

# **Piano Nazionale Lauree Scientifiche**

Liceo Fracastoro - Verona

ITIS Marconi - Verona

Liceo Messedaglia - Verona

Università degli Studi di Verona



## **Superfici minime e lamine di sapone**

Diario ed appunti di  
**Sisto Baldo**

# Indice

<b>Credits e ringraziamenti</b>	<b>3</b>
<b>1 Riunione preliminare di progettazione del 3/1/2013 (2 ore)</b>	<b>4</b>
<i>Incontro preliminare “natalizio” dei docenti interessati, dedicato alla progettazione del laboratorio.</i>	
<b>2 Riunione preliminare di progettazione del 18/1/2013 (2 ore)</b>	<b>4</b>
<i>Prova sul campo degli esperimenti di proporre nel laboratorio. Discussione sulla scansione temporale degli argomenti.</i>	
<b>3 Presentazione del laboratorio agli studenti del Marconi, 7/2/2013 (1 ora)</b>	<b>4</b>
<i>Presentazione del laboratorio presso l’ITIS Marconi.</i>	
<b>4 Primo incontro. Liceo Messedaglia, 18/2/2013 (3 ore)</b>	<b>5</b>
<i>Incontro interamente dedicato ad esperienze “sul campo” con i film di sapone. Il problema di Plateau. Le reti minime. Il problema isoperimetrico nel piano e nello spazio.</i>	
<b>5 Secondo incontro. ITIS Marconi, 28/2/2013 (3 ore)</b>	<b>10</b>
<i>Il concetto di curvatura: curve regolari piane, cerchio osculatore, curvatura.</i>	
<b>6 Terzo incontro. ITIS Marconi, 7/3/2013 (3 ore)</b>	<b>15</b>
<i>Il problema isoperimetrico nel piano: tra le regioni del piano di perimetro assegnato, trovare quella di area massima.</i>	
<b>7 Quarto incontro. ITIS Marconi, 11/3/2013 (3 ore)</b>	<b>22</b>
<i>Superfici regolari: piano tangente, piani normali, sezioni normali, curvature normali. Curvature principali e curvatura media. Qualche esperimento con Surface Evolver.</i>	
<b>8 Quinto incontro. ITIS Marconi, 18/3/2013 (3 ore)</b>	<b>29</b>
<i>Come si arriva alla condizione sulla curvatura media: equazione di Eulero-Lagrange di una superficie minima. Cosa è stato fatto... e cosa c’è ancora da scoprire sulle superfici minime.</i>	
<b>Appendice: l’equazione delle superfici minime per i grafici</b>	<b>35</b>
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>37</b>

## Credits e ringraziamenti

*Ringrazio per prima cosa i colleghi Alberto Burato, Tano Cavattoni, e Fabrizio Giugni che hanno condiviso con me questo progetto... e gli studenti del Fracastoro, del Marconi e del Messedaglia che hanno partecipato con coraggio e tenacia ad un percorso costellato di difficoltà matematiche!*

*Quel (poco) che ho imparato sulla realizzazione di contorni metallici per fare le lamine saponate, lo devo a Italo Tamanini (Università di Trento) e a Frank Morgan (Williams College). Sia Frank che Italo svolgono da anni - assieme ad una ricerca scientifica di prim'ordine - un'intensa attività di divulgazione sulle superfici minime. Potete vedere alcune delle brillanti performance di Frank su Youtube, mentre Italo ha girato buona parte della penisola con la sua mostra "Matematica trasparente: superfici minime e bolle di sapone" (<http://bolle.science.unitn.it/>).*

*Anche l'idea per la realizzazione delle reti di lunghezza minima con i film di sapone, è presa spudoratamente a prestito da un laboratorio PLS realizzato da Italo Tamanini e Mimmo Luminati, cui mi sono ispirato in parte anche per la discussione del problema isoperimetrico per i poligoni<sup>1</sup>.*

*Ed è alla memoria di Mimmo Luminati che dedico queste note, con grande nostalgia per le moltissime ore passate a discutere - tra l'altro - di divulgazione della matematica.*

---

<sup>1</sup>Si vedano [LT09], [CR00] e il sito <http://matematita.science.unitn.it/materiali/maxmin.html>

## **1 Riunione preliminare di progettazione del 3/1/2013 (2 ore)**

*In questo incontro preliminare ho incontrato Fabrizio Giugni, Alberto Burato e Tano Cavattoni per discutere dei temi su cui verterà il laboratorio, nonché delle modalità più efficaci (speriamo...) per presentarli.*

## **2 Riunione preliminare di progettazione del 18/1/2013 (2 ore)**

*In questo incontro, abbiamo testato vari contorni metallici per produrre film di sapone, nonché telaietti per realizzare reti di lunghezza minima.*

*Abbiamo anche discusso in dettaglio del contenuto dei singoli incontri del laboratorio e studiato un possibile calendario.*

## **3 Presentazione del laboratorio agli studenti del Marconi, 7/2/2013 (1 ora)**

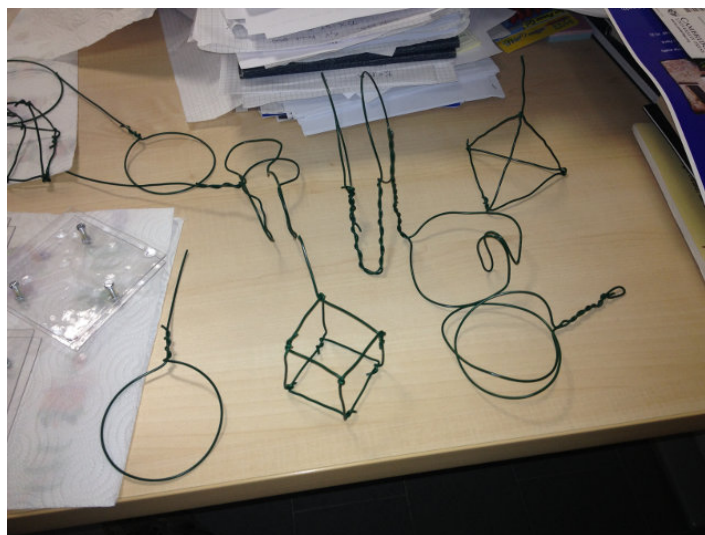
*In questo incontro, gli studenti degli ultimi anni del Marconi si sono riuniti in Aula Magna per ascoltare una mia presentazione del laboratorio. Ho cercato di convincerli, mediante esperimenti con i film di sapone, di quanto siano belle le superfici minime: lo scopo finale - per niente occulto - era di convincere gli studenti più interessati ad iscriversi al laboratorio!*

## 4 Primo incontro. Liceo Messedaglia, 18/2/2013 (3 ore)

Il primo incontro del laboratorio vero e proprio si è svolto presso la sede del Messedaglia, dove si sono dati appuntamento i partecipanti provenienti dai tre Istituti coinvolti. Tutte e tre le classi del triennio erano rappresentate, con una maggioranza di studenti dell'ultimo anno.

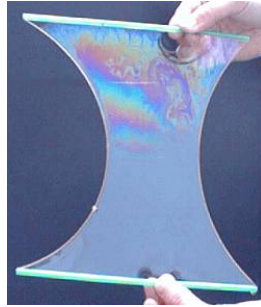
Muniti di bacinelle colme di acqua saponata, contorni di fil di ferro e di telaie in plexiglass per realizzare le reti minime, abbiamo sperimentato... ed ammirato le forme bellissime che si ottengono con le lamine di sapone.

Alcuni dei partecipanti, armati di fil di ferro e pinze, si sono divertiti a realizzare contorni metallici diversi da quelli già confezionati in precedenza dagli insegnanti. A proposito di contorni metallici, mi sento in obbligo di precisare che quelli realizzati da Tano Cavattoni erano molto più belli dei miei!

