Autómi e Macchine

Computabilità

Progetto Nazionale Lauree Scientifiche

Licei "Fracastoro" e "Messedaglia"

Verona, novembre/dicembre 2012

Sommario

- Introduzione
- Automi a Stati Finiti.
- Macchine di Turing.

Introduzione agli Automi

- ***Che cosa serve per eseguire un'addizione in colonna?***
  - leggere una cifra e ricordarla;
  - leggerne un'altra e sommarla;
  - scrivere la somma e tener conto del riporto;
  - spostarsi di una colonna a sinistra;
  - ricominciare nuovamente.

1	*0*	*0*		
	2	2	7	+
	9	3	2	=
1	1	5	9	

Operazioni minime

- Leggere in una casella un simbolo elementare,
- “ricordare” quanto è stato letto,
- intraprendere un’azione elementare,
- considerare la prossima casella.

Macchinetta mini-bar

- Che cosa sa fare?
- Accetta monetine, ma solo alcune!
- Ricorda quanto è stato inserito.
- Consente la richiesta di un elemento.
- Reagisce di conseguenza:
  - fornisce l’elemento,
  - o lo rifiuta;
  - dà il resto ... ma non sempre!

Automi a stati finiti

Intuizione

- Che cosa serve per realizzare queste semplici azioni di calcolo meccaniche?
  - Un insieme finito di *simboli*, un ***alfabeto*** ;
  - una *memoria finita*, ovvero un insieme finito di ***stati***;
  - ***regole di azione*** che dipendono da
    - lo stato della memoria,
    - e dal simbolo in *input*.

Caratteristiche

- Perché il *meccanismo* sia effettivo
  è **essenziale** che:
  - l'*input* sia descritto da un ***alfabeto finito***,
  - la memoria possa assumere
    solo un ***insieme finito di stati***,
  - la memoria possa essere modificata
    grazie un ***insieme finito di regole***.

Parità

- Riconoscere se un numero (scritto in binario) è pari.
  - Un alfabeto di input: ***0, 1, ƀ***.
  - Una memoria che può assumere gli stati:
    - **inizio**, **pari**, **dispari**, **si**, **no**.
  - Le seguenti regole (di transizione):
    - **inizio**, ***0*** ⇒ **pari**;
    - **inizio**, ***1*** ⇒ **dispari**;
    - **pari** o **dispari**, ***0*** ⇒ **pari**;
    - **pari** o **dispari**, ***1*** ⇒ **pari**;
    - **pari**, ***ƀ*** ⇒ **si**;
    - **dispari**, ***ƀ*** ⇒ **no**;

Definizione

- Un Automa (deterministico) a Stati Finiti (DFA) è definito da:
  - un ***alfabeto finito*** Σ;
  - un ***insieme finito di stati*** Q;
  - una ***funzione di transizione*** $\partial: \Sigma \times Q \longrightarrow Q$;
  - un nastro a sola lettura, detto ***input***,
  - uno ***stato*** speciale detto ***iniziale*** $q_0 \in Q$,
  - un insieme $F \subseteq Q$ di ***stati finali***.

Il nastro

- Il **nastro** di un automa a stati finiti è
  - ***mono dimensionale***;
  - ***infinito*** (solo in una direzione);
  - ***quasi ovunque "bianco"***, ossia contiene solo un numero finito di simboli significativi;
  - può essere letto solo in una direzione (mediante una testina di lettura).

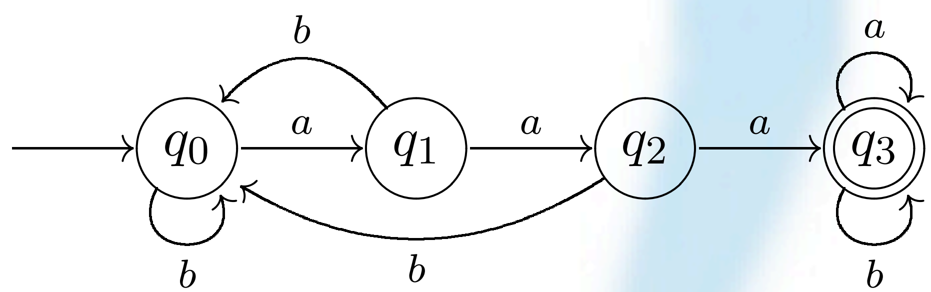
Stato dell'automa

- Di un automa possiamo conoscere la sua ***descrizione istantanea*** è definita da
  - la *posizione della testina* nel nastro,
  - lo *stato corrente*,
  - il *simbolo corrente*.
- La successione delle descrizioni istantanee raggiunte a partire da un determinato *input* è detta ***computazione***.

