Primi passi nel mondo delle simmetrie: le tassellazioni del piano

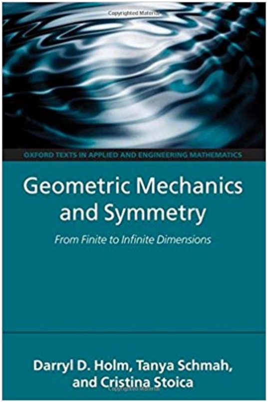
Nicola Sansonetto

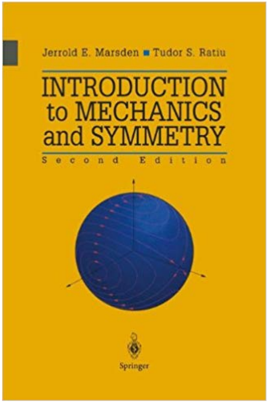
Dipartimento di Informatica, Università degli Studi di Verona

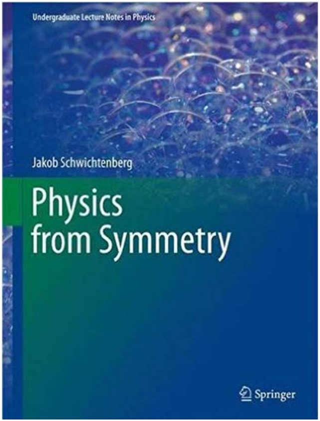
28 Settembre 2018

Schema dell'incontro

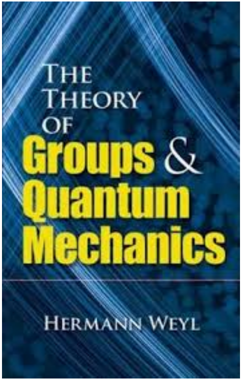
La simmetria in fisica

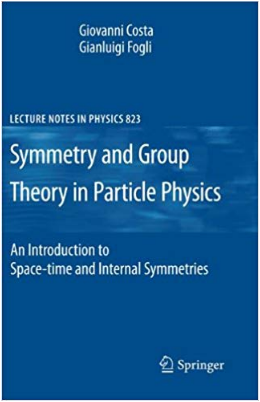


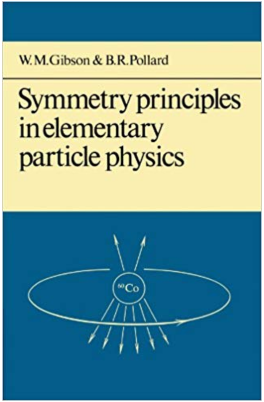




La simmetria in fisica







La simmetria in fisica

Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1].

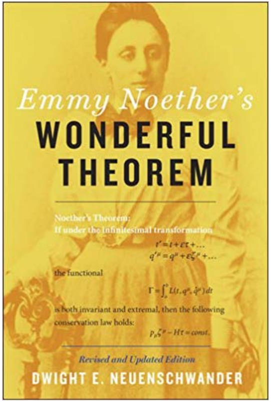
Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]. Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgültige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

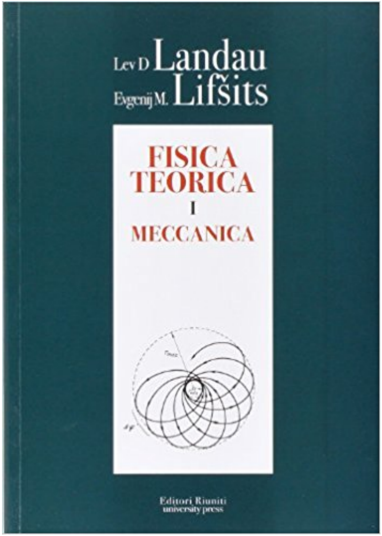
2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1918. Heft 2. 17



La simmetria in fisica



- omogenità tempo $\longrightarrow \dot{E} = 0$
- omogeneità spazio $\longrightarrow \dot{\vec{p}} = 0$
- isotropia spazio $\longrightarrow \dot{\vec{L}} = 0$