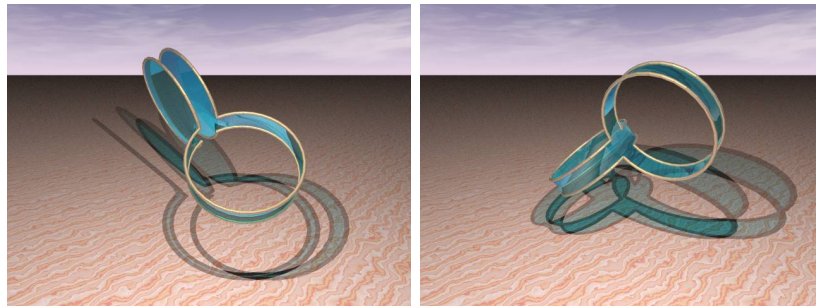


Come sintesi finale, abbiamo cercato di raccogliere qualche idea su quel che abbiamo avuto modo di osservare:

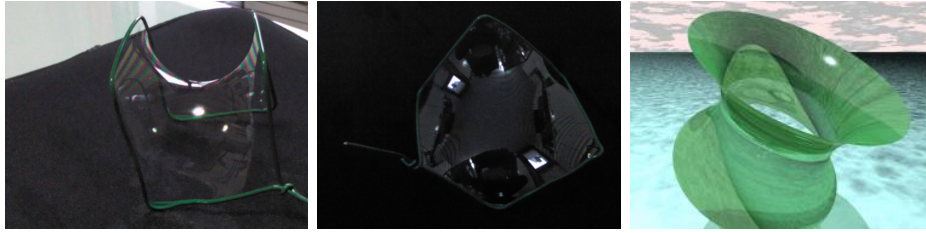
- Le lamine di sapone, a causa della tensione superficiale, cercano di *minimizzare l'area*: precisamente, hanno *area minima* tra tutte le superfici che hanno come bordo il contorno metallico che abbiamo scelto. Le superfici minime risolvono quindi il problema di ottimizzazione noto come *problema di Plateau*.



- Anche le *bolle di sapone* risolvono un problema di minimo dell'area: la sfera è infatti la superficie chiusa di area minima tra tutte quelle che racchiudono un volume fissato (proprietà isoperimetrica della sfera).
- Questa proprietà di minimalità è da intendersi in senso relativo: non sempre le lamine saponate riescono a realizzare il *minimo assoluto dell'area*. In particolare, per alcuni contorni speciali abbiamo visto che ripetendo più volte l'esperimento si possono ottenere un certo numero di lamine saponate diverse tra loro (e non necessariamente della stessa area), ciascuna delle quali minimizza l'area “tra tutte le superfici abbastanza vicine”.



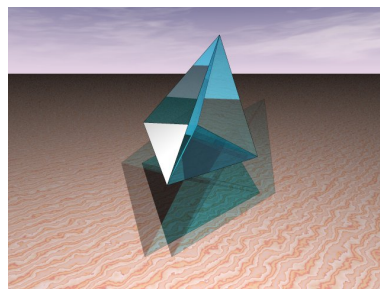
- Tutte le lamine saponate che abbiamo ottenuto hanno in comune un'interessante proprietà geometrica: quando non sono piane, hanno un aspetto *a sella*. Questo significa che per ogni punto della superficie possiamo trovare due curve ortogonali che passano per il punto dato, giacciono sulla superficie e sono *incurvate in senso opposto*! Come vedremo in seguito, questo fatto può essere precisato meglio (in modo più quantitativo) e si può esprimere dicendo che le superfici di area minima hanno *curvatura media nulla* in ogni punto.



- Le lamine di sapone non sono necessariamente orientabili: scegliendo opportuni contorni metallici (curve chiuse nello spazio), è facile ottenere come superficie minima un *nastro di Moebius*, che è una superficie ad una sola faccia.

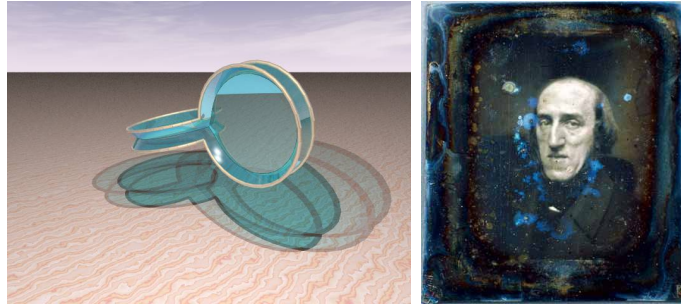


- Immergendo nell'acqua saponata lo scheletro di un tetraedro regolare, si ottiene un sistema di lamine di sapone costituito da facce triangolari, che si incontrano tre a tre formando angoli uguali di  $120^\circ$ . I 4 segmenti in cui le facce triangolari si incontrano vanno ulteriormente a convergere nel baricentro del tetraedro, formando angoli uguali tra loro che misurano circa  $109^\circ$ .



- Quel che avviene nel tetraedro è il paradigma di un fatto del tutto generale: in un sistema di lamine saponate, queste si possono incontrare (lungo un sistema di curve) *solo tre a tre, formando angoli di  $120^\circ$* . Queste curve possono ulteriormente incontrarsi *solo quattro a quattro, formando angoli di  $109^\circ$  come nel tetraedro*. Queste due proprietà sono

note come *leggi di Plateau*, perché sono state scoperte sperimentalmente dal fisico belga Plateau alla fine del XIX sec. Sono state dimostrate in modo rigoroso da Jean Taylor solo nel 1973.



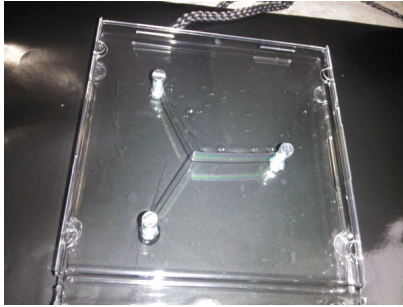
In figura abbiamo un sistema di lamine di sapone che illustra le leggi di Plateau e un daguerrotypo di Joseph Plateau (1801-1883).

- Con le lamine saponate si ottiene una spettacolare verifica sperimentale della proprietà isoperimetrica del cerchio: tra tutte le regioni di piano di perimetro assegnato, il cerchio è quella di area massima (problema di Didone, si veda l'Eneide di Virgilio, Libro I, 367-368).



- Realizzando opportuni telaietti di plexiglass, le lamine saponate sanno anche trovare la *rete di lunghezza minima* che connette un sistema finito di punti del piano. Abbiamo verificato sperimentalmente che in una rete minima i lati si possono incontrare solo due a due o tre a tre e che in ogni caso non si possono ottenere angoli più piccoli di  $120^\circ$  (in particolare, quando i lati che si incontrano sono 3, gli angoli sono di  $120^\circ$ ). Con considerazioni fisiche, abbiamo anche capito perché questa regola è valida *nel caso in cui i nodi siano 3*, cioè per una rete che connette i vertici di un triangolo.





## 5 Secondo incontro. ITIS Marconi, 28/2/2013 (3 ore)

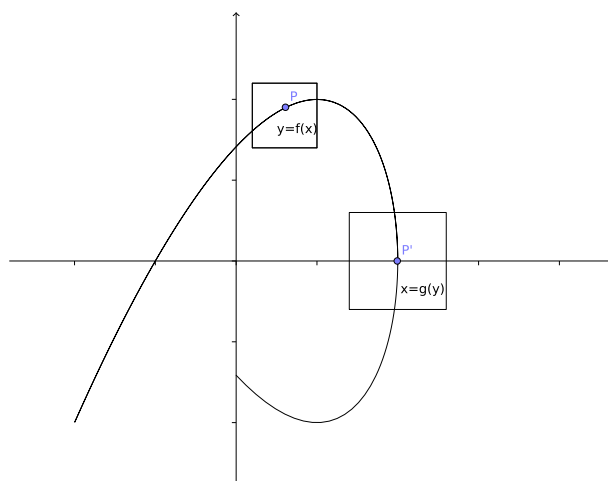
Nel nostro primo incontro, di carattere sperimentale, abbiamo avuto modo di osservare che i film di sapone hanno delle notevoli proprietà geometriche, che si evidenziano guardando alle *curvature* di queste superfici.

Più precisamente, abbiamo anticipato che le superfici minime sono caratterizzate dal fatto che *la loro curvatura media è 0 in tutti i punti*.

