Per una soluzione,* $\dot{q}(t)$ *è limitata nel futuro:*

  $$\frac{1}{2}m\left|\dot{q}(t)\right|^2 \leq \frac{1}{2}m\left|\dot{q}(t)\right|^2 + U(q(t)) \leq \frac{1}{2}m\left|\dot{q}(t_0)\right|^2 + U\big(q(t_0)\big), \qquad t \geq t_0,$$

  quindi $q(t)$ *è limitata per intervalli di* t *limitati e otteniamo l'esistenza globale delle soluzioni nel futuro.*

  Cosa possiamo dire per il passato?

  Si noti che per $k = 0$, *senza diss., si ha esistenza globale poiché quanto visto sopra vale anche nel passato.*

- *Nel seguito* U ***limitato dal basso***, *diciamo* $U \geq 0$. *Per una soluzione,* $\dot{q}(t)$ *è limitata nel futuro:*

  $$\frac{1}{2}m\left|\dot{q}(t)\right|^2 \leq \frac{1}{2}m\left|\dot{q}(t)\right|^2 + U(q(t)) \leq \frac{1}{2}m\left|\dot{q}(t_0)\right|^2 + U\big(q(t_0)\big), \qquad t \geq t_0,$$

  quindi $q(t)$ *è limitata per intervalli di* t *limitati e otteniamo l'esistenza globale delle soluzioni nel futuro.*

  Cosa possiamo dire per il passato?

  Si noti che per $k = 0$, *senza diss., si ha esistenza globale poiché quanto visto sopra vale anche nel passato.*

- $m\ddot{q} = -k\dot{q} - \nabla U(q)$ *è l'eq. di Eulero-Lagrange per*

  $$L(t, q, v) = e^{kt/m}\left(\frac{1}{2}\, m \left|v\right|^2 - U(q)\right).$$

- *Consideriamo la famiglia* $q_\lambda(t) := q\left(t + \lambda\, e^{at}\right)$ *con* $a \in \mathbb{R}$ *nuovo par. e* $q(t)$ *soluzione. Per* $a = 0$ *si riduce alla* t*-traslazione usata nel caso conservativo*

- ***Consideriamo la famiglia*** $q_\lambda(t) := q\left(t + \lambda\, e^{at}\right)$ ***con*** $a \in \mathbb{R}$ ***nuovo par. e*** $q(t)$ ***soluzione. Per*** $a = 0$ ***si riduce alla*** t***-traslazione usata nel caso conservativo***
  - Allora eliminando $\ddot{q}(t)$ usando l'eq. diff.:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} L\big(t, q_\lambda(t), \dot{q}_\lambda(t)\big)\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-2e^{(a+\frac{k}{m})t} U\left(q\left(t\right)\right)\right) + e^{(a+\frac{k}{m})t}\Big(\big(a - \tfrac{k}{m}\big) m \left|\dot{q}(t)\right|^2 + 2\big(a + \tfrac{k}{m}\big) U\left(q\left(t\right)\right)\Big).$$

Per $a = k/m$ ***si semplifica e abbiamo***

- la costante del moto

$$t \mapsto \partial_v L\big(t, q(t), \dot{q}(t)\big) \cdot \partial_\lambda q_\lambda(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot{q}_\lambda(s)\big)\Big|_{\lambda=0} ds =$$

- la costante del moto

$$t \mapsto \partial_v L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \partial_\lambda q_\lambda(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot q_\lambda(s)\big)\Big|_{\lambda=0} ds =$$

$$= e^{2kt/m}\Big(m|\dot q(t)|^2 + 2U\big(q(t)\big)\Big) + 4\frac{k}{m}\int_t^{t_0} e^{2ks/m} U\big(q(s)\big) ds.$$

- la costante del moto

$$t \mapsto \partial_v L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) \cdot \partial_\lambda q_\lambda(t)\Big|_{\lambda=0} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \lambda} L\big(s, q_\lambda(s), \dot q_\lambda(s)\big)\Big|_{\lambda=0} ds =$$

$$= e^{2kt/m}\Big(m|\dot q(t)|^2 + 2U\big(q(t)\big)\Big) + 4\,\frac{k}{m}\int_t^{t_0} e^{2ks/m} U\big(q(s)\big) ds.$$

Poiché $U \geq 0$, l'integrale blu decresce per $t \leq t_0$ e

$t \mapsto e^{2kt/m}\left(m\,|\dot q(t)|^2 + 2U(q(t))\right)$ cresce con t per ogni $t \leq t_0$.