La simmetria nell'arte

La simmetria nell'arte

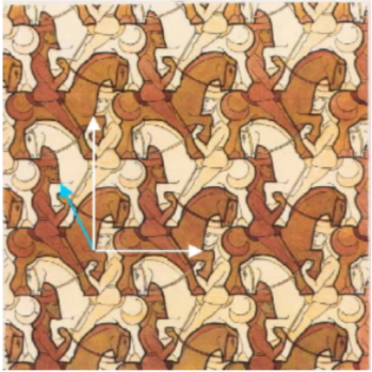
La simmetria nell'arte

La simmetria nell'arte

Alhambra

La simmetria nell'arte

Escher



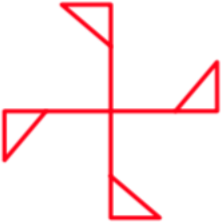
La simmetria ...

Tantissimi altri esempi li troviamo: nello sport (danza, nuoto), anatomia, araldica, segnaletica, linguistica, nei giochi, nella simbologia, nella natura stessa ...

Adesso ...

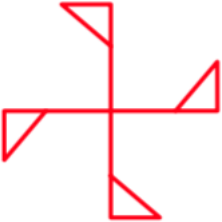
studio della simmetria da un punto di vista matematico/elementare

Esempio 4



Gruppo di Simmetria C_4

Esempio 4



Gruppo di Simmetria C_4

Esempio 5

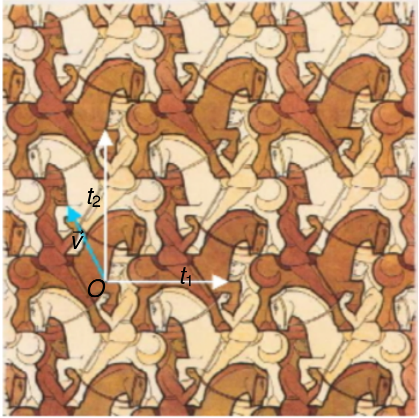
Gruppo di Simmetria D_4

Esempio 5

Gruppo di Simmetria D_4

Esempio 6

Qual è il gruppo di simmetria della seguente "pavimentazione", *Gli uomini a cavallo*?



t_1 = traslazione orizzontale, t_2 = traslazione verticale Il reticolo di traslazione è $T = \{nt_1 + mt_2 : \ n, m\mathbb{Z}\}$ Sia r_{t_2} la riflessione mediante la retta generata da t_2 (essa non è una simmetria dello schema), tutta via la glisso–riflessione

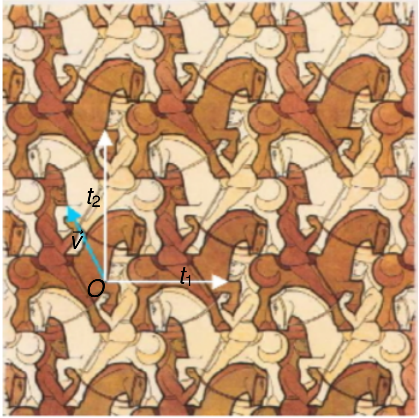
$$g = \tau_{\vec{v}} \circ r$$

lo è.
Si notino i seguenti fatti:

- $g^2 = \tau_{t_2}$
- the vertical component of $\vec{v}$ is $\frac{1}{2}t_2$

Esempio 6

Qual è il gruppo di simmetria della seguente "pavimentazione", *Gli uomini a cavallo*?



t_1 = traslazione orizzontale, t_2 = traslazione verticale Il reticolo di traslazione è $T = \{nt_1 + mt_2 : \ n, m\mathbb{Z}\}$ Sia r_{t_2} la riflessione mediante la retta generata da t_2 (essa non è una simmetria dello schema), tutta via la glisso–riflessione

$$g = \tau_{\vec{v}} \circ r$$

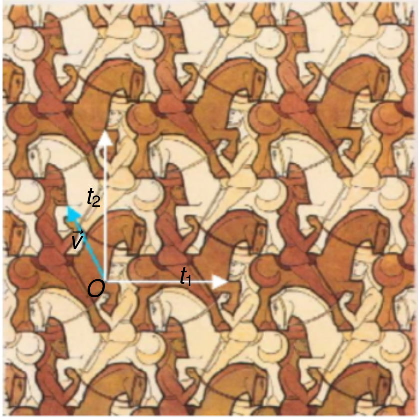
lo è.