Per capire questo enunciato...è ovviamente indispensabile capire che cos'è la curvatura media! Approfittiamo dell'occasione anche per rivedere in modo un po' sistematico le nostre nozioni di *curva* e *superficie*, che sono entrambe strettamente legate a questo concetto.

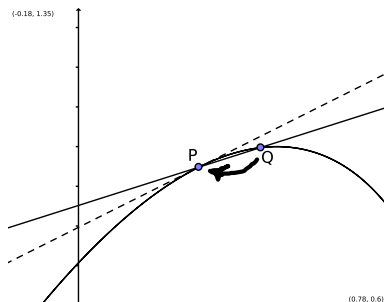
Innanzitutto, un po' di brainstorming ci ha portato a convenire che un *buon esempio* di curva piana è il grafico di una funzione sufficientemente regolare. Abbiamo dato perciò la seguente definizione:

- Una curva regolare è un sottinsieme  $C$  del piano cartesiano che coincide localmente con il grafico di una funzione regolare. Precisamente,  $C$  è una curva se per ogni punto  $(x_0, y_0) \in C$  esiste un rettangolino, centrato in  $(x_0, y_0)$ , entro il quale  $C$  coincide con il grafico di una certa funzione  $y = f(x)$  oppure  $x = f(y)$ . La curva  $C$  si dice regolare se è dotata di retta tangente in ogni punto, e se queste rette tangenti variano con continuità spostandosi lungo  $C$ .



Facciamo un paio di commenti sulla definizione: abbiamo visto come definire la retta tangente in un punto  $P \in C$ : consideriamo un secondo punto  $Q \in C$ ,

molto vicino a  $P$ , e osserviamo la retta per  $P$  e  $Q$ . Se la curva è “sufficientemente liscia”, quando  $Q$  si avvicina a  $P$  questa retta tende ad una posizione limite, che chiameremo retta tangente.

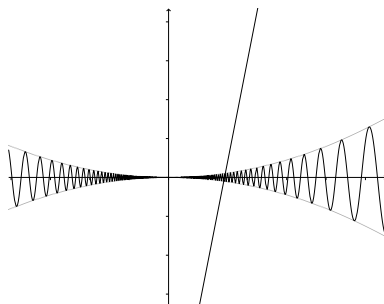


Per inciso (per chi conosce le derivate), la retta tangente in un punto si trova calcolando la derivata della funzione  $f$  che rappresenta localmente la curva attorno a quel punto... e possiamo dire che le rette tangenti variano con continuità se la derivata è una funzione continua.

Abbiamo anche visto che l'esistenza della retta tangente in tutti i punti, da sola, non garantisce che questa vari con continuità: ci siamo divertiti a disegnare con GeoGebra la curva

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

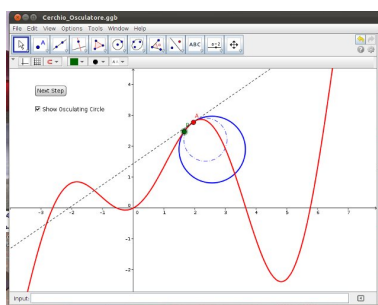
Questa curva è dotata di retta tangente in ogni suo punto, ma le rette tangenti oscillano malamente quando il punto di tangenza si avvicina all'origine!



Ma torniamo ora al concetto di curvatura: data una curva, vorremo avere delle informazioni quantitative su quanto essa sia “incurvata” attorno ad un punto...

La chiave sta nel concetto di *cerchio osculatore* e di *raggio di curvatura*: può darsi che molti di noi abbiano già sentito l'ultima espressione studiando per la patente di guida!

Il *cerchio osculatore* (dal latino *osculum*=bacio) costituisce di fatto un raffinamento del concetto di retta tangente. Per definirlo, consideriamo un punto  $A$  sulla curva e la retta  $t$  tangente alla stessa in  $A$ . Consideriamo poi un punto della curva  $B$  vicino ad  $A$ : c'è un'unica circonferenza che passa per  $A$  e per  $B$  ed è tangente alla retta  $t$ . Quando  $B$  si avvicina ad  $A$ , questa circonferenza fornirà un'approssimazione sempre migliore dell'andamento della curva vicino ad  $A$ : la sua posizione limite si chiama, appunto *circonferenza osculatrice* ed il suo raggio *raggio di curvatura*. La *curvatura* è, per definizione, il reciproco del raggio di curvatura. Possiamo visualizzare questa definizione con un'animazione GeoGebra:



(cliccare sulla figura per vedere un filmato, oppure scaricare il foglio di lavoro GeoGebra [http://profs.sci.univr.it/~baldo/PLS/Superfici\\_minime/Cerchio\\_Osculatore.ggb](http://profs.sci.univr.it/~baldo/PLS/Superfici_minime/Cerchio_Osculatore.ggb))

Se conoscete un po' di derivate, potete divertirvi a trovare il cerchio osculatore ad una curva  $y = f(x)$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ . Troverete che, se  $f$  è derivabile due volte (altrimenti il cerchio osculatore non è definito) la curvatura è data da

$$k = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + (f'(x_0))^2)^{3/2}}.$$

Per avere ancora più informazioni sulla curva, spesso si attribuisce un segno alla curvatura: stabilito un verso di percorrenza, la curvatura è positiva per curve "a sinistra", negativa per curve "a destra". Per avere il segno corretto nella formula sopra, è sufficiente togliere il modulo a numeratore!

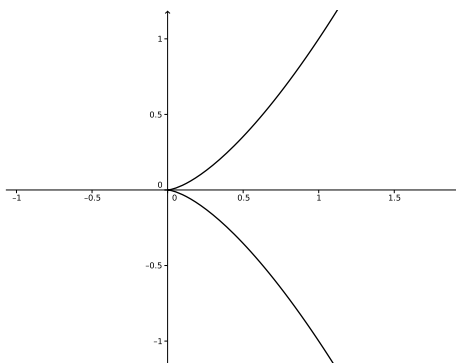
Per concludere l'incontro, abbiamo osservato che esiste *un modo alternativo*, molto utile ed efficace, di definire una curva piana: possiamo pensare alla nostra curva, anziché come ad un sottinsieme del piano, come alla *traiettoria seguita da un punto materiale che si muova nel piano*. In funzione del tempo  $t$ , le coordinate del nostro punto saranno descritte da una coppia di funzioni:  $P(t) = (x(t), y(t))$ .

Ovviamente, questa descrizione consente non solo di individuare l'oggetto geometrico (curva come sottinsieme del piano), ma ci dice anche in detta-

glio *come* la traiettoria viene percorsa: qual è il verso di percorrenza, la velocità. . .

Ci siamo chiesti per prima cosa quali condizioni sulle funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  ci assicurano che la nostra traiettoria sia una curva regolare.

Abbiamo visto, forse con un po' di sorpresa, che *non è sufficiente* che i grafici delle due funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  siano regolari: per esempio, la traiettoria  $P(t) = (t^2, t^3)$  non è regolare per  $t = 0$ .



La ragione di questo è che al tempo  $t = 0$  il vettore velocità della nostra traiettoria si annulla: è proprio l'annullarsi di questo vettore che consente alla traiettoria di “creare una cuspide”! Per avere una curva regolare, occorre non solo che le due funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  siano regolari, ma anche che la velocità non si annulli mai<sup>2</sup>.

Come già osservato, variando la velocità esistono infiniti modi di percorrere una fissata traiettoria: tra tutti questi, è particolarmente interessante quello che si ottiene muovendosi lungo la curva che abbiamo scelto *con velocità di modulo costante uguale a 1*. In questo caso, il tempo  $t$  è esattamente uguale alla lunghezza del tratto di curva che è stato percorso dal tempo iniziale  $t = 0$ . Inoltre, il vettore velocità è un versore (cioè un versore di lunghezza 1) tangente alla curva, con la “punta” diretta nel verso di percorrenza.

Con questa particolare scelta della legge di percorrenza, anche il *vettore accelerazione* ha un significato geometrico importantissimo: esso è infatti ortogonale al vettore velocità<sup>3</sup>. Il suo *modulo* è poi la *curvatura* della traiettoria: per convincervene, non avete che da ripassare quel che avete imparato sull'accelerazione centripeta in un moto circolare uniforme.