Esempi ed Esercizi

Un semplice automa

Example of a finite automaton

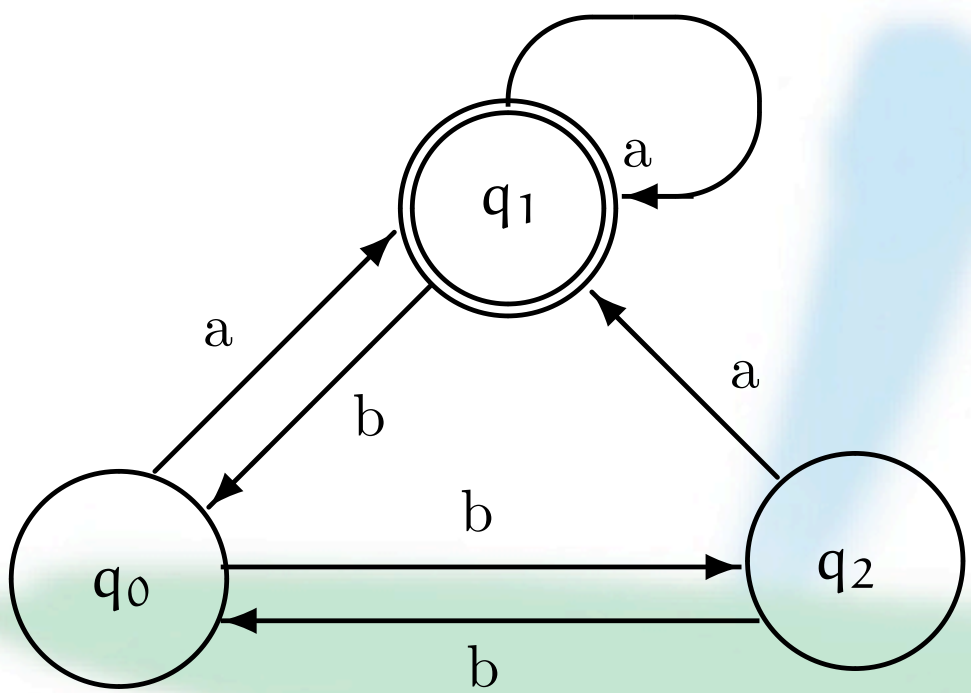


States: q_0, q_1, q_2, q_3.
Input symbols: a, b.
Transitions: as indicated above.
Start state: q_0.
Accepting state(s): q_3.

δ	**a**	**b**
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_3	q_0
q_3	q_3	q_3

Che cosa fa?

Un altro esempio



ð	*a*	*b*
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_0
q_2	q_1	q_0

Riconosce le stringhe che terminano con ‘a’.
Altre proprietà?

Esercizi

- Riconoscitore di numeri dispari.
- Numeri (binari) con al più 5 cifre.
- Numeri (binari) con al meno 5 cifre.
- Numeri che contengono tre zeri consecutivi.
- Numeri che non contengono tre ‘0’ consecutivi.
- Stringhe della forma $ababa^n$, per n naturale.
- Stringhe della forma aba^nab, per n naturale.

Schema di lavoro

- Come si risolve un esercizio?
  - descrizione rigorosa dell'obiettivo.
  - definizione dell'automa.
  - verifica del corretto funzionamento.
    - Ma come si fa? Non è immediato!

Altri esempi

- Stringhe della forma $a^n b^n$, per ogni n.
- Stringhe palindrome.
- Somma di numeri naturali.
- ...

- Non si possono "risolvere" con un DFA, e nemmeno con una sua variante semplice!

Linguaggi

- Fissato un alfabeto ∑ (insieme finito)
  - una ***stringa*** (o *parola*) su ∑
    è una sequenza finita di elementi di ∑.
  - ∑* è l'insieme di tutte le stringhe si ∑.
- Si dice ***linguaggio***
  un qualunque sottoinsieme di ∑*.
- Anche se ∑ è finito
  un linguaggio può essere infinito.

