



UNIVERSITÀ  
di VERONA

Dipartimento  
di INFORMATICA



Ca' Vignal, Strada le Grazie 15, Verona



## Che idea ci siamo fatti della Curvatura?

Franco Cardin

Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita

1222-2022  
800  
ANNI



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

# Christiaan Huygens (1629 - 1695)

Un buon inizio è uno sguardo alla matematica del '600,

è dominata dalle figure di Cartesio, Newton, Pascal, Leibniz, Mersenne e altri.

È il secolo in cui –nello stesso anno, il 1642– muore Galileo e nasce Newton.

Fermeremo la nostra attenzione su **Huygens**.

Da Huygens emergono ‘prodromi’ di geometria differenziale<sup>1</sup>, intrecciata spesso con la meccanica analitica.

Il concetto di curvatura nasce prima di tutto per le curve e ha importanti tracce nell’antichità.

Le nozioni di **raggio di curvatura** e di **curva evoluta** erano state già ‘introdotte’ (lo storico Boyer, dice ‘adombrate’) dal matematico alessandrino

**Apollonio** di Perga (262-190 AC, circa)

questi introdusse pure il modello **deferente/epiciclo**, utilizzato in seguito sistematicamente da Tolomeo (100-175 DC circa), quella teoria porta il suo nome.

---

<sup>1</sup>Propriamente, il termine ‘geometria differenziale’, in effetti fu introdotto molto tempo dopo, da Luigi Bianchi nel 1894.

Ci soffermeremo sulla curva **cicloide**, come risolvete il *problema del pendolo tautocrono* di Huygens, riproponendone i calcoli.

Diventa per noi abbastanza *inquietante* cercar di ricomporre lo stile dei conti di Huygens: invece, utilizzeremo la descrizione del *triedro di Frenet*, benché nella forma che conosciamo/usiamo, essa sia stata sistematizzata successivamente a Huygens.

Ancora sulla cicloide, essa è pure soluzione, in versione proto-variazionale, del *problema della brachistocrona*, proposto per la prima volta in forma ufficiale da Johann Bernoulli nel giugno del 1696.

Il libro da guardare è certamente quello di Paolo Freguglia e Mariano Giaquinta, *The Early Period of the Calculus of Variations* Birkhäuser (2016).

# Christiaan Huygens (1629 - 1695)

Nel XVII secolo Fermat e Cartesio crearono il metodo delle coordinate o della geometria analitica, mentre

- Leibniz

nel **1686**, studiò **curvatura e cerchio osculatore**, successivamente

- Newton

(pubblicato nel **1736**, sebbene sembra sia stato scritto nel **1671**)  
pone la relazione:  $k = \frac{1}{\rho}$ .

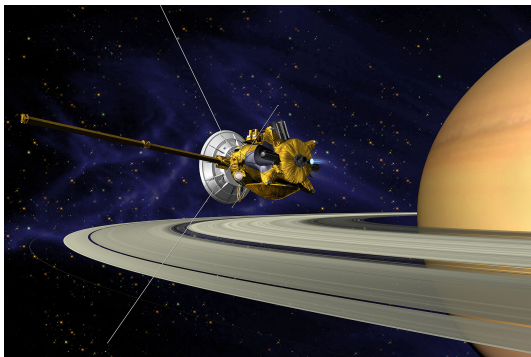
Le *curve piane* sono studiate con profondità da Kepler, Cartesio, Fermat, Pascal.

Il **problema del pendolo tautocrono** conduce Huygens (**1673**) all'introduzione delle nozioni di **evolvente e di evoluta**.

Fonti: Boyer, Kline, Bell.

Torniamo a Christiaan Huygens. A partire dal 1654 si dedica alle osservazioni astronomiche e al miglioramento delle lenti dei telescopi.

*Scopre la reale forma degli anelli di Saturno, ne osserva per la prima volta un satellite, Titano.*



Missione spaziale Cassini-Huygens verso Titano

La missione 1997-2021 ha rilevato che gli anelli di Saturno sono spessi  $\sim 10$  metri!

Le misurazioni astronomiche gli richiedono strumenti in grado di **calcolare il tempo in modo preciso**.

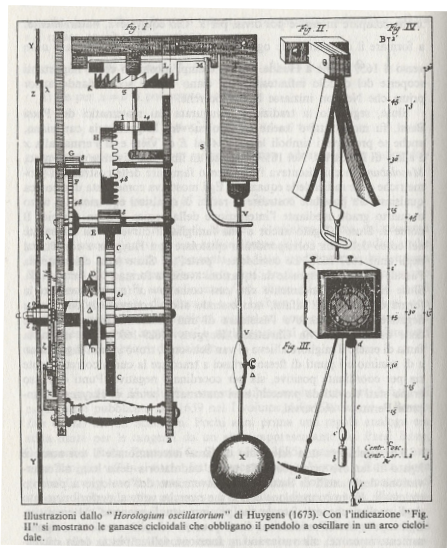
In seguito sperimenta anche orologi destinati alla determinazione della **longitudine** in mare, problema che lo accompagnerà per tutta la vita<sup>2</sup>.

A questo scopo studia le proprietà della cicloide e **inventa il pendolo cicloidale**.

L'opera più importante è **Horologium oscillatorium**.

---

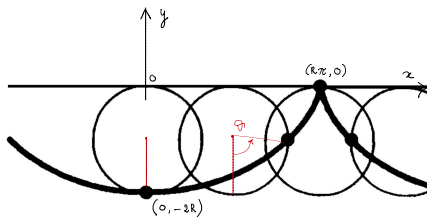
<sup>2</sup>Il problema della determinazione della longitudine, alquanto più difficile da stabilire rispetto alla latitudine, diventa affannoso e pressante tra il '600 e il '700, specialmente per la navigazione nel Pacifico. La storia del problema della longitudine –e dell'orologio di Harrison che lo risolse– è narrata in un avvincente saggio di Dava Sobal, **Longitudine**, e ha dato spunto ad un (bel) romanzo di Umberto Eco, **L'isola del giorno prima**.





Costruiamo prima di tutto una guida cicloidale:

$$\begin{cases} x = R\theta + R\sin\theta \\ y = -R - R\cos\theta \end{cases}$$



Determiniamo il parametro lunghezza d'arco  $s$ ,

$$s(\theta) = R \int_0^\theta \sqrt{(1 + \cos \bar{\theta})^2 + \sin^2 \bar{\theta}} d\bar{\theta} = \sqrt{2}R \int_0^\theta \sqrt{1 + \cos \bar{\theta}} d\bar{\theta},$$

ricordiamo qualche formula trigonometrica:

$$(i) \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$(ii) \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Usando (ii),  $\cos \theta = -1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ ,  $s(\theta) = \sqrt{2}R \int_0^\theta \sqrt{2} |\cos \frac{\bar{\theta}}{2}| d\bar{\theta}$ ,  
dato che  $-\pi < \theta < \pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , il  $\cos \frac{\theta}{2}$  è sempre positivo,

$$s(\theta) = 2R \int_0^\theta \cos \frac{\bar{\theta}}{2} d\bar{\theta} = 4R \int_0^\theta \cos \frac{\bar{\theta}}{2} d\frac{\bar{\theta}}{2} = 4R \sin \frac{\bar{\theta}}{2} \Big|_0^\theta = 4R \sin \frac{\theta}{2}.$$

Si vincola un punto materiale di massa  $m > 0$  sulla guida, senza attrito, l'unica forza attiva è la gravità:  $\mathbf{F} = -mg\hat{y}$ .

Del triedro di Frenet calcoliamo (almeno) il versore tangente  $\mathbf{t}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \left( \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}, \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \right) = R(1 + \cos \theta, \sin \theta) \frac{1}{4R \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}}, \frac{\sin \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) \Big|_{\theta=\theta(s)} \underbrace{=}_{(i),(ii)} \left( \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\underbrace{m\ddot{s}}_{\text{Equazione tang. della Meccanica}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} = -mg \sin \frac{\theta}{2}, \quad \text{ricordando } s(\theta) = 4R \sin \frac{\theta}{2} :$$

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4R}s$$

è dunque un *oscillatore armonico*, tautocrono, di pulsazione  $\omega$  e periodo  $\mathcal{T}$ :

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{R}} \qquad \mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ed ecco, dalla nostra curva cicloide  $\gamma(s)$ , che ora chiamiamo **evolva**, definiamo e calcoliamo la sua **evolvente**  $\delta(s)$ , la cui formula generale, per qualche costante scelta  $L$ , è:

$$\underbrace{\delta(s)}_{\text{evolvente}} = \underbrace{\gamma(s)}_{\text{evolva}} - s \gamma'(s), \quad \gamma' = \mathbf{t},$$

scopriamo che **è ancora una cicloide!**, esattamente basata sullo stesso raggio  $R$  di  $\gamma$ , solamente opportunamente traslata:

$$\delta = \gamma - s\gamma' = \left[ \text{rem: } s(\theta) = 4R \sin \frac{\theta}{2}, \gamma' = \mathbf{t} = \left( \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$= \left( R\theta + R \sin \theta - 4R \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, -R - R \cos \theta - 4R \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) =$$

$$= \left( R\theta + R \sin \theta - 2R \sin \theta, -R - R \cos \theta - 4R \left( 1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) =$$

$$= \left( R\theta - R \sin \theta, -R - R \cos \theta - 4R \left( 1 - \frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \right),$$

$$\delta(s) \Big|_{s=s(\theta)} = (R\theta - R \sin \theta, -3R + R \cos \theta).$$

$$\left[ \text{Rem: } \gamma(s) \Big|_{s=s(\theta)} = (R\theta + R \sin \theta, -R - R \cos \theta) \right]$$

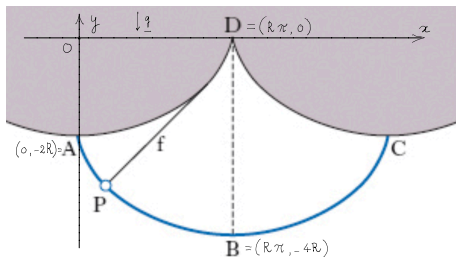
Ecco la realizzazione **meccanica** dell'evolvente  $\delta$  fornita da Huygens:

*Si aggancia in  $D = (R\pi, 0)$  un filo di lunghezza  $4R$ , lo si tiene teso e adagiato a  $\gamma$ , l'altra estremità, con un grave attaccato, disegnerà la cicloide  $\delta$ .*

Questa costruzione 'tentava' di rimuovere l'*attrito* con cui si doveva far i conti se si considerava la particella sulla guida  $\gamma$ .

**Il miglioramento non fu affatto sensibile, la ricaduta matematica fu invece virtuosa!**

Per la cicloide (e per la spirale logaritmica –e solo per queste–) evoluta ed evolvente sono '*identiche*'.



Parliamo ora di raggi e centri di curvatura.

$$\underbrace{\delta(s)}_{\text{evolvente}} = \underbrace{\gamma(s)}_{\text{evoluta}} - s \gamma'(s), \quad \gamma' = \mathbf{t},$$

$\gamma(s)$ : evoluta

$\delta(s)$ : evolvente

$$\delta(s) = \gamma(s) + (L-s) \underline{\underline{\gamma'(s)}}$$

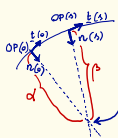


$\bar{s} < s$   
 per  $\bar{s} \rightarrow s$ :  
 si nota che  
 $\gamma(s)$  è il  
centro di curvatura  
 di  $\delta(s)$

$$\rho(s) = s$$

➔ l'evoluta  $\gamma$  è il luogo dei centri di curvatura dell'evolvente  $\delta$ .

Un calcolo di Huygens: la sua determinazione del centro di curvatura e del raggio di curvatura di una curva piana.



$$OP(0) + \alpha n(0) = OP(s) + \beta n(s) \quad (*)$$

$$= OP(0) + t(0)s + \mathcal{O}(s^2) + \beta \left( n(0) + \frac{dn(0)}{ds}s + \mathcal{O}(s^2) \right)$$

La (\*) si scrive:

$$(*) \quad \alpha n(0) = \left( t(0) + \beta \frac{dn(0)}{ds} \right) s + \beta n(0) + \mathcal{O}(s^2)$$

Mandando  $s \rightarrow 0$  si ottiene:  $\alpha = \beta$ . Moltiplicando ambo i membri della (\*) per  $t(0)$  si ottiene:

$$0 = \left( 1 + \beta t(0) \cdot \frac{dn(0)}{ds} \right) s + \mathcal{O}(s^2)$$

per cui, dividendo per  $s$  e mandando  $s \rightarrow 0$ , si ha:

$$(\square) \quad 1 + \beta t(0) \cdot \frac{dn(0)}{ds} = 0.$$

Ricordiamo che  $n = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{1}{\left| \frac{dt}{ds} \right|}$ , dove si scrive  $\rho := \frac{1}{\left| \frac{dt}{ds} \right|}$ .

$$n = \rho \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dn}{ds} = \rho \frac{dt}{ds} + \rho \frac{d^2t}{ds^2}, \text{ inserendo in } (\square):$$

$$0 = 1 + \beta t(0) \cdot \frac{dn}{ds} = 1 + \beta t(0) \cdot \left( \rho \frac{dt}{ds} + \rho \frac{d^2t}{ds^2} \right) = 1 + \beta \rho t(0) \cdot \frac{d^2t}{ds^2},$$

$\rho = 0: |t|=1$

$$\text{e dato che } 0 = \frac{d}{ds} \left( t \cdot \frac{dt}{ds} \right) = \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + t \cdot \frac{d^2t}{ds^2},$$

$$0 = 1 + \beta \rho \left( - \left| \frac{dt}{ds} \right|^2 \right), \quad 0 = 1 + \beta \rho \left( - \frac{1}{\rho^2} \right),$$

Infine, per  $s \rightarrow 0$ :

$$\alpha = \beta = \rho$$

Questi **centri di curvatura**, che realizzano la curva evoluta, sono i centri del locale **cerchio osculatore** alla curva data: quest'ultimo termine fu introdotto, più tardi, da Leibniz nel 1686.