Alla fine di questo incontro di laboratorio, abbiamo lavorato un po' con GeoGebra a tracciare curve piane descritte come traiettorie! Un esempio di

---

<sup>2</sup>Cioè le due funzioni devono essere derivabili con derivata continua, e le loro derivate non devono annullarsi mai contemporaneamente.

<sup>3</sup>La variazione di velocità è ortogonale al moto proprio perché il modulo della velocità non cambia.

foglio di lavoro è scaricabile da questo link: [http://profs.sci.univr.it/~baldo/PLS/Superfici\\_minime/Esempi\\_curve.ggb](http://profs.sci.univr.it/~baldo/PLS/Superfici_minime/Esempi_curve.ggb).

## 6 Terzo incontro. ITIS Marconi, 7/3/2013 (3 ore)

In questo incontro ci siamo trovati a ranghi leggermente ridotti, a causa di impegni concomitanti di alcuni partecipanti. . .

Per questo motivo, abbiamo deciso di interrompere momentaneamente il nostro discorso generale sulle curvatures di curve e superfici - che verrà ripreso nel quarto incontro - per dedicarci invece, con metodi elementari, al problema isoperimetrico piano: si tratta infatti di un argomento autocontenuto, che riusciremo ad esaurire nel corso del pomeriggio.

Vogliamo risolvere il *problema di Didone*:

- *Tra tutte le regioni di piano delimitate da una curva chiusa di lunghezza assegnata  $\ell$ , trovare quella di area massima.*

Nel primo incontro, le lamine saponate ci hanno suggerito la soluzione di questo problema: la superficie di area massima è il cerchio avente circonferenza di lunghezza  $\ell$ ! Vogliamo però cercare di dimostrare questo fatto con un briciolo di rigore matematico.

Prima di cominciare, osserviamo che se sappiamo risolvere il problema di Didone sappiamo risolvere anche il seguente *problema duale*:

- *Tra tutte le regioni di piano, delimitate da una curva chiusa, di area assegnata  $A$ , trovare quella di perimetro minimo.*

Si osservi infatti cosa succede ad un sottinsieme del piano se lo trasformiamo con un'omotetia di rapporto  $r$ : il perimetro viene moltiplicato per  $r$ , l'area per  $r^2$ . Supponiamo ora di avere trovato la soluzione del problema di Didone, cioè una regione  $D$  di area massima  $A$  tra tutte quelle con lo stesso perimetro  $\ell$ . Dico che la regione  $D$  è anche quella di perimetro minimo tra tutte quelle di area  $A$ : se così non fosse, ci sarebbe una regione  $D'$  di area  $A$  e perimetro  $\ell'$  *strettamente più piccolo*. Potremmo trasformarla con un'omotetia di rapporto  $\ell/\ell' > 1$ , ottenendo una regione  $D''$  di perimetro  $\ell$  ed area  $A \left(\frac{\ell}{\ell'}\right)^2 > A$ : questo è assurdo perché  $A$  era il massimo dell'area tra tutte le regioni di perimetro  $\ell$ .

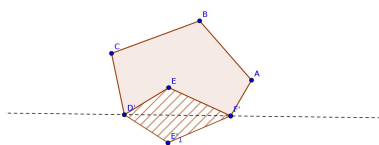
Con un ragionamento del tutto analogo si dimostra che una soluzione del problema duale è anche una soluzione del problema di Didone.

Si noti anche che le bolle di sapone risolvono la versione tridimensionale del problema duale: la sfera ha area minima tra tutte le superfici chiuse che racchiudono un volume assegnato!

Per risolvere il problema isoperimetrico, cominciamo a chiederci qual è, tra tutti i *poligoni di  $n$  lati e fissato perimetro  $\ell$* , quello di area massima<sup>4</sup>.

Procediamo per passi:

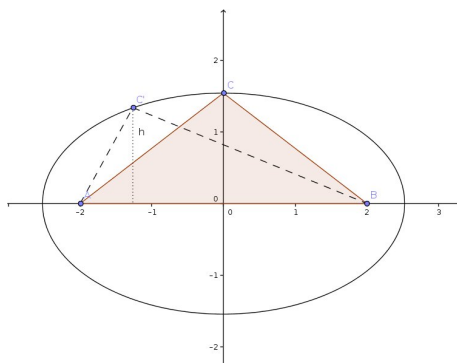
1. Il *poligono di  $n$  lati di area massima tra quelli di perimetro  $\ell$*  è *convesso*. Se ci fosse un “angolo interno”, potremmo infatti rifletterlo verso l'esterno ottenendo una figura con lo stesso perimetro ed area maggiore!



2. Il poligono di area massima deve *avere tutti i lati uguali*, ossia essere *equilatero*. Per farlo vedere, dimostriamo per prima cosa il seguente

*LEMMA: Tra tutti i triangoli  $ABC$  in cui sia fissato il lato  $\overline{AB}$  e la somma dei due lati rimanenti  $\overline{BC} + \overline{CA}$ , quello di area massima è il triangolo isoscele (con  $\overline{BC} = \overline{CA}$ ).*

*DIM.:* Con il vincolo dato, il vertice  $C$  è libero di variare su un'ellisse di fuochi  $A$  e  $B$ . Essendo la base  $AB$  fissata, l'area sarà massima quando è massima l'altezza relativa ad  $AB$ , ossia quando questa coincide con il semiasse minore dell'ellisse. In queste condizioni otteniamo il triangolo isoscele.

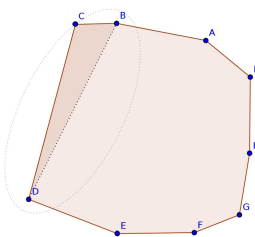



---

<sup>4</sup>Daremo per scontato che il poligono di area massima ci sia: questo andrebbe ovviamente dimostrato. Si può farlo con un'opportuna versione multidimensionale del teorema di Weierstrass...



Consideriamo ora il poligono di  $n$  lati avente area massima tra tutti quelli con lo stesso perimetro: dimostriamo che *tutte le coppie di lati consecutivi* sono uguali (da questo segue subito che tutti i lati sono uguali!). Consideriamo ad esempio la coppia di lati  $BC$  e  $CD$  in figura: se spostiamo  $C$  tenendo fissa la somma  $\overline{BC} + \overline{CD}$  il perimetro del poligono non cambia. D'altra parte, grazie al lemma l'area del triangolo  $BCD$  - e quindi di tutto il poligono - è massima quando  $\overline{BC} = \overline{CD}$ .

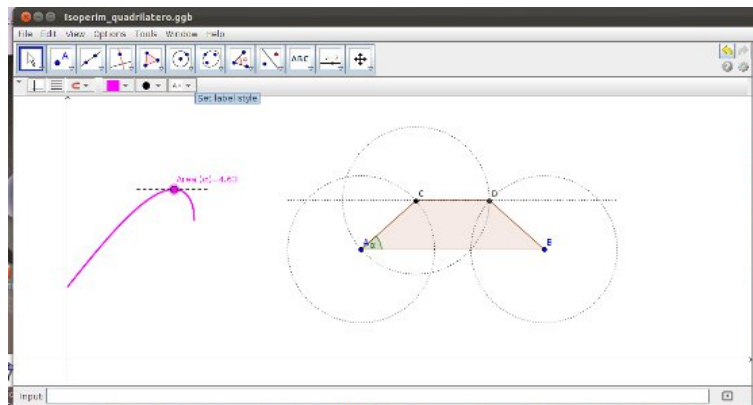


3. Il poligono di  $n$  lati di area massima ha *tutti gli angoli uguali*, ossia è *equiangolo*. Mettendo assieme questo fatto con il precedente, possiamo concludere che *tra tutti i poligoni di  $n$  lati aventi lo stesso perimetro, quello di area massima è l' $n$ -gono regolare*.