Si notino i seguenti fatti:

- $g^2 = \tau_{t_2}$
- the vertical component of $\vec{v}$ is $\frac{1}{2}t_2$

Esempio 6

Qual è il gruppo di simmetria della seguente “pavimentazione”, *Gli uomini a cavallo*?



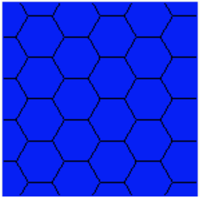
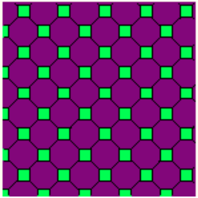
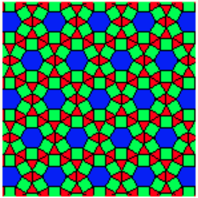
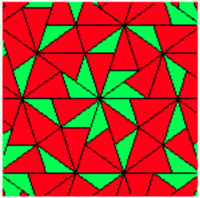
t_1 = traslazione orizzontale, t_2 = traslazione verticale Il reticolo di traslazione è $T = \{nt_1 + mt_2 : \ n, m\mathbb{Z}\}$ Sia r_{t_2} la riflessione mediante la retta generata da t_2 (essa non è una simmetria dello schema), tutta via la glisso–riflessione

$$g = \tau_{\vec{v}} \circ r$$

lo è.
Si notino i seguenti fatti:

- $g^2 = \tau_{t_2}$
- the vertical component of $\vec{v}$ is $\frac{1}{2} t_2$

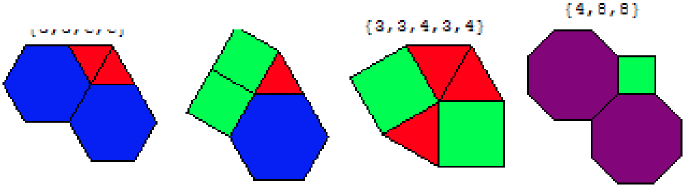
Tassellazioni

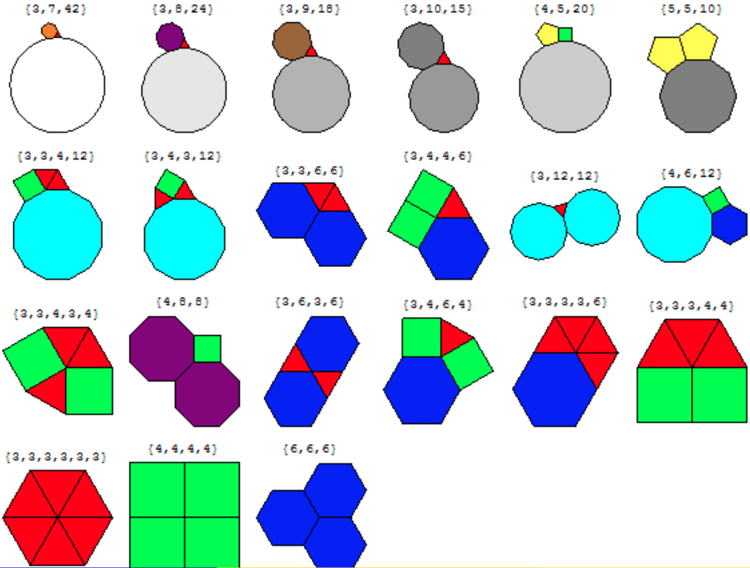
Regole di pavimentazione locale

- Regola del produttore. Le tessera della pavimentazione sono poligoni di lato 1.