Oggi, il **cerchio osculatore** è costruito ricercando il cerchio che *approssima al secondo ordine* la curva,

come p.e. nella slide successiva:



**Teorema.** Per ogni  $s$  tale che  $k(s) \neq 0$ ,

- i) il versore  $\mathbf{n}(s)$  punta verso il centro del locale cerchio osculatore di cui
- ii)  $\rho(s)$  ne è il raggio.

Prova. Mentre la retta tangente in  $s^*$  è l'approssimazione di *primo ordine* (lineare in  $s$ ) alla curva, il cerchio osculatore in  $s^*$  è, per definizione, l'approssimazione di *secondo ordine* (quadratica in  $s$ ) alla curva in un punto  $s^*$ . Infatti, sia (non è restrittivo)  $s^* = 0$ , allora localmente

$$\widetilde{OP}(s) = \widetilde{OP}(0) + \mathbf{t}(0) s + \frac{1}{2!} \frac{d\mathbf{t}}{ds}(0) s^2 + \mathcal{O}(s^3) = \widetilde{OP}(0) + \mathbf{t}(0) s + \frac{1}{2!} \frac{\mathbf{n}(0)}{\rho(0)} s^2 + \mathcal{O}(s^3)$$

Notiamo che, al secondo ordine in  $s$  (cioè a meno di  $\mathcal{O}(s^3)$ ), la curva è descritta nel piano  $\pi$  passante per il punto  $\widetilde{OP}(0)$  e generato dai vettori  $\mathbf{t}(0)$  e  $\mathbf{n}(0)$ . In tale piano consideriamo il cerchio che passa per  $\widetilde{OP}(0)$ , ha raggio  $\rho(0)$ , e centro in  $OC = \widetilde{OP}(0) + \rho(0)\mathbf{n}(0)$ . (Si abbozzi in un disegno un piano cartesiano in cui il versore  $\hat{x}$  è  $\mathbf{n}(0)$  e il versore  $\hat{y}$  è  $\mathbf{t}(0)$ ). Scriviamo l'equazione parametrica di tale cerchio nel parametro lunghezza d'arco  $s$ :

$$OQ(s) = \widetilde{OP}(0) + \rho(0) \sin \frac{s}{\rho(0)} \mathbf{t}(0) + \rho(0) \left(1 - \cos \frac{s}{\rho(0)}\right) \mathbf{n}(0).$$

Calcoliamo derivate prime e seconde di  $OQ(s)$  in  $s = 0$ :

$$\frac{d}{ds} OQ(s)|_{s=0} = \left[ \cos \frac{s}{\rho(0)} \mathbf{t}(0) + \sin \frac{s}{\rho(0)} \mathbf{n}(0) \right] |_{s=0} = \mathbf{t}(0),$$

$$\frac{d^2}{ds^2} OQ(s)|_{s=0} = \left[ -\frac{1}{\rho(0)} \sin \frac{s}{\rho(0)} \mathbf{t}(0) + \frac{1}{\rho(0)} \cos \frac{s}{\rho(0)} \mathbf{n}(0) \right] |_{s=0} = \frac{\mathbf{n}(0)}{\rho(0)}.$$

Dunque, effettivamente tale cerchio così costruito approssima la curva, localmente in  $s^* = 0$ , al secondo ordine. □

# Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



# Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

A nove anni risolve sinteticamente il problema/formula della somma degli interi da 1 a 100:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

$$101 + 101 + \dots + 101 + 101$$

$$100 \cdot 101 = 2 \sum_{n=1}^{100} n$$

È lo stesso suo maestro che lo incoraggia per un'istruzione superiore.

Propone durante i suoi studi la costruzione con 'riga e compasso' di un poligono regolare di 17 lati.

Scrive a 21 anni *Disquisitiones Arithmeticae* (pubblicato solo nel 1801) che è una base fondante della teoria dei numeri.

Nella sua tesi di dottorato (1799) dimostra il **Teorema Fondamentale dell'Algebra**.

In Meccanica Celeste, nella ricostruzione della traiettoria di Cerere, l'asteroide più massiccio della fascia principale del sistema solare, inventa il **metodo dei minimi quadrati** al fine di minimizzare gli errori.

Non ha grande predisposizione e simpatia per l'insegnamento, comunque segue allievi, Riemann è uno di questi.

Gauss pubblica poco, è un perfezionista, il suo motto è *pauca sed matura*.

Ha delle idee originali sulle *geometrie non euclidee*, ma le tiene per sè, non le pubblica.

## Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Viene incaricato del rilevamento cartografico del regno di Hannover, con Gauss si sviluppa quella che sarà chiamata *geodesia*. Nel 1827 pubblica *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, base definitiva della geometria intrinseca delle superfici.

Introduce la **prima forma fondamentale** (a volte erroneamente attribuita a Riemann) e la **curvatura**, che è basata –in origine– anche sulla **seconda forma fondamentale**.

Sulle *geometrie non euclidee* in Gauss: Realizzazioni erano già state sviluppate da Janos Bolyai (ungherese) e Nikolai Ivanovich *Lobačevskij* (russo).

Al padre Farkas di Janos *Bolyai*, Gauss disse: “*Lodare questo lavoro sarebbe come lodare me stesso: coincide quasi esattamente con le meditazioni che ho fatto trenta, trentacinque anni fa, che non ho ritenuto degne di pubblicare*”. Muore nel 1855.

Nel 1827 introduce la geometria intrinseca: uso sistematico delle coordinate curvilinee al posto delle coordinate cartesiane (introdotte da Euler), mostra che la curvatura totale dipende solamente dal  $ds^2$  della superficie. Nasce l'idea abbozzata di carta locale.

La formula detta di Gauss-Bonnet, che lega l'area di un triangolo geodetico alla curvatura totale della superficie, è il primo risultato coinvolgente la curvatura a delle proprietà globali.

Lo studio delle superfici a curvatura negativa permette a Beltrami di costruire un esempio concreto delle geometrie non euclidee di Lobačevskij e Bolyai.

Euler: Il volume II dell'*Introductio in analysin infinitorum*, pubblicato nel 1748, riguarda la geometria delle curve e delle superfici dello spazio. Le curve sono date da equazioni parametriche della forma

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

e le superfici da equazioni parametriche della forma

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

Sembra che questa sia la prima volta che appare in stampa una tale rappresentazione parametrica delle superfici.

Circa vent'anni dopo Euler scrisse *Recherches sur la courbure des surface*, 1767, un'altra opera miliare.

L'idea di Euler:

curvatura in un punto su di una superficie,

basata sulla curvatura delle curve che passano per quel punto.

Sua intuizione: per comprendere la curvatura in un punto di una superficie, basta studiare la curvatura delle curve intersezioni di quella superficie con i piani euclidei perpendicolari alla superficie, cioè i piani contenenti il vettore normale alla superficie in quel punto.

Ciascuna di queste curve ha un *cerchio osculatore* e l'insieme dei raggi di questi cerchi contiene tutte le informazioni sulla curvatura della superficie in quel punto.

Inoltre, in un dato punto della superficie, la curvatura massima e la curvatura minima sono associate a piani normali ortogonali.



Più precisamente:

dato un punto  $P$  sulla superficie e un vettore tangente  $v$  in quel punto  $P$ , chiamiamo **curvatura normale** per  $v$  la curvatura della curva ottenuta *intersecando* la superficie con il piano contenente il vettore  $v$  e il vettore normale  $N$  in quel punto.

Euler mostrò che le direzioni dei piani che realizzano le **curvature estremali** sono genericamente **ortogonali** tra loro,

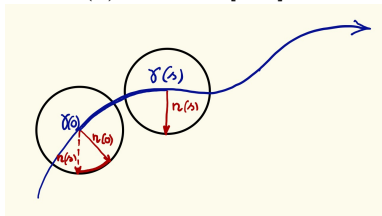
E' conseguenza naturale dell'aspetto spettrale dell'**operatore di Weingarten**:  $v_{min}, k_{min}$  e  $v_{max}, k_{max}$ , ne sono gli autovettori e autovalori.

# Una genesi della curvatura in Gauss

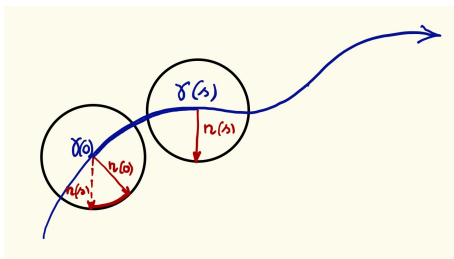
Per le curve piane proviamo a richiamare la curvatura  $k$  nel seguente modo. Data una curva piana  $\gamma(s)$ , costruiamo quello che si potrebbe chiamare “*Cerchio di Gauss*” (storicamente improbabile, ma qui utile in senso euristico):

Si considera, centrato su ogni punto di  $\gamma(\bar{s})$ , per ogni  $\bar{s} \in [0, s]$ , il cerchio, di raggio unitario.

Su di esso, per ogni  $\bar{s} \in [0, s]$ , il versore  $\mathbf{n}(\bar{s})$  individua un punto ben preciso, che noi **riporteremo sempre per traslazione** nel cerchio centrato in  $\gamma(0)$ . Su quest'ultimo, si evidenzia l'arco disegnato dal versore  $\mathbf{n}(\bar{s})$  per  $\bar{s} \in [0, s]$ .



# Una genesi della curvatura in Gauss

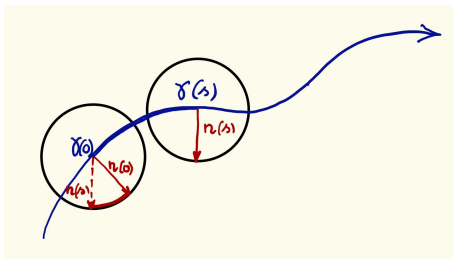


Si calcola infine la seguente quantità, basata sul punto  $\gamma(0)$ :  
il limite, per  $s \rightarrow 0^+$ , del rapporto della

- misura dell'arco sul **cerchio** di Gauss con la
- misura del corrispondente arco della **curva**  $\gamma$ .

Ricordando che per le curve piane (torsione nulla):  $\mathbf{n}' = -\frac{1}{\rho} \mathbf{t}$ ,  
otteniamo (usando  $|\mathbf{t}| = |\gamma'| \equiv 1$  e il teorema del valor medio)

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^s |\mathbf{n}'(\bar{s})| d\bar{s}}{\int_0^s |\gamma'(\bar{s})| d\bar{s}} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^s \frac{|\mathbf{t}(\bar{s})|}{\rho(\bar{s})} d\bar{s}}{s} \stackrel{\text{t. della media}}{=} \frac{1}{\rho(0)} = k(0)$$



Se per esempio  $\gamma$  è un segmento di retta, allora il versore  $\mathbf{n}$  disegna una curva degenera costituita da un sol punto e dunque  $k = 0$ .

Questa costruzione appare essere esattamente la versione 1-dim della costruzione (che vedremo) della curvatura di una superficie proposta da Gauss, mediante la 'sua' *Sfera (di Gauss)*.

---

DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA

SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. 8. OCTOB. 1827.

---

1.

**D**isquisitiones, in quibus de directionibus variarum rectarum in spatio agitur, plerumque ad maius perspicuitatis et simplicitatis fastigium euehuntur, in auxilium vocando superficiem sphaericam radio = 1 circa centrum arbitrarium descriptam, cuius singula punota representare censebuntur directiones rectarum radiis ad illa terminatis parallelarum. Dum situs omnium punctorum in spatio per tres coordinatas determinatur, puta per distantias a tribus planis fixis inter se normalibus, ante omnia considerandae veniunt directiones axium his planis normalium: puncta superficiei sphaericae, quae has directiones representant, per (1), (2), (3) denotabimus; mutua igitur horum distantia erit quadrans. Ceterum axium directiones versus eas partes acceptas supponemus, versus quas coordinatae respondentes crescunt.