Anche per dimostrare questo fatto ci serve un lemma:

*LEMMA: Tra tutti i quadrilateri  $ABCD$  aventi  $\overline{AB} = a$  e  $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = b$  (con  $a < 3b$ ), quello di area massima è il trapezio isoscele.*

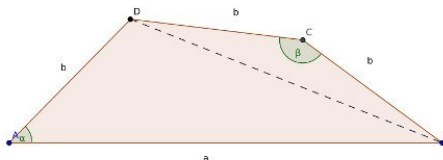
La dimostrazione di questo lemma non è proprio semplicissima, per cui premettiamo una animazione realizzata con GeoGebra (foglio di lavoro scaricabile da questo link: [http://profs.sci.univr.it/~baldo/PLS/Superfici\\_minime/Isoperim\\_quadilatero.ggb](http://profs.sci.univr.it/~baldo/PLS/Superfici_minime/Isoperim_quadilatero.ggb)) che illustra il risultato: se vi accontentate, potete anche omettere di leggere la dimostrazione!



(Cliccando sulla figura si può vedere un filmato)

*DIM. del Lemma:* Ringrazio Fabrizio Giugni per aver scovato in letteratura la seguente dimostrazione, magari non proprio immediata ma che usa soltanto fatti elementari[Kaz72].

Si considerino gli angoli opposti  $\hat{A} = \alpha$  e  $\hat{C} = \gamma$ : mostreremo che nel quadrilatero di area massima essi sono *supplementari*. Se ne deduce subito che tale quadrilatero è inscrittibile: tenuto conto dell'uguaglianza  $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ , si tratta necessariamente del trapezio isoscele.



Innanzitutto, l'area del quadrilatero è la somma delle aree dei triangoli  $ABD$  e  $BCD$ , ossia  $\mathcal{A} = \frac{ab}{2} \sin \alpha + \frac{b^2}{2} \sin \gamma$ , da cui

$$16\mathcal{A}^2 = 4a^2b^2 \sin^2 \alpha + 4b^4 \sin^2 \gamma + 8ab^3 \sin \alpha \sin \gamma.$$

D'altra parte,  $\overline{BD}^2$  può essere ricavato applicando il teorema di Carnot a ciascuno dei due triangoli  $ABD$  e  $BCD$ . Ne ricaviamo la seguente relazione tra i coseni di  $\alpha$  e  $\gamma$ :

$$b^2 + a^2 - 2ab \cos \alpha = 2b^2 - 2b^2 \cos \gamma.$$

Con semplici conti si ricava che

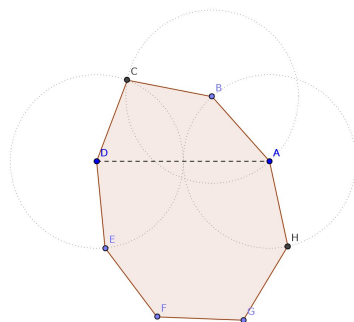
$$(a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 \cos^2 \alpha + 4b^4 \cos^2 \gamma - 8ab^3 \cos \alpha \cos \gamma.$$

Sommando membro a membro l'ultima relazione con quella che abbiamo ottenuto per  $16\mathcal{A}^2$  si ottiene

$$16\mathcal{A}^2 = 4a^2b^2 + 4b^4 - (a^2 - b^2)^2 - 8ab^3 \cos(\alpha + \gamma).$$

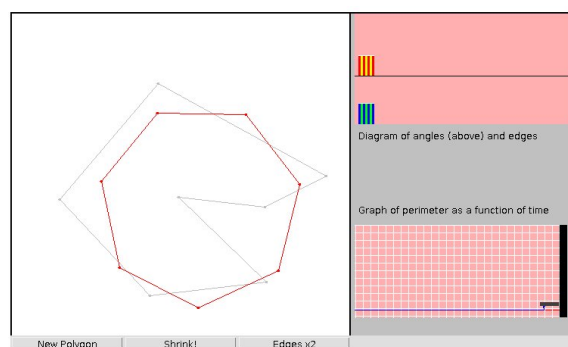
Quest'ultima quantità è massima quando  $\cos(\alpha + \gamma)$  è il più piccolo possibile, ossia quando  $\alpha + \gamma = \pi$ , che è quanto volevamo dimostrare.

Avendo a disposizione il lemma, dimostriamo finalmente che il poligono di area massima è equiangolo.



In figura è rappresentato un poligono equilatero: vogliamo dimostrare che affinché esso abbia area massima, due angoli consecutivi devono essere uguali. Infatti, deve essere ad esempio  $\hat{B} = \hat{C}$ : per dimostrarlo basta applicare il lemma al quadrilatero  $ABCD$ .

Per illustrare questa proprietà di massimalità dei poligoni regolari, abbiamo usato un'applet java (<http://profs.sci.univr.it/~baldo/divulgazione/evolvi/evolvi.html>) presente sul mio sito web:



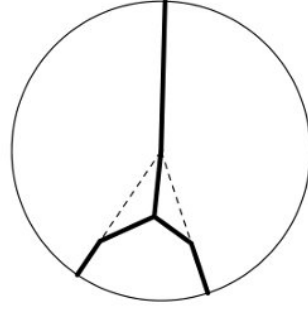
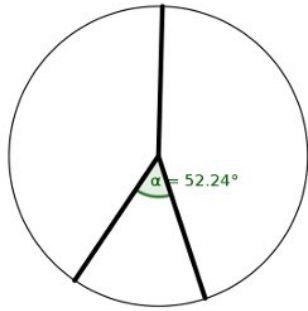
Ricapitoliamo quel che sappiamo fino ad ora: tra tutti i poligoni di  $n$  lati aventi lo stesso perimetro, l' $n$ -gono regolare ha area massima.

Cosa succede se facciamo crescere il numero  $n$  di lati, mantenendo fisso il perimetro? Si vede subito che l'area *cresce* (questo si può scoprire con un conticino esplicito, oppure osservando che possiamo considerare ogni poligono di  $n$  lati come un particolare poligono degenero di  $n + 1$  lati, due dei quali sono allineati: al crescere di  $n$ , stiamo cercando di massimizzare l'area su una famiglia sempre più grande di poligoni!). Quando  $n$  tende all'infinito, il poligono di area massima tende ad un cerchio con lo stesso perimetro. Poichè una curva regolare chiusa - e l'area da essa racchiusa - si approssimano con precisione arbitraria con dei poligoni, se ne deduce che *la soluzione del problema di Didone è il cerchio!*

Val la pena di precisare che esistono molte altre dimostrazioni di questo fatto, alcune delle quali sono a mio avviso più eleganti (anche se richiedono qualche prerequisito in più). . .

Abbiamo concluso l'incontro con qualche breve considerazione sul problema delle reti di lunghezza minima (che nel primo incontro avevamo realizzato con film di sapone). Precisamente, ci siamo convinti che le reti minime non possono contenere angoli minori di  $120^\circ$ .

In effetti, già nel primo incontro avevamo capito che questo è vero per la rete minima che congiunge i vertici di un triangolo (grazie ad un ragionamento fisico basato sull'equilibrio di tre forze uguali in modulo. . .). Più in generale, una rete che contiene un angolo strettamente minore di  $120^\circ$  *non può* essere minima proprio grazie a quanto visto nei triangoli: nella figura, la porzione di rete disegnata a sinistra contiene un angolo  $\alpha < 120^\circ$ . Essa non è minima perché è strettamente più lunga della rete di destra, in cui abbiamo sostituito due segmentini aggiungendo un "incrocio" con angoli di  $120^\circ$ .



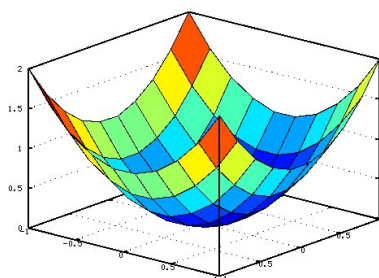
## 7 Quarto incontro. ITIS Marconi, 11/3/2013 (3 ore)

In questa seduta vogliamo riprendere gli argomenti trattati nel secondo incontro: oggi il nostro scopo sarà di arrivare ad una corretta interpretazione della frase arcana

*“Le superfici minime sono caratterizzate dalla proprietà che la loro curvatura media è 0 in tutti i punti”*

Cominciamo con il concetto di *superficie*: analogamente a quel che abbiamo detto per le curve, è naturale definire una superficie come un sottinsieme di  $\mathbf{R}^3$  che può essere *descritto localmente dal grafico di una funzione di 2 variabili*.