Automi come riconoscitori

- Gli automi a stati finiti in sostanza sono degli *riconoscitori* di linguaggi:
  - se l'automa si arresta in uno stato finale si dice che ***accetta*** (o riconosce) la stringa di *input*.
- Ci sono varianti degli automi a stati finiti che permettono di fornire un risultato (*output*), ma sempre in modo piuttosto limitato.

Applicazioni

- Definizione di semplici "meccanismi".
- Riconoscimento lessicale.
- Ricerca di *pattern* in stringhe o *file*.

Introduzione
alle ***Macchine di Turing***

A che servono gli automi?

- I DFA sono molto diffusi, anche se non pare.
- Sono essenzialmente DFA:
  - le “centraline elettroniche”;
  - i telefoni cellulari, anche quelli *smart*;
  - i *computer*,
    anche se bisognerebbe precisare.
- Attenzione! Siamo sicuri?

  La situazione è delicata!

Limiti degli automi

- Gli automi a stati finiti, malgrado tutto, non sono abbastanza potenti:
  - non hanno abbastanza memoria.
- ***Vogliamo memoria infinita!***
  - Va be' ... Non esageriamo ...
- Ci accontentiamo di una ***memoria finita, ma illimitata.***

Si aumenti la memoria!

- **Automa a Stati Finiti + Memoria**
- Memoria (spazio di lavoro) finita,
  ma **senza limiti prefissati!**
- Come si fa in pratica?
  - Il modello di automa è arricchito con
    - un ***nastro infinito*** di lavoro,
    - "***quasi ovunque vuoto***".
  - Sul nastro (*work tape*) si può
    leggere e scrivere e spostarsi liberamente.
- E nel mondo reale?

Operazioni di una MdT

- Come lavora una MdT?
- Come un DFA usa lo *work tape* come *input.*
- Inoltre può scrivere e leggere sul nastro
  e muoversi liberamente su di esso
  una cella alla volta, ma in tutte le direzioni.

Macchina di Turing

Definizione

Definizione

- Una Macchina di Turing (MdT) è definita da:
  - un ***alfabeto finito*** $\sum$;
  - un ***insieme finito di stati*** Q;
  - un ***nastro di lavoro*** (*work tape*) costituito da un *insieme infinito di celle.*
  - una ***funzione di transizione***
    $\partial: \sum \times Q \longrightarrow Q \times \sum \times \{L, R, H\}$
    dove L, R e H significano rispettivamente **sinistra** (*left*), **destra** (*right*) e **stop** (*halt*).

Stato **MdT**

- La **descrizione istantanea** di una Macchina di Turing (MdT) è caratterizzata, come per gli automi, da:
  - lo **stato** corrente,
  - il **simbolo** corrente,
  - la **posizione** della testina nel nastro.

Computazione di una MdT

- La computazione di una MdT con fissato *input* è la successione delle descrizioni istantanee ottenute mediante l'applicazione delle regole.
- Una MdT può
  - leggere, scrivere
    e modificare il nastro di lavoro,
  - percorrerlo in entrambi i sensi.
- *Quindi* ***una computazione può non terminare****!*

Macchina di Turing

Esempi ed Esercizi

Esempi

- Questio problemi possono essere risolti con una Macchina di Turing?
  - Stringhe della forma $a^n\ b^n$, per ogni n.
  - Stringhe palindrome.
  - Somma di numeri naturali.
  - ...

Incremento binario

δ	\$	0	1
q_0	q_1 \$ L		
q_1	q_2 1 L	q_2 1 L	q_1 0 L
q_2		q_2 0 L	q_2 1 L

Incremento decimale

δ	0	1	2	$\cdots$	7	8	9	\$
q_0	q_1 1 R	q_1 2 R	q_1 3 R	$\cdots$	q_1 8 R	q_1 9 R	q_0 0 L	q_1 1 R
q_1				$\cdots$				

Copia

δ	$	0
q_0	q_1 $ L	
q_1		q_2 $ R
q_2	q_3 $ R	q_2 0 R
q_3	q_4 0 L	q_3 0 R
q_4	q_5 $ L	q_4 0 L
q_5	q_6 0 L	q_5 0 L
q_6	q_7 $ R	q_2 $ R
q_7		q_7 0 R

Questioni generali

- Quanto espressive sono le MdT?
  Ossia quali problemi possono risolvere?
  quali funzioni possono calcolare?
- Ci sono calcoli impossibili per una MdT?
- Ci sono “meccanismi” più intuitivi?

- *Ma a che cosa servono le MdT?*
- *Sono solo “vecchiume”?*