A 2

# Superfici $\Sigma$ in $\mathbb{R}^3$ - Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

**Lemma base.** Se le due seguenti immersioni, iniettive e a differenziale a rango massimo, con  $U$  e  $\bar{U}$  aperti di  $\mathbb{R}^2$ ,

$$r : U \ni (q^1, q^2) \mapsto r(q^1, q^2) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\bar{r} : \bar{U} \ni (\bar{q}^1, \bar{q}^2) \mapsto \bar{r}(\bar{q}^1, \bar{q}^2) \in \mathbb{R}^3,$$

hanno la stessa immagine  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^3$ ,

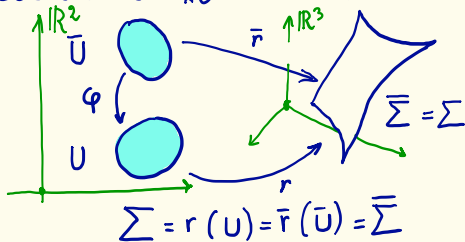
$$r(U) = \Sigma = \bar{r}(\bar{U}),$$

allora esiste un diffeomorfismo  $\varphi : \bar{U} \rightarrow U$  per cui

$$\bar{r} = r \circ \varphi.$$

Ricordiamo il

LEMMA BASE :



Se le due mappe  $r$  e  $\bar{r}$ ,  
iniettive e diff. a rk max,  
definite rispettivamente  
in  $U, \bar{U} \subset \mathbb{R}^2$ , hanno  
la stessa immagine  $\Sigma = \bar{\Sigma}$ ,  
allora esiste un diffeomorfismo  
 $\varphi : \bar{U} \rightarrow U$  ("cambio di coordin.")  
per cui :  
 $\bar{r} = r \circ \varphi$ .

$\Rightarrow$  La molteplicità delle immersioni  $\bar{r}$  che danno la *stessa*  $\Sigma$  (lì, ben collocata in  $\mathbb{R}^3$ ) è esattamente enumerata dai diffeomorfismi  $\varphi$  come sopra, per una data, scelta a priori, immersione  $r$ .

Sia data una rappresentazione parametrica di una superficie 2-dim  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\text{rank}(r') = \max = 2$ :

$$U \subset \mathbb{R}^2 \ni (q^1, q^2) \mapsto r(q^1, q^2) \in \mathbb{R}^3$$

Il **pull-back** della metrica Euclidea  $\mathbb{I} = (\delta_{ij})_{i,j=1,2,3}$  mediante  $q \mapsto r(q)$  è la metrica (in seguito, Riemanniana) **ereditata** su  $\Sigma$ ,  $L, M = 1, 2$ ,

$$g_{LM}(q) := \frac{\partial r}{\partial q^L}(q) \cdot \frac{\partial r}{\partial q^M}(q), \quad ds^2 = g_{LM}(q) dq^L dq^M$$

e la forma quadratica associata è detta **prima forma fondamentale** di  $\Sigma$ , essa rappresenta un *prodotto scalare* in  $T_{r(q)}\Sigma$  indotto da quello Euclideo di  $\mathbb{R}^3$ :  $\langle u, v \rangle_q = g_{LM}(q) u^L v^M$ .

## Seconda forma fondamentale

Indichiamo con  $N$  il **versore Normale** a  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^3$ .

La definizione tiene conto di un'orientazione scelta.

Per generiche curve  $\gamma : \lambda \mapsto (q^1(\lambda), q^2(\lambda))$  su  $\Sigma$ , determiniamone la **componente Normale dell'Accelerazione  $\mathbf{A}$**

Osserviamo preliminarmente,

$$\frac{\partial r}{\partial q^1}, \frac{\partial r}{\partial q^2} \in T_{r(q)}\Sigma, \quad \text{pertanto, per } L = 1, 2 : \quad \frac{\partial r}{\partial q^L}(q) \cdot N(q) = 0 \quad (*)$$

$$\mathbf{A} \cdot N = \frac{d^2}{d\lambda^2} [r \circ \gamma(\lambda)] \cdot N = \frac{d^2}{d\lambda^2} [r(q^1(\lambda), q^2(\lambda))] \cdot N = \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{\partial r}{\partial q^L} \dot{q}^L \right] \cdot N,$$

$$\stackrel{(*)}{=} \left[ \frac{\partial^2 r}{\partial q^L \partial q^M} \dot{q}^L \dot{q}^M \right] \cdot N = \left[ \frac{\partial^2 r}{\partial q^L \partial q^M} \cdot N \right] \dot{q}^L \dot{q}^M = b_{LM}(q) \dot{q}^L \dot{q}^M,$$

$$b_{LM}(q) := \frac{\partial^2 r}{\partial q^L \partial q^M}(q) \cdot N(q) \quad (0.1)$$

è detta  $2^a$  **forma fondamentale** di  $\Sigma$  in  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{I})$ .



## Carattere tensoriale della forma quadratica $g$

Mettiamo in evidenza ora quello che sarà individuato in seguito come il *carattere tensoriale* delle forme quadratiche  $g$  e  $b$ , interpretate, a partire da Ricci Curbastro, come 2-tensori covarianti su  $\Sigma$ .

Precisamente, cambiando l'immersione da  $r$  a  $\bar{r} = r \circ \varphi$ , per *arbitrari* diffeomorfismi  $\varphi : \bar{U} \rightarrow U$  come sopra visto, le due forme si trasformano *isometricamente*. Per la 1<sup>a</sup>  $ff$ :

$$\bar{g}_{LM}(\bar{q}) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}^L}(\bar{q}) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}^M}(\bar{q}) = \frac{\partial r}{\partial q^H}(q(\bar{q})) \frac{\partial q^H}{\partial \bar{q}^L} \cdot \frac{\partial r}{\partial q^K}(q(\bar{q})) \frac{\partial q^K}{\partial \bar{q}^M},$$

$$\bar{g}_{LM} = g_{HK} \frac{\partial q^H}{\partial \bar{q}^L} \frac{\partial q^K}{\partial \bar{q}^M} \quad \Longrightarrow \quad \bar{g} = \varphi'^T g \varphi' \quad \left( \varphi' = \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \right)$$

## Carattere tensoriale della forma quadratica $b$

Indaghiamo analogamente sulla seconda forma fondamentale.

$$\bar{N} = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}^1}(\bar{q}) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}^2}(\bar{q})}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}^1}(\bar{q}) \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{q}^2}(\bar{q}) \right|} = \frac{\frac{\partial r}{\partial q^1}(q) \times \frac{\partial r}{\partial q^2}(q) \det \varphi'}{\left| \frac{\partial r}{\partial q^1}(q) \times \frac{\partial r}{\partial q^2}(q) \det \varphi' \right|} = N \operatorname{sgn}(\det \varphi').$$

e a conti fatti (farli!) si osserva che, per diffeomorfismi che mantengono l'orientazione ( $\det \varphi' > 0$ ),

$$\begin{aligned} \bar{b}_{LM} &= \bar{b}_{LM}(\bar{q}) = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial \bar{q}^L \partial \bar{q}^M}(\bar{q}) \cdot \bar{N}(\bar{q}) = b_{HK} \frac{\partial q^K}{\partial \bar{q}^L} \frac{\partial q^H}{\partial \bar{q}^M} \\ &\implies \bar{b} = \varphi'^T b \varphi'. \end{aligned}$$

## Seconda forma fondamentale

Ritorniamo a riguardare la seconda forma fondamentale, e parametrizziamo le generiche curve su  $\Sigma$  mediante la lunghezza d'arco  $s$ , allora, dalla rettificazione,

$$\dot{q}^K = \frac{dq^K}{d\lambda}, \quad \frac{ds}{d\lambda} = \left| \frac{d\gamma}{d\lambda} \right| = \sqrt{g_{HK}(q)\dot{q}^H\dot{q}^K}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{HK}(q)\dot{q}^H\dot{q}^K}} :$$

$$\gamma(s) = r(q^1(\lambda), q^2(\lambda))|_{\lambda(s)}$$

e, ancora una volta, scriviamo la componente lungo  $N$  dell'accelerazione, calcolata nel **parametro d'arco**  $s$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\gamma}{ds^2} \cdot N &= b_{LM}(q) \frac{dq^L}{ds} \frac{dq^M}{ds} = \\ &= b_{LM}(q) \frac{\dot{q}^L}{\sqrt{g_{HK}(q)\dot{q}^H\dot{q}^K}} \frac{\dot{q}^M}{\sqrt{g_{HK}(q)\dot{q}^H\dot{q}^K}} = \frac{\langle b\dot{q}, \dot{q} \rangle}{\langle g\dot{q}, \dot{q} \rangle}. \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\gamma}{ds^2} \cdot N = \frac{\langle b\dot{q}, \dot{q} \rangle}{\langle g\dot{q}, \dot{q} \rangle} \quad \dot{q} \text{ compare } \mathbf{solo} \text{ con la sua direzione}$$

Il triedro di Frenet della curva  $\gamma$  in studio sia  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ , ricordando che

$$\frac{d\gamma}{ds} = \mathbf{t}, \quad \frac{d^2\gamma}{ds^2} = \mathbf{n} k \quad \left( = \frac{\mathbf{n}}{\rho} \right),$$

ove  $k$  è la *curvatura* di  $\gamma$ , si ha che

$$N \cdot \frac{d^2\gamma}{ds^2} = N \cdot \mathbf{n} k = \frac{\langle b\dot{q}, \dot{q} \rangle}{\langle g\dot{q}, \dot{q} \rangle} \quad \left\{ \begin{array}{l} N : \text{ vers. norm. alla superficie } \Sigma, \\ \mathbf{n} : \text{ vers. norm. alla curva } \gamma. \end{array} \right.$$

Ci restringiamo a piani **ortogonali** a  $\Sigma$ . Per tali curve si ha:  $N \cdot \mathbf{n} = \pm 1$ . Per l'indipendenza dalla  $\lambda$ -parametrizzazione, scriveremo genericamente  $v = \dot{q} \in T_q\Sigma$ , e *definiamo*:

$$\text{Curvatura, per } (q, N, v) : \quad K(v) = \frac{\langle bv, v \rangle}{\langle gv, v \rangle}$$

$$\begin{aligned} \text{Valori estremali per } K, \quad \frac{DK}{Dv}(v) = 0 : \quad & \frac{DK}{Dv}(v) = \\ & = 2 \frac{bv\langle gv, v \rangle - \langle bv, v \rangle gv}{\langle gv, v \rangle^2} = 2 \frac{g}{\langle gv, v \rangle} \left( g^{-1}bv - \frac{\langle bv, v \rangle}{\langle gv, v \rangle} v \right) = 0 \end{aligned}$$

cioè:  $g^{-1}bv \parallel v$ , sono esattamente in corrispondenza agli autovalori e agli autovettori  $(K_{\min}, v_{\min})$  e  $(K_{\max}, v_{\max})$  del problema spettrale:

$$\det(g^{-1}b - K\mathbb{I}) = 0$$

$g^{-1}b$  è la rapp. matriciale dell'**operatore di Weingarten**

Un breve richiamo sui simboli:

$$1^{a} ff: g = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}}_{\text{notazione moderna}} = \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\text{notazione di Gauss}}$$

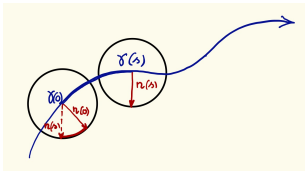
$$2^{a} ff: b = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_{\text{notazione moderna}} = \underbrace{\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}_{\text{notazione di Gauss}}$$

La **definizione di curvatura**, come la propose Gauss, si può rileggere nella pagina 1031 del Kline:

Gauss affronta poi lo studio della curvatura di una superficie. La sua definizione di curvatura è una generalizzazione alle superfici dell'indicatrice usata per le curve spaziali da Euler e per le superfici da Olindo Rodrigues<sup>2</sup>. In ciascun punto  $(x, y, z)$  di una superficie c'è una normale orientata. Gauss considera una sfera unitaria e sceglie un raggio avente la direzione della normale orientata alla superficie. La scelta del raggio determina un punto  $(X, Y, Z)$  sulla sfera. Se si considera poi sulla superficie una piccola regione contenente  $(x, y, z)$ , ad essa corrisponderà sulla sfera una regione contenente  $(X, Y, Z)$ . La curvatura della superficie in  $(x, y, z)$  è definita come il limite del rapporto fra l'area della regione della sfera e l'area della corrispondente regione della superficie quando queste due aree tendono a ridursi ai loro rispettivi punti. Gauss calcola questo rapporto notando anzitutto che il piano tangente in  $(X, Y, Z)$  alla sfera è parallelo al piano tangente in  $(x, y, z)$  alla superficie. Perciò il rapporto fra le due aree è uguale al rapporto fra le loro proiezioni sui rispettivi piani tangenti. Per trovare quest'ultimo rapporto Gauss effettua uno strabilante numero di differenziazioni e ottiene un risultato che è ancor oggi fondamentale, e cioè che la curvatura (totale)  $K$  della superficie è data da

$$(6) \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad K = \frac{\det b}{\det g}.$$

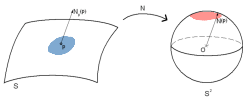
● 1-dim:



*curvatura  $k$  di curva piana :*

*limite del rapporto :  $\frac{\text{lunghezza rossa}}{\text{lunghezza blu}}$*

● 2-dim:



*curvatura gaussiana  $K$  di una superficie :*

*limite del rapporto :  $\frac{\text{area rossa}}{\text{area blu}}$*



Ma come interfacciare quell'*originale* definizione con un linguaggio attuale?