Infatti, se  $f(x, y)$  è una funzione di due variabili abbastanza regolare, il suo grafico, ossia l'insieme descritto dall'equazione  $z = f(x, y)$  è una bella superficie. Per favorire l'intuizione geometrica, potremmo pensare a  $(x, y)$  come alle due coordinate che individuano la posizione di un luogo su una mappa topografica, e a  $f(x, y)$  come l'altitudine sul livello del mare: l'equazione  $z = f(x, y)$  rappresenta allora un bel *plastico* del nostro territorio.



view: 65,0000, 40,0000 scale: 1,00000, 1,00000

Più in generale, diremo che  $S \subset \mathbf{R}^3$  è una *superficie regolare* se vale il fatto seguente: per ogni punto  $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$  possiamo trovare un cubo  $\mathcal{Q}$  centrato in  $P$  tale che  $S \cap \mathcal{Q}$  sia descrivibile come il *grafico di una funzione regolare di due variabili* (ovvero, sia di uno dei tre tipi seguenti:  $z = f(x, y)$ ,  $x = f(y, z)$ ,  $y = f(x, z)$ , con una scelta opportuna della funzione  $f$ ).

A sua volta, una funzione di due variabili  $f(x, y)$  si dice *regolare* se succede la cosa seguente: per ogni fissato  $y_0$ , il grafico della funzione di una variabile  $x \mapsto f(x, y_0)$  è dotato di retta tangente in ogni punto, e questa retta tangente cambia in modo continuo al variare sia del punto di tangenza  $x_0$ , che di  $y_0$ . La stessa cosa deve valere, per ogni fissato  $x_0$ , per la funzione di una variabile  $y \mapsto f(x_0, y)$ . . . Questo significa che se *restringiamo  $f$  ad una qualunque retta parallela ad uno dei due assi  $x$  e  $y$* , otteniamo una funzione regolare di una

variabile. Inoltre, le rette tangenti a queste funzioni di una variabile cambiano in modo continuo da punto a punto.

Nel grafico della superficie in figura sono rappresentate alcune di queste restrizioni: i loro grafici sono le “curve coordinate” che formano il reticolo disegnato sulla superficie!

Se sapete già cosa sono le derivate... la cosa può essere detta in modo più semplice: per ogni punto fissato  $(x_0, y_0)$  nel dominio della funzione, devono esistere le *derivate parziali*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}\end{aligned}$$

e queste devono dipendere in modo continuo dal punto  $(x_0, y_0)$ . Si noti che la derivata parziale di  $f$  rispetto a  $x$  non è altro che la derivata in  $x_0$  della funzione  $x \mapsto f(x, y_0)$ : sostanzialmente, stiamo vedendo  $f(x, y)$  come una funzione della sola  $x$ , considerando  $y$  come un *parametro fissato*. Analogamente, per fare la derivata parziale rispetto a  $y$  si guarda  $f(x, y)$  come funzione della sola  $y$  e si considera  $x$  come un parametro fissato.

Il piano tangente a  $f$  nel punto  $(x_0, y_0)$  sarà l'unico piano che contiene le rette tangenti alle restrizioni  $x \mapsto f(x, y_0)$  (in  $x_0$ ) e  $y \mapsto f(x_0, y)$  (in  $y_0$ )<sup>5</sup>.

Le richieste di continuità (delle rette tangenti o delle derivate parziali) fatte sopra ci dicono che i piani tangenti variano con continuità da un punto all'altro del grafico. Non si tratta di una richiesta puramente tecnica, ma sostanziale: senza questa ipotesi quel che abbiamo chiamato “piano tangente” potrebbe non essere un oggetto geometricamente significativo, come mostra l'esempio seguente. Si consideri infatti la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

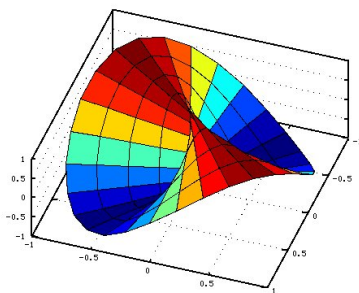
Con la definizione data sopra, il “piano tangente” al grafico di  $f$  in  $(0, 0)$  è il piano orizzontale  $z = 0$  (perché la restrizione di  $f$  ai due assi coordinati è identicamente 0). D'altra parte, questa funzione si comporta malissimo vicino all'origine perché non è *nemmeno continua*. Infatti, se restringiamo la

---

<sup>5</sup>In termini delle derivate parziali, l'equazione del piano tangente è

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

nostra funzione alla retta  $y = x$  otteniamo  $f(x, x) = 1/2$ : lungo questa retta  $f$  non tende affatto a 0. Ecco il grafico, vicino al punto singolare  $(0, 0)$ , di questa funzione patologica.

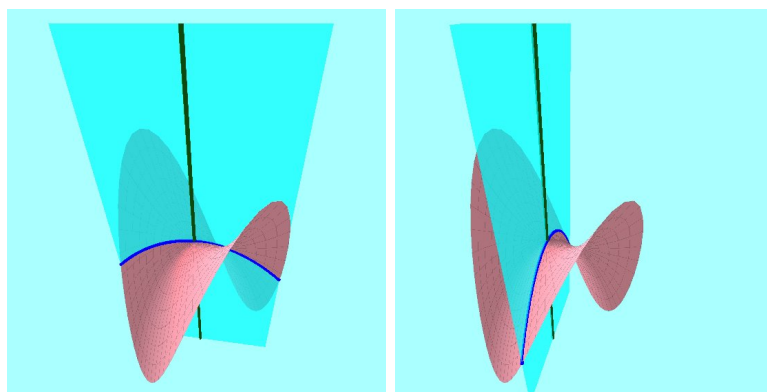


view: 25,0000, 105,000 scale: 1,00000, 1,00000

Con le nostre ipotesi di continuità delle rette tangenti (cioè delle derivate parziali), queste patologie diventano per nostra fortuna impossibili: è possibile dimostrare che, a quelle condizioni, il piano tangente che abbiamo definito fornisce davvero una buona approssimazione della nostra funzione vicino al punto di tangenza  $(x_0, y_0)$ .

Avendo a disposizione il concetto di piano tangente al grafico di una funzione di due variabili, possiamo finalmente definire le curvatures di una superficie!

Un *piano normale* al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, y_0)$  sarà un piano *ortogonale al piano tangente*, ossia un *piano che contiene la retta normale*

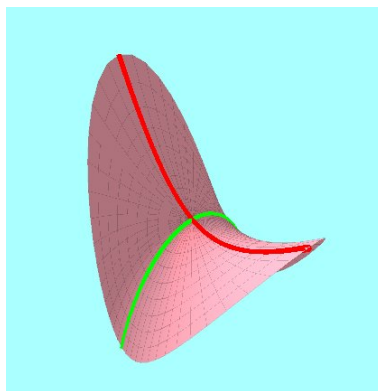


Nelle figure vediamo due immagini della stessa superficie (in rosa), la retta normale in un punto della superficie (in verde: il punto è lo stesso nelle due immagini) e due differenti piani normali (i piani traslucidi azzurri). I piani normali tagliano la superficie in una curva (tracciata in blu), che si chiama *sezione normale* della superficie. La curvatura della sezione normale nel



punto considerato è chiamata *curvatura normale*: essa dipende evidentemente da quale piano normale abbiamo scelto. Attribuiamo a questa curvatura il segno positivo se il cerchio osculatore si trova al di sopra della sezione normale, negativo altrimenti: con questa convenzione, entrambe le sezioni normali rappresentate in figura hanno curvatura normale negativa!

Il variare del piano normale, consideriamo le sezioni normali di *curvatura massima e di curvatura minima* (ove la curvatura va considerata col suo segno): queste si chiamano *curvature principali* della superficie nel punto considerato. In figura, ecco le sezioni normali che danno le curvature principali:



la curva verde ha curvatura minima, quella rossa curvatura massima. Si noti che i rispettivi piani normali sono *ortogonali*: questo è un fatto generale che può essere dimostrato.