Infine, abbiamo la stima per $t \leq t_0$**:**

$$\boxed{m|\dot q(t)|^2 \leq e^{2k(t_0-t)/m}\Big(m|\dot q(t_0)|^2 + 2U\big(q(t_0)\big)\Big)}$$

in un intervallo limitato $(t_1, t_0]$ ***la velocità*** $\dot{q}(t)$ ***è limitata, quindi anche*** $q(t)$ ***e si ha esistenza globale delle soluzioni.***

in un intervallo limitato $(t_1, t_0]$ la velocità $\dot{q}(t)$ è limitata, quindi anche $q(t)$ e si ha esistenza globale delle soluzioni.

Per resistenza quadratica e potenziali limitati $0 \leq U(q) \leq U_{sup}$ proviamo invece che le soluzioni con energia cinetica iniziale $> U_{sup}$ esplodono nel passato in tempo finito.

Bibliografia

Un recente articolo di Mattia Scomparin generalizza la nostra formula a Lagrangiane di ordine superiore con alcune prime applicazioni.

Scomparin Mattia: Nonlocal constants of motion and first integrals in higher-order Lagrangian Dynamics. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* 53, 1–17 (2021).

Un recente articolo di Mattia Scomparin generalizza la nostra formula a Lagrangiane di ordine superiore con alcune prime applicazioni.

Scomparin Mattia: Nonlocal constants of motion and first integrals in higher-order Lagrangian Dynamics. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* 53, 1–17 (2021).

Scomparin ha anche generalizzato lo strumento ad alcuni campi lagrangiani

Scomparin Mattia: Conserved currents from nonlocal constants in relativistic scalar field theories. *Rep. Math. Phys.* in stampa.

Bibliografia

Un recente articolo di Mattia Scomparin generalizza la nostra formula a Lagrangiane di ordine superiore con alcune prime applicazioni.

Scomparin Mattia: Nonlocal constants of motion and first integrals in higher-order Lagrangian Dynamics. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* 53, 1–17 (2021).

Scomparin ha anche generalizzato lo strumento ad alcuni campi lagrangiani

Scomparin Mattia: Conserved currents from nonlocal constants in relativistic scalar field theories. *Rep. Math. Phys.* in stampa.

Un'esposizione concisa con referenze su quanto abbiamo visto e altre applicazioni in:

Gorni Gianluca, Zampieri Gaetano: Lagrangian dynamics by nonlocal constants of motion. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 13 (10), 2751–2759 (2020).

Gorni Gianluca, Zampieri Gaetano: The geodesics for Poincaré's half-plane: a nonstandard derivation. *Amer. Math. Monthly*, 130 (5) 478–481 (2023).

Bibliografia

Il mio collaboratore **Gianluca Gorni** negli anni ha prodotto materiale didattico fra cui delle belle lezioni su YouTube su concetti di base di Analisi Matematica e un Corso di LaTeX. Materiale raccolto nel sito:

https://users.dimi.uniud.it/gianluca.gorni/Dispense/index.html

Potete anche aprirlo usando il codice QR:

Bibliografia

Il mio collaboratore **Gianluca Gorni** negli anni ha prodotto materiale didattico fra cui delle belle lezioni su YouTube su concetti di base di Analisi Matematica e un Corso di LaTeX. Materiale raccolto nel sito:
https://users.dimi.uniud.it/gianluca.gorni/Dispense/index.html
Potete anche aprirlo usando il codice QR:

Fine