- La risposta è suggerita in **Gallot et al.** p. 247: proveremo a riempire quei passaggi proposti.

Iniziamo affermando che quel procedimento limite di rapporto di aree è proprio la generalizzazione, dalla dimensione *uno* alla dimensione *due*, del proto-procedimento prima mostrato; esso conduce al **rapporto** tra una misura sulla sfera  $\mathbb{S}^2$  e una corrispondente sulla superficie  $\Sigma$  in studio,

$$(q^1, q^2) \mapsto r = OP(q^1, q^2), \quad P = OP(0, 0) \in \Sigma,$$

$$e_1 = \frac{\partial OP}{\partial q^1}(0, 0), \quad e_2 = \frac{\partial OP}{\partial q^2}(0, 0), \quad e_L \cdot e_M = \delta_{LM} = g_{LM}(0, 0).$$

Questo **rapporto** va pensato e realizzato all'interno di una **stessa** struttura geometrica. Per intenderci, sia la *mappa di Gauss* che –scelta l'orientazione– ad ogni punto  $P \in \Sigma$  associa il locale versore ortogonale  $N$  :

$$N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad P \mapsto x = N(P), \quad |N(P)| \equiv 1,$$

e indichiamo con  $(\cdot, \cdot, \cdot)$  il prodotto misto; allora le 2-forme misura (area, ereditata dalla misura euclidea di  $\mathbb{R}^3$ ), rispettivamente su  $\mathbb{S}^2$  e  $\Sigma$ , sono ( $\nu(P)$  è la rappr. di  $x$  in  $\mathbb{R}^3$ ):

$$\omega(u, v) = (u, v, x), \quad \forall u, v \in T_x \mathbb{S}^2,$$

$$\Omega(\xi, \eta) = (\xi, \eta, \nu(P)), \quad \forall \xi, \eta \in T_P \Sigma.$$

Il rapporto degli elementi di misura delle corrispondenti porzioni di superficie si risolve considerando<sup>3</sup>:

$$\frac{N^* \omega}{\Omega}$$

---

<sup>3</sup> $N^*$  è il *pull-back* su  $N$ : sposta  $\ell$ -forme di  $\mathbb{S}^2$  in  $\ell$ -forme su  $\Sigma$ ,  $\ell = 0, 1, 2$ .

Valutiamo tale rapporto sulla coppia  $(e_1, e_2)$ ,  $e_1, e_2 \in T_P\Sigma$ ,

$$\Omega(e_1, e_2) = (e_1, e_2, \nu(P)) = e_1 \times e_2 \cdot \nu(P),$$

il denominatore vale dunque 1.

$$N^*\omega(e_1, e_2) = \omega(dN(P)e_1, dN(P)e_2) = (dN(P)e_1, dN(P)e_2, x) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial q^1} \cdot (e_1)_1 + \frac{\partial N_1}{\partial q^2} \cdot (e_1)_2 & \frac{\partial N_1}{\partial q^1} \cdot (e_2)_1 + \frac{\partial N_1}{\partial q^2} \cdot (e_2)_2 & 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial q^1} \cdot (e_1)_1 + \frac{\partial N_2}{\partial q^2} \cdot (e_1)_2 & \frac{\partial N_2}{\partial q^1} \cdot (e_2)_1 + \frac{\partial N_2}{\partial q^2} \cdot (e_2)_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial q^1} & \frac{\partial N_1}{\partial q^2} & 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial q^1} & \frac{\partial N_2}{\partial q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial q^1} \cdot e_1 & \frac{\partial N}{\partial q^2} \cdot e_1 & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial q^1} \cdot e_2 & \frac{\partial N}{\partial q^2} \cdot e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dal fatto che

$$N = \frac{\partial OP}{\partial q^1} \times \frac{\partial OP}{\partial q^2},$$

dettagliando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial q^1} \cdot e_1 &= \frac{\partial N}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial OP}{\partial q^1} = \left( \frac{\partial^2 OP}{\partial q^1 \partial q^1} \times \frac{\partial OP}{\partial q^2} + \frac{\partial OP}{\partial q^1} \times \frac{\partial^2 OP}{\partial q^1 \partial q^2} \right) \cdot \frac{\partial OP}{\partial q^1} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 OP}{\partial q^1 \partial q^1} \times \frac{\partial OP}{\partial q^2} \right) \cdot \frac{\partial OP}{\partial q^1} = \frac{\partial OP}{\partial q^2} \times \frac{\partial OP}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial^2 OP}{\partial q^1 \partial q^1} = -b_{11}, \end{aligned}$$

analogamente si calcola

$$\frac{\partial N}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial OP}{\partial q^2} = -b_{12},$$

$$\frac{\partial N}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial OP}{\partial q^2} = -b_{22}.$$

Infine:

$$N^* \omega(e_1, e_2) = \det \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{21} & 0 \\ -b_{12} & -b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det b = \frac{\det b}{\det g},$$

$K = \frac{\det b}{\det g}$  come esattamente calcolata da Gauss (vedi slide 39)

Per ogni diffeomorfismo  $\varphi$ , cambio di coordinate locali, si ha

$$\frac{\det \bar{b}}{\det \bar{g}} = \frac{(\det \varphi')^2 \det b}{(\det \varphi')^2 \det g} = \frac{\det b}{\det g}$$

che è dunque uno *scalare invariante*, ed è esattamente la *curvatura*  $K$  della *superficie*  $\Sigma$  in  $P$ , come introdotta da Gauss. Nel sistema di coordinate che in  $P$  diagonalizza entrambe le forma quadratiche  $b$  e  $g$ , infine,

$$K = k_1 k_2$$

Con il termine *scalare invariante* ricordiamo che esso s'intende rispetto ai cambi di coordinate, diffeomorfismi locali  $\varphi$ , da aperti di  $\mathbb{R}^2$  in aperto di  $\mathbb{R}^2$ . Scalari di questo tipo ne abbiamo discusso uno,  $K$ , la *curvatura Gaussiana*, e ne possiamo costruire un secondo,  $\mathcal{H}$ , la<sup>4</sup> *curvatura media*:

$$K := \frac{\det b}{\det g}, \quad \mathcal{H} := \operatorname{tr}(g^{-1} b) = g^{LM} b_{ML} \quad (g^{LM} := (g^{-1})^{LM})$$

Nella diagonalizzazione simultanea, in cui  $g = \mathbb{I}$  e  $b = \operatorname{diag}(k_1, k_2)$ ,

$$K = \frac{\det b}{\det g} = \det b \cdot \det g^{-1} = k_1 k_2, \quad \mathcal{H} = k_1 + k_2.$$

Il destino matematico di queste due curvatures sarà ben diverso.

---

<sup>4</sup>a meno del fattore 1/2.

# Theorema Egregium

Mediante un lungo calcolo, un 'tour de force', come sottolineano Berger e Gostiaux, Gauss scopre la seguente formula

(8)

$$K = \frac{1}{2H} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{2}{H} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{H} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial u} \right] \right\}$$

Nella (8) qui sopra (non confondere  $H$  con la precedente  $\mathcal{H}$ ):

$$H := \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\det g}$$

Ricordiamo che  $g = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}}_{\text{notazione moderna}} = \underbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}_{\text{notazione di Gauss}}$

Emerge che la curvatura Gaussiana  $K$  è esattamente contenuta nella struttura funzionale della  $1^a$   $ff$ ,  $g$ , più precisamente:

**$K$  si costruisce –solo e soltanto– con  $g$ , le sue derivate prime e seconde.**

A corollario di ciò, Gauss osserva che per ogni coppia di **distinte** superfici  $\Sigma$  e  $\bar{\Sigma}$ ,  $U, \bar{U} \subset \mathbb{R}^2$ ,

$$U \ni q \rightarrow r(q) \in \mathbb{R}^3, \quad \Sigma := r(U), \quad \bar{U} \ni \bar{q} \rightarrow \bar{r}(\bar{q}) \in \mathbb{R}^3, \quad \bar{\Sigma} := \bar{r}(\bar{U})$$

che sono *tra loro sviluppabili*, cioè tali che esiste un diffeomorfismo  $\varphi: \bar{U} \rightarrow U$  per cui  $g$  e  $\bar{g}$  sono *isometriche*,

$$\bar{g} = \varphi'^T g \varphi' \quad \text{ossia} \quad ds^2|_{\Sigma} = ds^2|_{\bar{\Sigma}}$$

con gli indici:  $\bar{g}_{hk} = \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^h} g_{ij} \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^k}$ , per esse si ha che

$$K(\varphi(\bar{q})) = \bar{K}(\bar{q}).$$

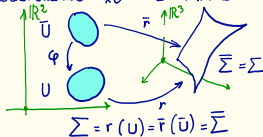
Gauss lo chiamò **Theorema Egregium** (1827):

*Se prendiamo una superficie curva e la sviluppiamo su una qualunque altra superficie, il calcolo della curvatura non cambia.*



## Sul Teorema Egregium (Gauss).

Ricordiamo il LEMMA BASE:



Se le due mappe  $r \in \bar{r}$ ,  
 iniettive e dif. a rK max,  
 definite rispettivamente  
 in  $U, \bar{U} \subset \mathbb{R}^2$ , hanno  
 la stessa immagine  $\Sigma = \bar{\Sigma}$ ,  
 allora esiste un diffeomorfismo  
 $\varphi: \bar{U} \rightarrow U$  ("cambio di coordin.")  
 per cui:  
 $\bar{r} = r \circ \varphi$ .

Ricordiamo anche che la curvatura di Gauss  $K$ , definita  
 come limite di opportune corrispondenti aree, si denota (teorema)  
 come:  $K = \frac{\det \bar{b}}{\det g}$ , espressione palesemente INVARIANTE SCALARE

per cambi di coordinate  $\varphi$ ,  $\bar{b} = \varphi'^T b \varphi'$ ,  $\bar{g} = \varphi'^T g \varphi'$ ,  
 $\bar{K} = \frac{\det \bar{b}}{\det \bar{g}} = \frac{(\det \varphi')^2 \det b}{(\det \varphi')^2 \det g} = K$ .

Mediante un "duro lavoro", Gauss notò che  $K$  si può  
 scrivere utilizzando (solo)  $g, \nabla g, \nabla^2 g$ , senza far intervenire  
 direttamente  $b$ , la 2<sup>a</sup> ff, la quale contiene le informazioni  
 sull'immersione in  $\mathbb{R}^3$  data dalla  $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

$$K = \tilde{K}(g, \nabla g, \nabla^2 g) \quad (\text{cf. la(s) di Klein})$$

Sicuramente, nell'ideologia del lemma base, abbiamo che:

$$\tilde{K} = \tilde{K}(\bar{g}, \nabla_{\bar{g}} \bar{g}, \nabla_{\bar{g}}^2 \bar{g}) = K, \quad \text{ma in realtà otteniamo}$$

molto di più: quest'ultima invarianza è vera non appena inseriamo

più precisamente: data due immersioni  $r \neq \bar{r}$   
 ma tali che l'una sia isometrica  
 dell'altra, cioè esiste diffeom.  $\varphi$   
 tale che valga  $\bar{g} = \varphi'^T g \varphi'$  allora le  
 due (differenti)  $\Sigma = \bar{\Sigma}$  hanno la  
 stessa curvatura  $K$ .

Il Theorema Egregium non è invertibile, nel senso che due superfici diffeomorfe, aventi medesima curvatura Gaussiana nei punti corrispondenti, non sono in generale isometriche. Un contro-esempio è fornito dalla superficie di rotazione  $\Phi$  generata da una curva logaritmica e dall'elicoide  $\Psi$ ,

$$\Phi : (u, v) \rightarrow (au \cos u, av \sin u, b \ln v)$$

$$\Psi : (u, v) \rightarrow (au \cos u, av \sin u, bu)$$

Le due superfici hanno la stessa curvatura Gaussiana ma non sono isometriche.

Un'inversione parziale del Theorema Egregium si ha qualora le due superfici abbiano curvatura Gaussiana uguale e costante: è il teorema di Minding, 1839.