La *curvatura media* di una superficie in un punto è la *media aritmetica delle curvature principali*.

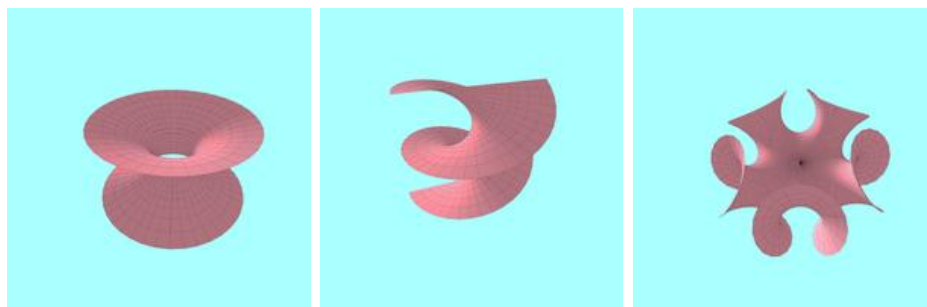
Nel caso in figura, essa è la semisomma della curvatura massima (positiva) e della curvatura minima (negativa). Poichè dalla figura si indovina che la curva verde avrà curvatura più grande in modulo della curva rossa (che è “più aperta”), nel nostro caso la curvatura media è negativa. Cliccando sulla figura sopra, si accede ad una animazione interattiva realizzata con WebGL. Se WebGL non dovesse funzionare con il vostro browser, potete comunque vedere un filmato dell’animazione (<http://www.youtube.com/watch?v=HUzOPbZk8Pg>).

Per poter definire le curvature delle sezioni normali, è necessario avere un po’ più di regolarità sulla funzione  $f$ : solitamente si richiede che *anche le derivate parziali di  $f$  siano derivabili parzialmente, con derivate parziali continue*. In sintesi, chiederemo che la funzione sia derivabile parzialmente due volte con derivate continue. Sotto questa condizione, si può dimostrare che vale la seguente espressione esplicita per la curvatura media  $H$  del grafico

di  $f$  nel punto  $(x, y, f(x, y))$ :

$$2H(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}} \right).$$

Come già detto, le superfici minime ed i film di sapone sono caratterizzati dal fatto di *avere curvatura media 0 in tutti i punti!*. Sono cioè soluzioni dell'equazione (a derivate parziali)  $H = 0$ .



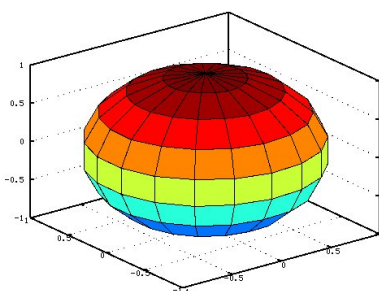
C'è un modo alternativo di descrivere una superficie, oltre a quello di vederla localmente come grafico di una funzione di due variabili: possiamo parametrizzarla (localmente) tramite *tre funzioni di due variabili*.

Questo metodo è una naturale generalizzazione dell'idea di descrivere una curva come traiettoria di un punto materiale in funzione del tempo: nel caso delle superfici, abbiamo bisogno di *due parametri*  $(u, v)$  che variano in un certo sottinsieme del piano, e i punti della superficie sono quelli di coordinate  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , dove  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e  $z(u, v)$  sono tre funzioni regolari di due variabili.

Questa idea è molto meno esotica di quanto potreste pensare: ci viene infatti del tutto naturale descrivere un punto sulla superficie terrestre (e quindi le sue coordinate in un ipotetico sistema di assi cartesiani) tramite la latitudine (parametro che varia tra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  e la longitudine (tra  $-\pi$  e  $\pi$ ). Usando esattamente questa idea, ci siamo divertiti a titolo di esempio a trovare una parametrizzazione della sfera unitaria centrata nell'origine: essa può essere descritta dall'espressione

$$(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v), \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in [0, \pi),$$

ove  $u$  denota la *longitudine* misurata in senso antiorario a partire dall'asse delle  $x$ , mentre  $v$  rappresenta la *latitudine* misurata a partire dal polo nord (che quindi ha latitudine 0: l'equatore avrà latitudine  $\pi/2$ , il polo sud latitudine  $\pi$ ).

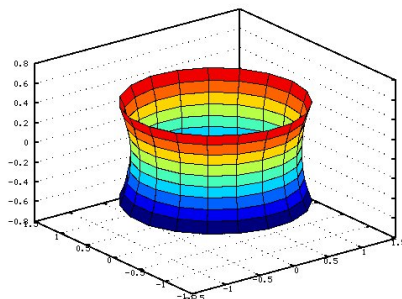


view: 60,0000, 322,500 scale: 1,00000, 1,00000

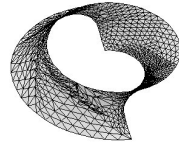
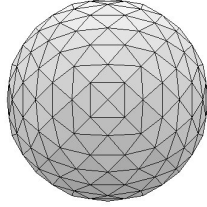
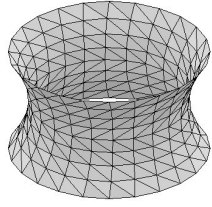
Affinché una parametrizzazione di questo tipo dia una superficie regolare (eventualmente con autointersezioni), c'è una condizione tecnica simile a quella che abbiamo trovato per le curve: occorre non solo che le tre funzioni  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e  $z(u, v)$  siano regolari, ma anche che i due vettori  $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$ ,  $(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$  non si annullino mai e non siano mai paralleli.

Come ulteriore esempio di superficie parametrica (una superficie minima, questa volta!), abbiamo trovato un'espressione per il *catenoide*:

$$\left( \frac{e^v + e^{-v}}{2} \cos(u), \frac{e^v + e^{-v}}{2} \sin(u), v \right)$$



A conclusione dell'incontro, abbiamo fatto qualche esperimento con il programma Surface Evolver di Ken Brakke (<http://www.susqu.edu/brakke/evolver/evolver.html>). Si tratta di un software molto potente - liberamente scaricabile - che permette di risolvere numericamente il problema di Plateau e svariati problemi geometrici simili: in figura si vedono alcune soluzioni di problemi di area minima generate da Evolver.



## 8 Quinto incontro. ITIS Marconi, 18/3/2013 (3 ore)

Eccoci giunti all'ultimo incontro del nostro laboratorio! Questa volta voglio tentare di darvi un'idea di come si dimostra che i film di sapone devono avere curvatura media nulla in tutti i punti (cioè devono soddisfare l'equazione  $H = 0$ ).

Osserviamo per prima cosa che la curvatura è una proprietà locale della superficie: per questo motivo, possiamo sperare di arrivare alla nostra equazione con ragionamenti di tipo locale! Prendiamo dunque una superficie regolare  $S$  che sia una soluzione del problema di Plateau: l'area di  $S$  è la minima possibile tra *tutte* le superfici con lo stesso bordo di  $S$ .

Se fissiamo un punto interno  $P$  della superficie  $S$ , abbiamo visto che possiamo trovare un cubetto centrato in  $P$  nel quale  $S$  è esprimibile come grafico di una funzione regolare di due variabili, diciamo del tipo  $z = f(x, y)$  con  $x$  e  $y$  che variano in un quadrato  $Q$  del piano  $xy$ .