- Regola del costruttore. Le tessere non si sovrappongono e i lati sono coincidenti



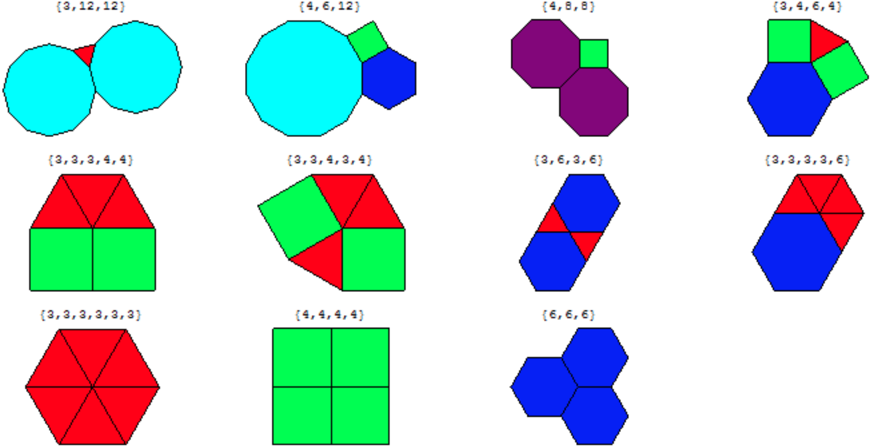
Tassellazioni locali



Tassellazioni

Se aggiungiamo la regola che

- Tramite “iterazione” la tassellazione locale permette di ricoprire il piano, solo 11 delle 21 tassellazioni locali sono ammissibili!!!



Utility

Definizione.

Un reticolo in $\mathbb{R}^2$ è un sottogruppo della forma

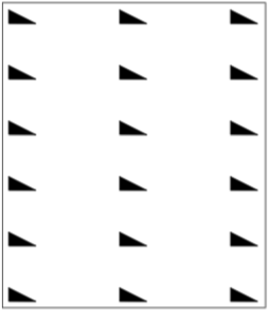
$$\{n\,b_1 + m\,b_2 :\ n, m \in \mathbb{Z}\}$$

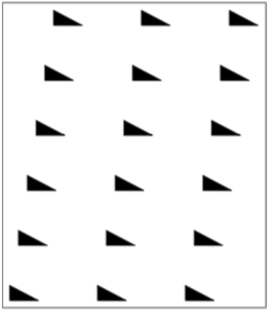
per qualche base $\{b_1, b_2\}$ di $\mathbb{R}^2$.

Gruppo dei mosaici

Esistono 17 modi di disporre oggetti nel piano in modo periodico, cioè 17 gruppi di simmetrie del piano, ossia 17 diversi (a meno di isomorfismi) gruppi dei mosaici.

Gruppo dei mosaici: esempi





Questi due schemi hanno gruppi di simmetria isomorfi, consistenti di sole traslazioni, quindi identificabili con $\mathbb{Z}^2$

Gruppo dei mosaici: esempi

Ancora un esempio di tassellazioni locali con gruppi di simmetria isomorfi

In entrambi le immagini il gruppo dei mosaici è generato da una traslazione e una rotazione di π.

Gruppo dei mosaici: esempi

Il gruppo di simmetria della seguente tassellazione è generato da due traslazioni t_1 e t_2 e da una rotazione di $\frac{\pi}{2}$.