Mezzo secolo più tardi, con Ricci Curbastro, emergerà una nuova radicale interpretazione:

$\Sigma$  e  $\bar{\Sigma}$  saranno intese come una *stessa* astratta superficie e il diffeomorfismo locale  $\varphi$  di cui sopra sarà interpretato come un cambio di coordinate

da una rappresentazione locale ad un'altra, per uno *stesso intrinseco tensore metrico*  $g$ .

La curvatura, risulterà ottenuta come scalare invariante per contrazione del tensore di curvatura (a 4 indici) di Riemann.

Qualche esempio • Sia

$$\mathbb{R}^2 \ni q^L = (q^1, q^2) \mapsto r(q^1, q^2) \in \mathbb{R}^3$$

l'immersione di una superficie 2-dim  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^3$ . Le forme fondamentali sono

$$g_{LM}(q) = \frac{\partial r}{\partial q^L} \cdot \frac{\partial r}{\partial q^M} \quad b_{LM} = \frac{\partial^2 r}{\partial q^L \partial q^M}(q) \cdot N(q)$$

Consideriamo ora una generica **roto-traslata** di  $\Sigma$ :

$$\mathbb{R}^2 \ni q^L = (q^1, q^2) \mapsto \bar{r}(q) = \mathcal{R} r(q^1, q^2) + b \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathbb{I}$$

Allora

$$\bar{g}_{LM}(q) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^L} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q^M} = \mathcal{R} \frac{\partial r}{\partial q^L} \cdot \mathcal{R} \frac{\partial r}{\partial q^M} = g_{LM}(q)$$

$$\bar{b}_{LM}(q) = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q^L \partial q^M} \cdot \bar{N} = \mathcal{R} \frac{\partial^2 r}{\partial q^L \partial q^M} \cdot \mathcal{R} N = b_{LM}(q)$$

Pertanto: due superfici  $\Sigma$  e  $\bar{\Sigma}$  in  $\mathbb{R}^3$ , l'una **roto-traslata** dell'altra, hanno **medesime** prima e seconda forma fondamentale, e dunque (banalmente) stessa curvatura  $K$ .

E' vero anche il viceversa:  
due superfici  $\Sigma$  e  $\bar{\Sigma}$  in  $\mathbb{R}^3$  che hanno le medesime prima e seconda forma fondamentale sono l'una roto-traslata dell'altra.

- Se tentiamo di avvolgere un piano attorno ad un cilindro (operazione 3-dim), in maniera da tenere invariate le lunghezze, e ci riusciamo, vediamo che l'isometria (oggetto 2-dim) è l'*identità*:  $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$ .

**Piano**  $(O, x, z)$ :  $x = u, y = 0, z = v, \quad 0 < u < 2\pi R, \quad v \in \mathbb{R}$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad ds^2 = du^2 + dv^2.$$

**Cilindro** (di raggio  $R$  e di asse  $z$ ):

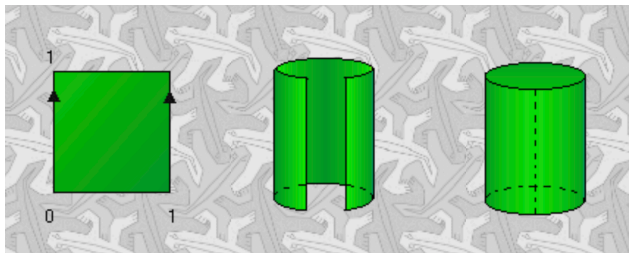
$$x = R \cos \frac{u}{R}, \quad y = R \sin \frac{u}{R}, \quad z = v.$$

$$E = \begin{pmatrix} -\sin \frac{u}{R} \\ \cos \frac{u}{R} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \frac{u}{R} \\ \cos \frac{u}{R} \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad F = \begin{pmatrix} -\sin \frac{u}{R} \\ \cos \frac{u}{R} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad ds^2 = du^2 + dv^2$$

Naturalmente in entrambi gli esempi la curvatura è ovunque nulla,  $K \equiv 0$ .

Ma quella porzione di cilindro non è certo una roto-traslata della porzione di piano!



- Ma non riusciremo mai a avvolgere (incartare, o meglio: sviluppare) un foglio piano  $K = 0$  attorno ad una calotta sferica  $K = 1/R^2$ .



Primi studi furono effettuati da Euler nel 1744 nella citata opera sul calcolo delle variazioni *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*; Euler affronta il problema di trovare la superficie di area minima che ha come bordo due circonferenze nello spazio, poste su due piani paralleli ed allineate in modo che il segmento che congiunge i centri delle due circonferenze risulti perpendicolare ad entrambi i piani su cui giacciono le due circonferenze stesse. Vista la particolare geometria del problema,

## Superfici minime e curvatura media


Euler cerca le superfici soluzione di tale problema tra le superfici di rotazione; in particolare egli reimposta il problema in maniera tale che esso sia equivalente a quello di determinare la funzione il cui grafico, fatto ruotare in modo da descrivere le due circonferenze assegnate, generi la superficie cercata. Euler dimostra che la curva cercata deve essere un arco di catenaria. La superficie ottenuta dalla rotazione della catenaria è detta catenoide. Ed è proprio da questi tipi di problemi che nasce la teoria delle superfici minime.

Il termine *superficie minima* fu introdotto da Lagrange nel 1760 per designare quelle superfici che sono soluzioni di un problema variazionale, e più precisamente punti critici della funzione area. La definizione originaria di superficie minima è dunque quella di superficie che rende stazionaria l'area rispetto a variazioni della superficie stessa.

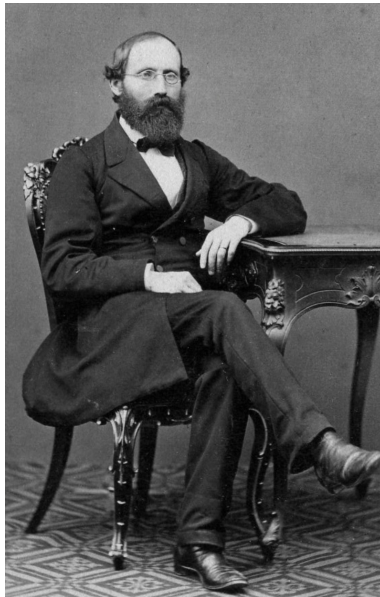
Nel 1776 Meusnier si accorse del significato geometrico che sta dietro alla definizione di superficie minima data da Lagrange: tale definizione, infatti, equivale a richiedere che la superficie abbia in ogni suo punto *curvatura media*<sup>5</sup> nulla. In natura esempi di superfici minime si possono ottenere immergendo in acqua saponata un telaio di sottile fil di ferro di una qualunque forma chiusa: all'estrazione del telaio, la lamina di sapone che rimane attaccata ad esso rappresenta una superficie che ha curvatura media nulla ovunque. Fu Plateau che studiò per primo in dettaglio tali aspetti.

*Le superfici minime coinvolgono dunque la curvatura media  $H$ , benché sia anch'essa un invariante scalare della superficie, a differenza della curvatura Gaussiana  $K$ , trasporta informazioni sulla 'forma', cioè sull'immersione in  $\mathbb{R}^3$  della superficie in gioco.*

---

<sup>5</sup>nozione introdotta da Sophie Germain nel 1832. 

# Bernhard Riemann (1826-1866)



## Che sviluppo si poteva intravedere dal Theorema Egregium?

Le due forme fondamentali,  $g$  e  $b$ , nascevano paritetiche rispetto all'immersione

$$r : \mathbb{R}^2 \supseteq U \ni q \mapsto r(q) \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3$$

ma  $g$  assumeva un'*intrinsecità*

che la separava definitivamente da  $b$ ,

che invece enucleava aspetti descrittivi dell'immersione.

Con Riemann, e poi definitivamente con Ricci Curbastro, sarà la coppia  $(\Sigma, g)$  il vero nuovo oggetto intrinseco, svincolato da immersioni, in 'qualche'  $\mathbb{R}^m$ .

La ‘prima forma fondamentale’  $g$ , ora assunta a ruolo definitivo di ‘metrica’, contiene tutti gli ingredienti di curvatura intrinseca di  $\Sigma$ ,

fatto che sarà riproposto e generalizzato da Riemann ad ogni dimensione maggiore di due con il suo tensore di curvatura a quattro indici

$$R^i_{jkl}$$

costruito con  $g$  e le sue **derivate prime e seconde**,

**esattamente come il  $K$  Gaussiano.**

Bernhard Riemann nasce nel 1826: inizialmente studia teologia, arriva ben presto alla matematica. Nel 1858 a Gottinga sale sulla cattedra che fu di Gauss, muore di tisi presso il Lago Maggiore nel 1866.

- Superfici di Riemann (nella sua *prima tesi* di laurea, 1851),
- integrale di Riemann,
- congettura di Riemann e funzione ‘zeta di Riemann’<sup>6</sup>, in un suo ultimo lavoro, e unico, in teoria dei numeri.

Ma è con la lezione/conferenza di abilitazione del 1854, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, che si gira pagina nello sviluppo della geometria stessa.

- Pubblicata postuma nel 1868, propone la naturale evoluzione della geometria di Gauss a dimensioni maggiori di due.

---

<sup>6</sup>Collocazione degli zeri della funzione zeta.

- Se *da un lato* l'estensione della prima forma fondamentale è naturale, *dall'altro*, la generalizzazione del concetto di curvatura è materia di radicale innovazione/invenzione.

Riemann, verso la fine di *Sulle ipotesi . . .*, si pone pure il problema epistemico della validità della geometria nell' 'immensamente' grande, l'universo, e nel microcosmo.

Il suo abbraccio alla filosofia di Herbart (un anti-idealista) mette radicalmente in discussione l'idea del "sintetico a priori" kantiano della geometria euclidea: ci sono 'tante' geometrie (si veda anche Carnap per questo).

Questi pensieri di Riemann sull'universo, la sua curvatura, sono prolegòmeni alle idee di Einstein della Relatività Generale.



Per la sua abilitazione all'insegnamento, scrisse la sua *seconda tesi*, intitolata *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, la espone davanti al suo maestro Gauss e a un pubblico culturalmente eterogeneo.

Riesce a compiere un'azione culturale al limite dell'*acrobatico*:

Sente di dover usare poca tecnica matematica, altrimenti non compresa, e nel contempo deve esporre con il massimo rigore il suo progetto di generalizzazione definitiva delle idee del suo maestro.

In quelle 18 pagine si può avvertire, a prima vista, l'assenza della matematica: in realtà, la si ritrova ben nascosta tra le righe.

Propone –tra altre cose– un'estensione della prima forma fondamentale di Gauss (sorta per superfici 2-dim) a **estensioni  $n$ -dimensionali**, le *varietà* in nuce,

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

Introduce (misteriosamente) le *coordinate geodetico-normali*, con il loro uso sistematico arriverà alla definizione della curvatura in tali **estensioni  $n$ -dimensionali**.

Ma qui inizia una materia oscura.

Come ben commenta Umberto Bottazzini: Riemann scrive “con un linguaggio di difficile decifrazione, conciso fino ai limiti dell'oscurità, ...”.



A cura di Renato Pettoello, 1994.

La difficoltà è ulteriormente amplificata dalle traduzioni, a volte fuorvianti.

Se si introducono queste grandezze, il quadrato dell'elemento lineare per valori infinitamente piccoli risulta uguale a  $\Sigma(dx)^2$ , mentre il termine di ordine successivo in esso sarà uguale a un'espressione omogenea di secondo grado delle  $n \frac{n-1}{2}$  grandezze  $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$ ,  $(x_1 dx_3 - x_3 dx_1)$ , ..., cioè una grandezza infinitesima a quattro dimensioni, di modo che si ottiene una

the sum of their squares equals  $s^2$ . If one introduces these quantities, then for infinitely small values of  $x$  the square of the line element =  $\Sigma dx^2$ , but the next order term in its expansion equals a homogeneous expression of the second degree in the  $n \frac{n-1}{2}$  quantities  $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$ ,  $(x_1 dx_3 - x_3 dx_1)$ , ..., and is consequently an infinitely small quantity of the fourth order, so that one obtains

petites des  $x$ , le carré de l'élément linéaire sera =  $\Sigma dx^2$ ; le terme de l'ordre suivant dans ce carré sera égal à une fonction homogène du second degré des  $n \frac{n-1}{2}$  grandeurs  $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$ ,  $(x_1 dx_3 - x_3 dx_1)$ , ..., c'est-à-dire qu'il sera un infiniment petit du quatrième ordre; de telle sorte que l'on obtient une grandeur

Ci si può chiedere ora chi in passato abbia veramente scavato tecnicamente su quella pagina.

Come Stephane Alexander mette in evidenza nella sua review nel BAMS del 1978 del libro di Spivak, sembra che solamente quest'ultimo sia andato veramente a fondo

These works are of tremendous historical interest, and Spivak must be thanked for his illuminating exposition of them. Riemann's paper presents particular difficulties, omitting almost all computations and greatly exceeding the bounds of the mathematical language of the time. Spivak provides thirty-five pages of computation to back up Riemann's nine-sentence derivation of sectional curvature and its properties from the Taylor expansion in normal coordinates of the metric. (Actually, the ninth sentence is not explained fully until later. Its claim that the curvature determines the metric depended on a "counting argument", and was only proved rigorously many years afterward, as the "Cartan local isometry theorem".) It is disappointing, if understandable, that Spivak draws the line at mathematics, and does not take up the subject of Riemann as a prophetic physicist.

Spivak fornisce **trentacinque pagine di calcolo** per eseguire il backup della derivazione di nove frasi di Riemann sulla **curvatura sezionale** e sulle proprietà dello sviluppo di Taylor nelle coordinate normali della metrica.

## Definizione di curvatura sezionale:

Sia  $p$  un punto in una varietà riemanniana  $M$ , e  $\sigma$  un piano (passante per l'origine) nello spazio tangente  $T_p$  in  $p$ .

La mappa esponenziale manda un aperto di  $\sigma$  contenente l'origine su una superficie  $S$ , contenuta in  $M$  e tangente a  $\sigma$  in  $p$ . Si tratta della superficie ottenuta prendendo localmente tutte le geodetiche uscenti da  $p$  tangenti a  $\sigma$ .

La curvatura sezionale  $K(\sigma)$  di  $M$  rispetto a  $\sigma$  è la curvatura gaussiana di  $S$  in  $p$ .

In altre parole, preso un punto  $p \in M$ , e una porzione aperta di piano  $\sigma \subset T_p M$  contenente lo zero, si considera l'immagine della mappa esponenziale  $\exp(p, \sigma)$ , si ricorda che  $\exp(p, v) = \Phi^t \Big|_{t=1} (p, v)$  dove  $\Phi^t(p, v)$  è la soluzione del pr. di Cauchy ( $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ ) per l'equazione delle geodetiche per la metrica  $g$ . La superficie 2-dim  $S = \exp(p, \sigma)$  è tangente a  $\sigma$  in  $p$ .

Ed ecco nella prossima slide una pagina dal Berger.

Tra queste righe può sorprendere la frase “In effetti, questa nozione è così complicata che alcuni suoi aspetti sono tuttora non capiti.”

Su questa linea di pensiero ritroviamo pure Mikhael Gromov: “The curvature tensor of a Riemannian manifold is a little monster of (multi)linear algebra whose full geometric meaning remains obscure”.

# Bernhard Riemann (1826-1866)

202 4 Riemann's Blueprints

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + \cdots + dx_d^2 \\ &+ \frac{1}{12} \sum_{i,j,k,h} R_{ijkh}(m) (x_i dx_j - x_j dx_i) (x_k dx_h - x_h dx_k) \\ &+ o(x_1^2 + \cdots + x_d^2) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Of course the hard work consists in showing that the second order terms are not made up by general quadratic terms but that they can be written in a expression involving only the various

$$(x_i dx_j - x_j dx_i) (x_k dx_h - x_h dx_k)$$

products.<sup>6</sup> The  $1/12$  factor is written not only to match when  $d = 2$  with formula 3.3 but is in fact forced when we identify the curvature tensor with other definitions of the curvature tensor below in proposition 413 on page 700. Important note: we match formula 3.3 but only up to sign. In the literature some authors use also  $R$  with the opposite sign: this is conceptually not important, but be careful not to trip over signs.

Formula 4.26 can be interpreted by saying that a Riemannian metric is Euclidean at the zeroth order, which is obvious, but more: intrinsically it is also Euclidean to the first order, which is more surprising. One can also consider that a Riemannian metric does not have tensor invariants of the first order but only invariants starting at the second order, the second order one being precisely the curvature tensor. (The Levi-Civita connection, described in chapter 15, is a first order invariant but not a tensor.)

There are many other conclusions we can derive from equation 4.26. The first is in dimension 2: the Gauß curvature is defined for abstract surfaces with Riemannian metrics, even without embedding in  $\mathbb{E}^3$ . We will now refer to the Gauß curvature as simply the *curvature* of  $(M, g)$ : it is a function  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ . For example in any two dimensional Riemannian manifold the Bertrand-Puiseux formula 17 is still valid and gives a very geometric way to feel about  $K$ .

The second is that there is an extension of the curvature (function) for Riemannian manifolds of any dimension but that notion is quite complicated. In fact it is so complicated that some of its aspects are still not understood today. The object which comes into the picture is a 4-tensor  $R$ , called the *Riemann curvature tensor*. This means that it is a smooth collection of quadrilinear forms  $R(m)$  on the tangent spaces  $T_m M$  when  $m$  runs through  $M$ . This quadrilinear form can be defined intrinsically through coordinate changes but also by extending by linearity the object whose values on the basis  $\{e_i = \partial/\partial x_i\}_{i=1,\dots,d}$  are the  $R(e_i, e_j, e_k, e_h) = R_{ijkl}$ . Then one will write  $R(x, y, z, t)$  applying the curvature tensor to tangent vectors  $x, y, z, t \in T_m M$ . By formula 4.26, the Riemann curvature tensor is invariant under isometries.

<sup>6</sup> See Spivak 1979 [1155], volume 2, for a guess as to how Riemann achieved this—he did not give any detailed computation in his text.

**Proviamo a decriptare la sua travolgente proposta.** Il suo vecchio maestro, Gauss, è lì seduto davanti a lui: Riemann vuole omaggiarlo e nel suo racconto continuerà a rivolgersi a lui come *Consigliere Aulico Gauss*. Ma la sua lezione, che è per la abilitazione all'università di Gottinga, è davanti ad un pubblico altamente eterogeneo, dunque Riemann prepara il suo discorso in maniera il meno tecnica possibile.

**Non saranno mai ritrovati suoi eventuali scritti ausiliari atti alla comprensione della sua lezione.**

Una sua prima importante enunciazione consiste nel constatare che l'incomprensione attuale sull'esistenza delle geometrie non-euclidee (Bolyai e Lobacevskij) sia insista nel non separare nell'idea costitutiva di spazio gli aspetti topologici da quelli metrici.



Nelle sue ‘estensioni  $n$ -dimensionali’, prolegomeni delle varietà differenziali, introduce la generalizzazione naturale dell’elemento lineare infinitesimo di Gauss:

$$ds = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j}$$

e queste funzioni  $g_{ij}(x)$  saranno poi indicate definitivamente come gli elementi di una metrica Riemanniana. Richiamiamo che in Gauss, nelle superfici, già si scriveva (vedi notazioni richiamate)

$$ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

dove sotto radice si intravede la *prima forma fondamentale* di una superficie assegnata in forma parametrica, e le variabili ‘gaussiane’  $(u, v)$  sono le premesse delle coordinate locali delle varietà differenziali ‘in fieri’:

Ed ora, sempre estendendo l'impianto gaussiano, Riemann arriva alla sua costruzione del concetto di curvatura. È la nozione di *curvatura sezionale* di Gauss per le superfici 2-dim il motore di questa estensione.

Un ulteriore passo, l'utilizzo di quelle che oggi chiamiamo *coordinate normali*, o *geodetico-normali*, attorno ad un punto ben preciso  $P$  di un'estensione  $n$ -dimensionale  $M$ :

Si considerano, 'attaccati' a  $P$  (manca ancora un'idea forte di spazio tangente locale)  $n$  vettori linearmente indipendenti  $(v_\ell)_{\ell=1,\dots,n}$  e  $g$ -ortonormali in  $P$ , che qui scriviamo in generiche coordinate (non geodetiche)  $y$ :

$$g_{ij}(y)v_\ell^i v_m^j = \delta_{\ell m},$$

si considerano le  $n$  curve locali di lunghezza minima, geodetiche dunque, che partono da  $P$  ciascuna con la velocità iniziale data dal vettore  $v^j$  preso. Il vantaggio netto di questa scelta sarà che in  $P$ , rappresentato da queste coordinate  $(x^i)_{i=1,\dots,n}$  con  $x = 0$ , varranno

$$\hat{g}_{ij}(x)|_{x=0} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial x^k}(x)|_{x=0} = 0.$$

## Digressione. Coordinate geodetico-normali 1/5

Ma come ha fatto Riemann ad arrivare a questo? Non è chiaro. Oggi costruiamo le coordinate geodetico-normali nel seguente modo.

Guardiamo all'equazione delle geodetiche  $t \mapsto \gamma_{P,v}(t) \in M$  – veder più avanti – uscenti da  $P$ :

$$\frac{d^2}{dt^2} \gamma_{P,v}^i(t) + \Gamma_{jk}^i \frac{d}{dt} \gamma_{P,v}^j(t) \frac{d}{dt} \gamma_{P,v}^k(t) = 0,$$

$$\gamma_{P,v}(0) = P, \quad \frac{d}{dt} \gamma_{P,v}(0) = v,$$

dove

$$\Gamma_{jk}^i = g^{ih} [jk, h] = \frac{1}{2} g^{ih} \left( \frac{\partial g_{kh}}{\partial y_j} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial y_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial y_h} \right)$$

sono i simboli di Christoffel di 2<sup>0</sup> specie.

## Digressione. Coordinate geodetico-normali 2/5

Si definisce ora la *mappa esponenziale*  $v \mapsto \exp_P(v)$ : si prende in  $T_P M$  un **intorno aperto  $\mathcal{U}$  dello zero** tale che

$$\mathcal{U} \ni v \mapsto \exp_P(v) := \gamma_{P,v}(1) \in M$$

sia un diffeomorfismo con l'immagine in  $M$ ,

$$\mathcal{V} := \exp_P(\mathcal{U})$$

Consideriamo anche l'isomorfismo

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_P M, \quad (x^1, \dots, x^n) \mapsto v = \sum_{\ell=1}^n x^\ell v_\ell,$$

$$(\text{rem} : g(P)(v_\ell, v_m) = \delta_{\ell m})$$

Tale  $\mathcal{U}$  esiste per il teorema di esistenza e unicità dei problemi di Cauchy per l'equazione delle geodetiche.

La carta locale che si sta costruendo è

$$\Phi_{(P)} : \mathcal{V} \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \Phi_{(P)} := \mathcal{T}^{-1} \circ \exp_P^{-1}$$

$M \supset \mathcal{V} \ni q \mapsto \exp_P^{-1}(q) = v \mapsto \mathcal{T}^{-1}(v) = (x^1, \dots, x^n) = x \in \mathbb{R}^n :$

$$v = \sum_{\ell=1}^n x^\ell v_\ell$$

(Si ricordi che  $(v_\ell)_{\ell=1, \dots, n}$  sono fissati).

## Digressione. Coordinate geodetico-normali 4/5

A questo punto si tratta di vedere come si rappresentano le geodetiche di cui sopra in questo sistema locale di coordinate.

$$\begin{aligned}\Phi_{(P)}(\gamma_{P,v}(t)) &= \Phi_{(P)}(\gamma_{P,tv}(1)) = \Phi_{(P)}(\exp_P(tv)) = \\ &= \mathcal{T}^{-1} \circ \exp_P^{-1} \circ (\exp_P(tv)) = \mathcal{T}^{-1}(tv) = t(x^1, \dots, x^n) = tx, \quad \bar{x} = tx,\end{aligned}$$

cioè, sono lineari in  $t$ , pertanto le derivate seconde sono nulle, le derivate prime vanno come  $x$ , e così

$$\hat{\Gamma}_{jk}^i(tx)x^jx^k = 0$$

e quando valutiamo in  $t = 0$  abbiamo

$$\hat{\Gamma}_{jk}^i(0)x^jx^k = 0,$$

questo è vero *per ogni scelta* di  $(x^1, \dots, x^n)$ ,  $\hat{\Gamma}_{jk}^i$  sono  $j$ - $k$ -simmetrici, pertanto, in  $P$ ,

$$\hat{\Gamma}_{jk}^i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0.$$

## Digressione. Coordinate geodetico-normali 5/5

Infine, mostriamo che la metrica in  $P$ ,  $x = 0$ , diventa la metrica euclidea. Si parte dalla constatazione che, nelle coordinate  $y$ , indicando con  $\bar{y}(t, v)$  la geodetica uscente da  $P$  con velocità iniziale  $v_\ell$ , e con  $y = y(x)$  la mappa di transizione,

$$v_\ell^i = \frac{d}{dt} \bar{y}^i(t, v_\ell)|_{t=0} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(0) \frac{d}{dt} \underbrace{(t \delta_\ell^j)}_{\bar{x}^j(t, v_\ell)} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\ell}(0)$$

Pertanto, mediante la legge tensoriale di trasformazione della metrica in  $P$ ,  $x = 0$ ,

$$\hat{g}_{\ell m}(0) = g_{ij}(y) \frac{\partial y^i}{\partial x^\ell}(0) \frac{\partial y^j}{\partial x^m}(0) = g_{ij}(y) v_\ell^i v_m^j = \delta_{\ell m}.$$



Ora, Riemann propone uno sviluppo (alla Taylor) del quadrato dell'elemento lineare, cioè, del

$$ds^2 = g_{ij}(y)dy^i dy^j$$

Lo realizza nelle coordinate geodetiche normali  $x$ , centrate dunque in  $x = 0$ , e per una deviazione da  $x = 0$  che qui denoteremo  $\delta x$ , proprio per distinguerla da <sup>7</sup> da  $dx$ . Ancora una volta, nell'accingerci a questo, tenendo presente

$$\frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$$

scriveremmo il nostro sviluppo Taylor così:

---

<sup>7</sup>In realtà Riemann denotò i due spostamenti infinitesimi con i simboli  $dx$  e  $x$ , preferiamo qui scrivere invece  $dx$  e  $\delta x$ .

$$\left( \text{sappiamo che: } \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial x^k}(0) dx^i dx^j \delta x^k = 0 \right)$$

$$(\star) \quad ds^2 = \underbrace{\delta_{ij} dx^i dx^j}_{(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \hat{g}_{ij}}{\partial x^\ell \partial x^m}(0) dx^i dx^j \delta x^\ell \delta x^m +$$

+ (termini sup. al 4<sup>0</sup> ordine)

Riemann è ben consapevole che deve emergere uno sviluppo del  $ds^2$  contenente

- termini del secondo ordine (quello euclideo)
- e quindi del quarto ordine,
- ma **NON** scrive la relazione di cui sopra.