Gruppo dei mosaici: reticoli indipendenti

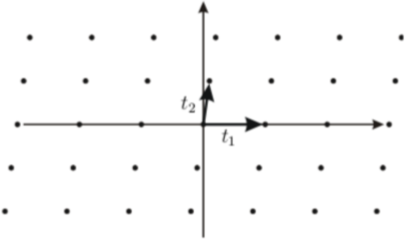
Io gruppo dei mosaici ha una struttura molto interessante è un prodotto semi–diretto tra un reticolo e un "gruppo puntuale" isomorfo a C_n oppure a D_n, per $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

Ora investighiamo la struttura reticolare del gruppo dei mosaici

Gruppo dei mosaici: reticoli indipendenti

Reticoli rettangolari: $G_0 = C_1$ oppure $G_0 = C_2$

$$C_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad C_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$



Parallelogram Lattice

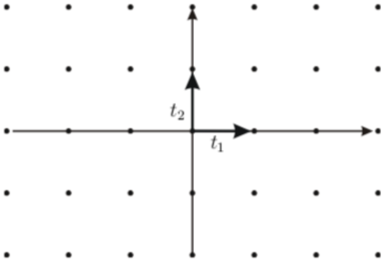
Gruppo dei mosaici: reticoli indipendenti

Reticoli quadrati: $G_0 = C_4$ oppure $G_0 = D_4$

$$C_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$D_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

in cui la riflessione che genera D_4 è rispetto alla retta generata da t_1.



Square Lattice

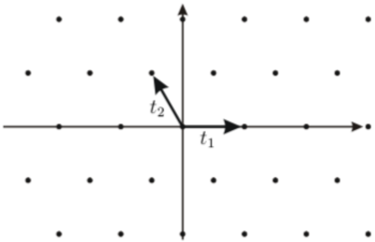
Gruppo dei mosaici: reticoli indipendenti

Reticoli esagonali: $G_0 = C_3,\ C_6,\ D_3,\ D_6$

$$C_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad C_6 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$D_6 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

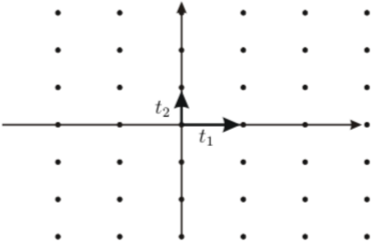
La struttura di D_3 è più complessa: dipende dalla rotazione dei vettori di base.



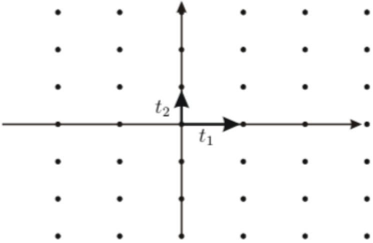
Hexagon Lattice

Gruppo dei mosaici: reticoli indipendenti

Reticoli rettangolari o romnici: $G_0 = D_1$ oppure $G_0 = D_2$



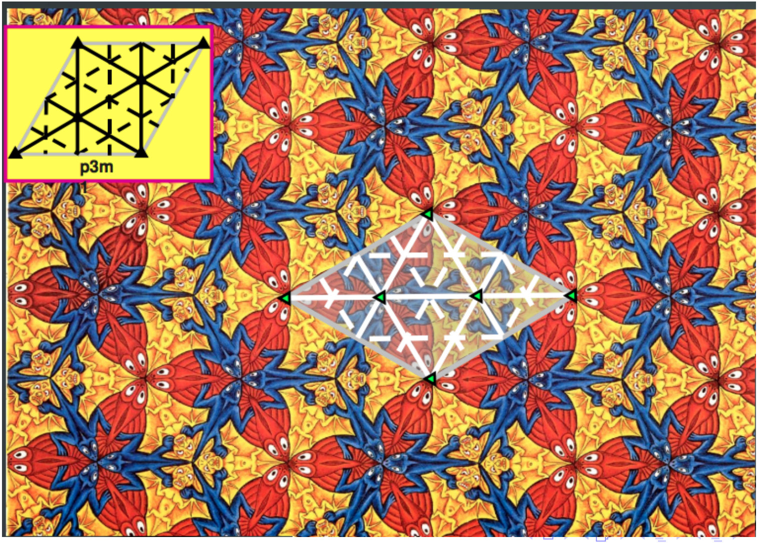
Rectangular Lattice



Rectangular Lattice

Gruppo dei mosaici: reticoli indipendenti

Qual è il reticolo di traslazione della seguente tassellazione locale?



Grazie per la vostra attenzione !!!