Deve mettere assieme alcune informazioni e altri propositi.

(i) Il termine del quart'ordine deve essere il nuovo scrigno contenente la curvatura generalizzata di Gauss.

(ii) Deve ristabilire, riassetare con ordine un certo conteggio dimensionale, abbastanza criptico, che enuncia a più riprese: nel cambio di coordinate si assegnano  $n$  funzioni, ma il contenuto geometrico della nuova prima-forma-fondamentale generalizzata, la 'sua' metrica Riemanniana  $g_{ij}$ , in quanto *simmetrica*, trasporta  $n\frac{n+1}{2}$  componenti indipendenti; mancano, secondo Riemann, ulteriori

$$n\frac{n+1}{2} - n = n\frac{n-1}{2}$$

relazioni, da introdurre per ricostituire completamente la metrica, relazioni che devono essere intrinseche nella ' $n$ -estensione' che si sta considerando. Tale (assai curiosa e ideologicamente decisamente sbagliata -cf. P. Libermann) idea euristica di Riemann si concretizza nell'affiancare, nella costruzione del  $ds^2$  fino al quart'ordine, anche informazioni che derivano dagli  $n\frac{n-1}{2}$  piani scanditi dai  $dx \otimes \delta x - \delta x \otimes dx$ .

Riemann azzarda (e sarà vincente) la seguente struttura alternativa alla 'naturale'

$$ds^2 = \underbrace{\delta_{ij} dx^i dx^j}_{(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2} + C_{ijkl}(dx^i \delta x^j - dx^j \delta x^i)(dx^\ell \delta x^k - dx^k \delta x^\ell) +$$

+ (termini sup. al 4<sup>0</sup> ordine)

Qual è il significato di queste diadi anti-simmetriche  $dx^i \delta x^j - dx^j \delta x^i$  ?

La sua idea sembra prendere le mosse da questi fatti:

- ogni assegnata coppia di vettori  $dx$  e  $\delta x$  individua una superficie 2-dimensionale (un triangolo, o più precisamente il suo doppio, il parallelogramma) e il quadrato della sua misura (area) euclidea è ricostruibile così:
- se l'ambiente è  $\mathbb{R}^3 (\approx T_P M)$ , allora il prodotto vettore è quanto ci serve: il quadrato dell'area del parallelogramma con lati  $dx$  e  $\delta x$ , pensati come vettori di  $\mathbb{R}^3$ , è (usando prodotto vettore e prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ ):

$$\mathcal{A}^2 = |dx \times \delta x|^2 = |dx|^2 |\delta x|^2 \sin^2 \vartheta = |dx|^2 |\delta x|^2 \left( 1 - \frac{(dx \cdot \delta x)^2}{|dx|^2 |\delta x|^2} \right),$$

$$\mathcal{A}^2 = |dx|^2 |\delta x|^2 - (dx \cdot \delta x)^2$$

- Il difetto operativo di questa formula è che usa pesantemente un ingrediente associato esclusivamente a  $\mathbb{R}^3$ , il prodotto vettore. Questo appare una limitazione, perché noi vorremmo una descrizione di area per (porzioni di) piani 2-dim immersi in ambiente di dimensione qualsiasi  $n \geq 3$ . Ora è ben noto che la soluzione risiede nella teoria dell'integrazione delle forme differenziali.

• Procediamo per gradi nella generalizzazione. Prima di tutto notiamo che, dati  $dx$  e  $\delta x$ , si costruisce una matrice anti-simmetrica (è in realtà una 2-forma)

$$W := dx \otimes \delta x - \delta x \otimes dx, \quad W^T = -W, \quad (1.1)$$

con la quale si deduce

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{2} \text{Tr } W^T W \quad (1.2)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \text{Tr } W^T W &= (\delta x \otimes dx - dx \otimes \delta x)(dx \otimes \delta x - \delta x \otimes dx) = \\ &= 2 \left( |dx|^2 |\delta x|^2 - (dx \cdot \delta x)^2 \right). \end{aligned}$$

Quest'ultima costruzione dell'area del parallelogrammo (2-dim) non usa affatto la dimensione dello spazio ambiente, pertanto si presta ad una definizione generale.

Obiettivo di Riemann è l'estensione del concetto di curvatura di Gauss che ora sarà *piano per piano* costruibile in  $T_P M$ .

Per ogni scelta di  $n$  vettori linearmente indipendenti in  $T_P M$ ,  $v_1, \dots, v_n$ , **quanti piani scanditi da coppie**  $(v_i, v_j)$  **possiamo costruire?**

è il numero di coppie di vettori distinti, a meno dell'ordine, che si possono costruire con  $n$  vettori. A meno dell'orientazione, **coincidono** con il numero di matrici emi-simmetriche come sopra che riusciamo a definire,

$$W_{\ell m} = v_\ell \otimes v_m - v_m \otimes v_\ell,$$

esse sono:  $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = n \frac{n-1}{2}$ .



Si ha bene in mente che la curvatura di Gauss è un opportuno limite del rapporto di due misure. Dovremo quindi svincolarci dalla scelta della coppia di vettori che individua un piano e imparare come si modifica l'area se uno **stesso** piano, diciamo  $(v_1, v_2)$ , sarà ora rappresentato da due nuovi vettori  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ , dove, per generiche matrici  $2 \times 2$  non degeneri  $(a_{\alpha\beta})$ ,

$$\bar{v}_\alpha = a_{\alpha\beta} v_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (1.3)$$

Indichiamo con

$$W_{\alpha\beta} = v_\alpha \otimes v_\beta - v_\beta \otimes v_\alpha =: v_\alpha \wedge v_\beta \quad (\wedge : \text{prodotto 'wedge'})$$

la matrice associata a  $(v_\alpha, v_\beta)$ , essenzialmente costituita un unico elemento, poiché

$$W_{12} = -W_{21}, \quad W_{11} = 0 = W_{22},$$

e con  $\bar{W}_{\rho\sigma}$  quella associata a  $(\bar{v}_\rho, \bar{v}_\sigma)$ .

Usando il simbolo di Ricci<sup>8</sup>  $\epsilon_{\alpha\beta}$  in  $\mathbb{R}^2$ :

$$W = W_{12} = v_1 \wedge v_2 = \epsilon_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta$$

$$\bar{W} = \bar{v}_1 \wedge \bar{v}_2 = \epsilon_{\alpha\beta} \bar{v}_\alpha \bar{v}_\beta = \epsilon_{\alpha\beta} a_{\alpha\rho} v_\rho a_{\beta\sigma} v_\sigma = \det a \epsilon_{\rho\sigma} v_\rho v_\sigma = \det a W.$$

Concludiamo questa prima ricognizione sulle aree con la legge di variazione dei quadrati delle aree (rem:  $\mathcal{A}^2 = \frac{1}{2} \text{Tr } W^T W$ )

$$\bar{\mathcal{A}}^2 = (\det a)^2 \mathcal{A}^2. \quad (1.4)$$

Torniamo a riguardare la proposta di Riemann. E' giunto il momento per riportare qui un teorema algebrico che si trova in Spivak.

---

<sup>8</sup>  $\epsilon_{\alpha\beta}$  :  $\epsilon_{12} = 1$ ,  $\epsilon_{21} = -1$ ,  $\epsilon_{11} = 0 = \epsilon_{22}$ .

**Proposizione (Spivak 1)** Sia  $Q$  una f. quadratica di  $2n$  variabili  $(dx, \delta x)$ , come quella in  $(\star)$ ,  $\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \hat{g}_{ij}}{\partial x^\ell \partial x^m}(0) dx^i dx^j \delta x^\ell \delta x^m$ ,

$$Q(dx, \delta x) = c_{ijkl} dx^i dx^j \delta x^k \delta x^\ell$$

soddisfacente alle relazioni<sup>9</sup>

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}.$$

Allora, per ogni matrice  $a$  non degenera  $2 \times 2$ , vale

$$Q(a(dx, \delta x)) = (\det a)^2 Q(dx, \delta x) \quad (1.5)$$

se e solo se valgono:

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (1.6)$$

e

$$c_{lij k} + c_{ljk i} + c_{lki j} = 0 \quad (1.7)$$

Queste condizioni (1.6) e (1.7) sono soddisfatte se e solo se la

$(\star)$  può essere scritta nella forma

$$Q(dx, \delta x) = C_{ijkl} (dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i)(dx^j \delta x^\ell - dx^\ell \delta x^j). \quad (1.8)$$

<sup>9</sup>Per  $c_{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{g}_{ij}}{\partial x^k \partial x^\ell}(0)$  queste relazioni sono naturali, esprimono il teorema di Schwarz e la simmetria del tensore metrico  $g$ .

La dimostrazione è in Spivak, è abbastanza laboriosa, tuttavia ricordiamo che la struttura del secondo membro della (1.8) implica immediatamente la proprietà (1.5), proprio ritornando alle formule (85), (1.2), (1.4).

La seguente Proposizione, più complicata da dimostrarsi della precedente, chiude il cerchio intorno alla proposta di Riemann.

**Proposizione (Spivak 2)** *In coordinate geodetiche normali, basate su un punto  $P \in M$  rappresentato da  $x = 0$ , i numeri*

$$c_{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{g}_{ij}}{\partial x^k \partial x^\ell}(0) \quad (1.9)$$

soddisfano alle condizioni (1.6) e (1.7).

Riassumiamo le varie relazioni introdotte:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{g}_{ij}}{\partial x^\ell \partial x^m} (0) dx^i dx^j \delta x^\ell \delta x^m &= c_{ij\ell m} dx^i dx^j \delta x^\ell \delta x^m \\
 &= Q(dx, \delta x) \\
 &= C_{ijkl} (dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i) (dx^j \delta x^\ell - dx^\ell \delta x^j) \\
 &= -\frac{1}{3} \langle R(dx, \delta x) \delta x, dx \rangle = -\frac{1}{3} R_{ijkl} dx^i \delta x^j dx^k \delta x^\ell .
 \end{aligned}$$

Queste relazioni sono pensate nelle coordinate geodetico-normali. Per una definizione ‘definitiva’ generale del tensore di curvatura si deve ancora attendere:

$$R^s{}_{ijr} = \Gamma_{ir}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jr}^m \Gamma_{im}^s - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jr}^s + \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ir}^s ,$$

dove  $\Gamma_{jk}^m$  sono i simboli di Christoffel di 2<sup>0</sup> specie,

$$\Gamma_{jk}^m = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) .$$

• **Curvatura sezionale nelle  $g$ -varietà di dimensione qualunque** La ricostruzione sopra operata da Spivak mette ben in evidenza

l'indipendenza del rapporto di

$C_{ijkl}(dx^i \delta x^j - dx^j \delta x^i)(dx^\ell \delta x^m - dx^m \delta x^\ell)$  con il quadrato dell'area del parallelogramma per  $dx$  e  $\delta x$  rispetto alla scelta stessa di essi, mostrando, con le formule (1.4), (1.5) e (1.8), che ciò che conta è, solo e soltanto, il piano per essi:

$$\frac{Q(\overline{dx}, \overline{\delta x})}{\mathcal{A}^2(\overline{dx}, \overline{\delta x})} = \frac{(\det a)^2 Q(dx, \delta x)}{(\det a)^2 \mathcal{A}^2(dx, \delta x)} = \frac{Q(dx, \delta x)}{\mathcal{A}^2(dx, \delta x)}.$$

Questo rapporto è precisamente la **curvatura sezionale** rispetto al **piano** per  $dx, \delta x$  della  $g$ -varietà in studio di dimensione qualunque:

$$K_{(dx, \delta x)} = \frac{Q(dx, \delta x)}{\mathcal{A}^2(dx, \delta x)} = -\frac{1}{3} \frac{\langle R(dx, \delta x)\delta x, dx \rangle}{g(dx, dx)g(\delta x, \delta x) - g(dx, \delta x)^2}$$

Come ha fatto Riemann ad arrivare a questa costruzione?

Spivak, a pagina 170, afferma senza speranza:

*Of course, an answer to the question is not only doomed to be mere conjecture, but is always foolhardy to put forth, for there is no accounting for genius.*<sup>10</sup>

Ancora, nella pagina 191 di Spivak c'è l'esempio delle superfici 2-dim e il raccordo con la curvatura  $K$  di Gauss.

---

<sup>10</sup> 'Naturalmente, una risposta alla domanda non è solo destinata a essere una semplice congettura, ma è sempre temeraria da proporre, perché non c'è spiegazione per il genio'.

La pagina 196 di Spivak è decisiva per la comprensione del punto di vista di Riemann sulle dimensioni in gioco.

Come pur messo in evidenza da Paulette Libermann il bilancio/conteggio euristico di Riemann non è corretto (sensato), benché sia stato profondamente virtuoso per la sua rivoluzionaria generalizzazione del concetto di curvatura.

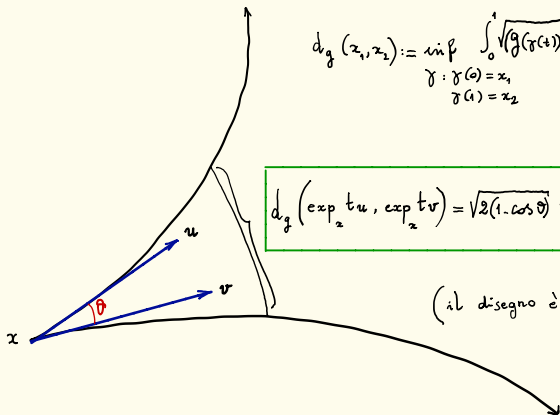
Infine, le componenti indipendenti del tensore di Riemann sono

$$\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$$



## Ancora su curvatura e teoremi

Separazione delle geodetiche uscenti da  $x$ ,  $g_x(u, u) = 1$ ,  
 $g_x(v, v) = 1$ .



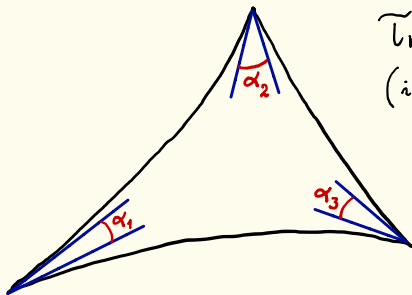
$$d_g(z_1, z_2) := \inf_{\gamma} \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

$\gamma: \gamma(0) = x_1$   
 $\gamma(1) = x_2$

$$d_g(\exp_x t u, \exp_x t v) = \sqrt{2(1 - \cos \theta)} t \left( 1 - \frac{K_x \cos^2(\theta/2)}{6} t^2 + \mathcal{O}(t^4) \right)$$

(il disegno è pensato per  $K < 0$ )

Triangolo geodetico ed deviazione da  $\pi$  della somma degli angoli interni dal caso euclideo ( $k \equiv 0$ ), verso Gauss-Bonnet. Fu chiamato da Gauss (1827) *Theorema elegantissimum*:



Triangolo geodetico  
(il disegno è pensato per  $\kappa < 0$ )

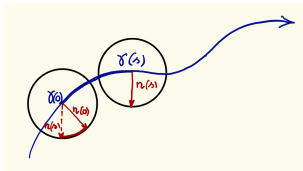
$$\int_A \kappa dA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

Un semplice esempio. Si pensi alla 2-sfera di raggio  $R$ , la sua curvatura è costante e vale  $k = 1/R^2$ . Consideriamo il seguente triangolo geodetico  $P_1 P_2 P_3$ : il punto  $P_1$  nel polo nord, poi, prendendo due meridiani ortogonali in  $P_1$  che scendono verso l'equatore e lo incrociano in  $P_2$  e  $P_3$ . Ciascuno dei tre angoli vale  $\pi/2$ .

$$\int_{\text{Triangolo}(P_1 P_2 P_3)} \frac{1}{R^2} dA = \frac{1}{R^2} \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = 3 \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

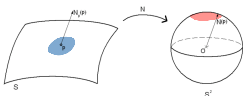
- 1-dim:



curvatura  $k$  di curva piana :

limite del rapporto :  $\frac{\text{lunghezza rossa}}{\text{lunghezza blu}}$

- 2-dim:



curvatura gaussiana  $K$  di una superficie :

limite del rapporto :  $\frac{\text{area rossa}}{\text{area blu}}$

- $n$ -dim: Per ogni punto  $m \in M$ , nel piano tangente  $n$ -dim  $T_m M$  si considerano gli  $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = n \frac{n-1}{2}$  piani 2-dim indipendenti. Per ciascuno di essi, diciamolo  $\sigma$ , si considera la circonferenza di raggio unitario centrata nello zero, e i vettori ad esso appartenenti si considerano come velocità iniziali  $v$  per le geodetiche, partenti da  $m$ . Il flusso geodetico  $\Phi_g^t(m, v)$  costruisce la superficie 2-dim:  $\Sigma = \bigcup_{t \in [0,1], |v|=1} \Phi_g^t(m, v)$  (vale :  $T_m \Sigma = \sigma$ ) La curvatura gaussiana di  $\Sigma$  è la *curvatura sezionale* di  $M$  in  $m$  relativa al piano 2-dim  $\sigma$ . Tali curvature riassumono *completamente* la curvatura Riemanniana di  $M$  in  $m$ .

## Un progetto millenario. (ref: Lucio Russo)

- **Ipparco** (Nicea, 200 a.C. - Rodi, 120 a.C.), compie misure accurate delle 'stelle fisse',
- **Tolomeo** (Pelusio, 100 d.C. circa - Alessandria d'Egitto, 175 d.C. circa), riprende quelle misure e ne compie ulteriori,
- infine **Halley** (Haggerston, 1656 - Greenwich 1742).

Questo piano secolare non è molto noto.

- Le cosiddette **stelle fisse** in realtà si muovevano, non potevano quindi essere fissate ad alcuna sfera materiale. Questa scoperta fondamentale si deve a Edmond Halley, che nel 1718, confrontando le coordinate da lui misurate di alcune stelle, **Sirio, Arturo e Aldebaran**.

## Un progetto millenario. (ref: Lucio Russo)

- **Ipparco** (Nicea, 200 a.C. - Rodi, 120 a.C.), compie misure accurate delle 'stelle fisse',
- **Tolomeo** (Pelusio, 100 d.C. circa - Alessandria d'Egitto, 175 d.C. circa), riprende quelle misure e ne compie ulteriori,
- infine **Halley** (Haggerston, 1656 - Greenwich 1742).

Questo piano secolare non è molto noto.

- Le cosiddette **stelle fisse** in realtà si muovevano, non potevano quindi essere fissate ad alcuna sfera materiale. Questa scoperta fondamentale si deve a Edmond Halley, che nel 1718, confrontando le coordinate da lui misurate di alcune stelle, **Sirio, Arturo e Aldebaran**.

## Un progetto millenario. (ref: Lucio Russo)

- **Ipparco** (Nicea, 200 a.C. - Rodi, 120 a.C.), compie misure accurate delle 'stelle fisse',
- **Tolomeo** (Pelusio, 100 d.C. circa - Alessandria d'Egitto, 175 d.C. circa), riprende quelle misure e ne compie ulteriori,
- infine **Halley** (Haggerston, 1656 - Greenwich 1742).

Questo piano secolare non è molto noto.

- Le cosiddette **stelle fisse** in realtà si muovevano, non potevano quindi essere fissate ad alcuna sfera materiale. Questa scoperta fondamentale si deve a Edmond Halley, che nel 1718, confrontando le coordinate da lui misurate di alcune stelle, **Sirio, Arturo e Aldebaran**.

## Un progetto millenario. (ref: Lucio Russo)

- **Ipparco** (Nicea, 200 a.C. - Rodi, 120 a.C.), compie misure accurate delle 'stelle fisse',
- **Tolomeo** (Pelusio, 100 d.C. circa - Alessandria d'Egitto, 175 d.C. circa), riprende quelle misure e ne compie ulteriori,
- infine **Halley** (Haggerston, 1656 - Greenwich 1742).

Questo piano secolare non è molto noto.

- Le cosiddette **stelle fisse** in realtà si muovevano, non potevano quindi essere fissate ad alcuna sfera materiale. Questa scoperta fondamentale si deve a Edmond Halley, che nel 1718, confrontando le coordinate da lui misurate di alcune stelle, **Sirio, Arturo e Aldebaran**.



Gli spazi inerziali ‘appena’ introdotti da **Newton**, sono minati ‘in culla’ e definitivamente abbattuti da Mach.

La rimozione definitiva dell’idea di ‘stelle fisse’ (Halley, nel ’700), condusse alla critica radicale del concetto di ‘spazio inerziale’ (Mach), sintetizzata da **Einstein** come ‘**Principio di Mach**’:

*È la distribuzione delle **masse del cosmo e il loro moto** che induce nel nostro locale ambiente alla periferia dell’universo a rendere il buon funzionamento della fisica (la meccanica), la sua descrizione invariante nei sistemi inerziali.*

Con la moderna definizione di **curvatura**, e della Relatività Generale, si è giunti alle attuali proposte cosmologiche.

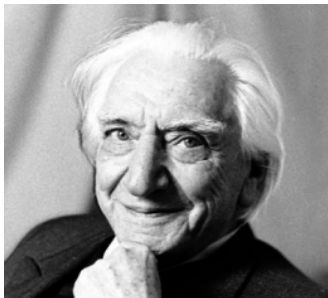
**Gregorio Ricci Curbastro**  
**Tullio Levi-Civita**  
**Albert Einstein**

## Si incontrarono personalmente Einstein, Ricci Curbastro, Levi-Civita?

- Nel **1921 a Bologna** un grande scienziato-umanista, **Federigo Enriques**, matematico, filosofo e storico della scienza, invita Albert Einstein per un ciclo di conferenze in quell'Università. Tutti i protagonisti, Ricci Curbastro, Levi-Civita, Einstein, hanno l'opportunità di incontrarsi di persona.
- **Quello sarà il primo incontro di Levi-Civita con Einstein**, che giunge, da Roma (è lì dal primo gennaio 1919) a Bologna, per seguire le tre annunciate conferenze di Einstein.
- **Ricci Curbastro, allora a Padova, non va a Bologna**, è una persona schiva, gentile, posseduto da una sua nobile timidezza.
- Ma è l'**Università Popolare**, in collaborazione con l'**Accademia Galileiana**, ad invitare Einstein, nella sua risalita di ritorno a Berlino, per fermarsi a Padova per una conferenza. Einstein accetta con entusiasmo!

Era il 27 ottobre e il giovane laureando in filosofia Cesare Musatti è scelto, per la sua conoscenza del tedesco, per accogliere Albert Einstein, per accompagnarlo sottobraccio per le scale all'Aula Magna dell'Università di Padova dove avrebbe tenuto la sua prolusione, che propose in italiano.

La conferenza è introdotta proprio da Ricci Curbastro e infine Einstein ha la possibilità di esprimere tutta la sua gratitudine scientifica al grande maestro.



Cesare Musatti, allora abitante a Dolo (Ve), figlio di Elia, ebreo veneziano,

che **divenne il padre nobile della psicoanalisi italiana**, sta proprio in quei giorni per presentare e discutere la sua tesi di laurea in **filosofia** (il **3 nov 1921**), un lavoro di grande respiro filosofico, matematico e fisico dal titolo:

- **Geometrie non euclidee e problema della conoscenza**

A distanza di un secolo, quelle centinaia di pagine sono solo ora (2019) finalmente pubblicate.

## Il prof. Einstein a Padova

Padova, 27 ottobre, notte.

Nell'Aula Magna della nostra Università Alberto Einstein ha tenuto oggi l'annunziata conferenza. L'aula è affollatissima. Il prof. Ricci-Curbastro, della Facoltà fisico-matematica, presenta il prof. Einstein con elevate parole ricordando anche come tre secoli or sono, in questa stessa aula, Galileo Galilei abbia insegnato la allora nuova dottrina della meccanica.

Il prof. Einstein, che parla in italiano, esprime anzitutto il suo compiacimento nel parlare nella città dove insegna il prof. Ricci al quale si deve il calcolo infinitesimale assoluto, ch'è l'arma matematica necessaria ad esprimere la teoria della relatività generale. Poscia espone in riassunto, nell'ordine tenuto nelle conferenze di Bologna, i tratti essenziali di questa teoria. Il prof. Einstein fu molto applaudito.

**Corriere della Sera, 28 ottobre 1921**

Quello fu l'unico incontro di Einstein con Gregorio Ricci Curbastro, che morirà nel 1925. Tullio Levi-Civita incontrerà ancora altre volte Einstein, negli USA.