Supponiamo di sostituire questo pezzettino della superficie  $S$  con il grafico  $z = g(x, y)$  di un'altra funzione di due variabili, che però coincida con  $f$  sul bordo  $\partial Q$  del quadrato: in questo modo otteniamo un'altra superficie regolare, che coincide con  $S$  fuori dal cubo (e quindi ha lo stesso bordo di prima!). Siccome  $S$  ha area minima, possiamo dedurre che

*L'area del grafico di  $f$  è minore o uguale all'area del grafico di  $g$ , per qualunque scelta di una funzione  $g$  che coincida con  $f$  su  $\partial Q$ :*

$$\text{Area}(f) \leq \text{Area}(g).$$

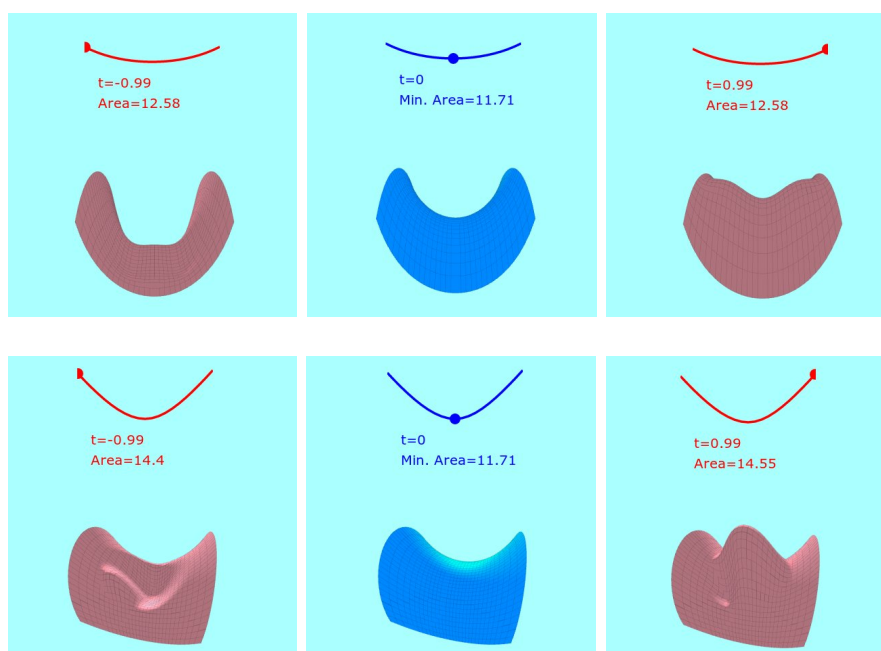
Le funzioni  $g$  ammissibili sono tutte e sole quelle del tipo  $g(x, y) = f(x, y) + \phi(x, y)$  ove  $\phi : Q \rightarrow \mathbf{R}$  è una qualunque funzione regolare con la proprietà che  $\phi(x, y) = 0$  per ogni  $(x, y) \in \partial Q$ : quest'ultima condizione è quella che garantisce che  $f$  e  $g$  assumano gli stessi valori sul bordo del quadrato  $Q$  (e quindi che la superficie "si attacchi bene"). Si noti anche che, se  $\phi$  è una funzione del tipo appena descritto, *tutte* le funzioni del tipo  $f(x, y) + t\phi(x, y)$  coincidono con  $f$  sul bordo di  $Q$ , qualunque sia il numero reale  $t$ : otteniamo dunque la condizione

$$\text{Area}(f) \leq \text{Area}(f + t\phi) \quad \text{per ogni } t \in \mathbf{R}, \text{ per ogni } \phi(x, y) \text{ nulla su } \partial Q.$$

In altre parole, per ogni fissata funzione  $\phi : Q \rightarrow \mathbf{R}$  che si annulla su  $\partial Q$ , la funzione di una variabile  $A(t) = \text{Area}(f + t\phi)$  ha un minimo assoluto per  $t = 0$ . Dunque, il grafico di  $A(t)$  deve avere tangente orizzontale per  $t = 0$ :

vale la condizione  $A'(0) = 0$ . Facendo un po' di conti, si può dimostrare che questa condizione implica che la curvatura media del grafico di  $f$  si annulla in tutti i punti<sup>6</sup>.

Nelle figure seguenti le superfici sono i grafici delle funzioni  $f + t\phi$  con  $t = -0.99$ ,  $t = 0$  e  $t = 1$  (e le relative aree), ove  $f$  è un grafico di area minima e, nelle due righe, abbiamo scelto due diverse funzioni  $\phi$ . Sopra ogni disegno, è rappresentato il grafico di  $A(t)$ .



Cliccando sulle figure si possono vedere due brevissimi filmati che mostrano come cambia la superficie e la sua area al variare di  $t$ . Si può anche vedere la

<sup>6</sup> Ecco qualche dettaglio per chi conosce integrali e derivate... Il conto è svolto in maggior dettaglio in appendice. Abbiamo  $Area(f) = \int_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$  (ove  $f_x$ ,  $f_y$  sono le derivate parziali di  $f$ ). Sostituendo  $f + t\phi$  al posto di  $f$  troviamo l'espressione della funzione  $A(t)$ . Usando la regola di derivazione sotto il segno di integrale e la formula di integrazione per parti si trova

$$A'(0) = - \int_Q \phi(x, y) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) \right] dx dy = -2 \int_Q \phi(x, y) H(x, y) dx dy.$$

Siccome questa espressione deve annullarsi *per ogni* funzione  $\phi$  (nulla su  $\partial Q$ ), la curvatura media  $H(x, y)$  del grafico di  $f$  deve essere nulla in ogni punto!

versione interattiva realizzata con WebGL (<http://profs.sci.univr.it/~baldo/tjs/variation.html>).

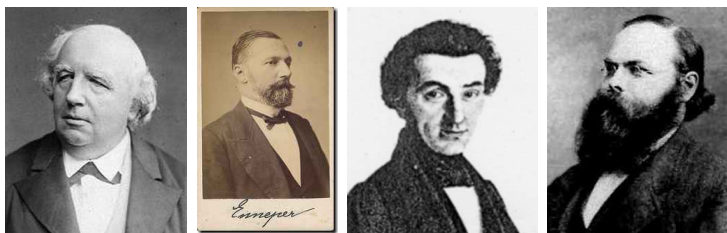
Voglio concludere con un po' di note storico-folcloristiche... che mostrano come la ricerca sulle superfici minime, iniziata nel XVIII secolo (se non prima!) sia tuttora vivissima!

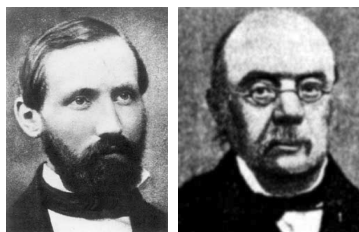
La condizione sulla curvatura media che devono soddisfare le superfici di area minima fu scoperta da Eulero già nella prima metà del '700 (nel caso particolare del catenoide): furono infatti Eulero e Jean Baptiste Meusnier a determinare matematicamente i primi esempi espliciti di superfici minime, che sono il *catenoide* e l'*elicoide*.



È da sottolineare che l'annullarsi della curvatura media è una condizione *necessaria*, ma non sufficiente, perché una superficie abbia area minima tra tutte quelle con lo stesso bordo (un po' come la retta tangente orizzontale è una condizione necessaria ma non sufficiente per avere un punto di minimo di una funzione di una variabile). Nonostante ciò, per ragioni storiche, i matematici chiamano *superficie minima* una qualunque superficie avente curvatura media nulla in tutti i suoi punti. Una soluzione del problema di Plateau si indica invece con l'espressione un po' sovraccarica di *superficie minima minimizzante*.

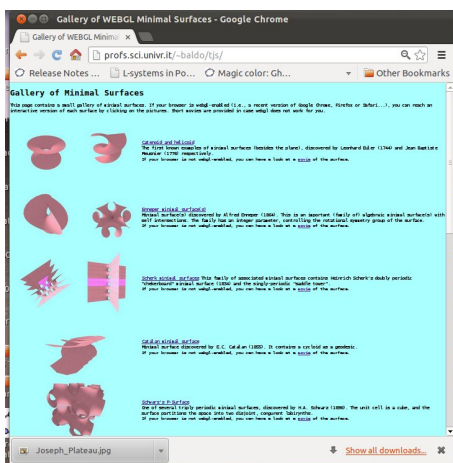
A partire dalla seconda metà dell'800 ci fu un grandissimo fiorire di ricerche sulle superfici minime: come abbiamo già detto, il fisico Joseph Plateau condusse esperimenti sistematici con le lamine di sapone, mentre i matematici (soprattutto di scuola tedesca) si dedicavano intensamente a scoprire nuovi esempi di superfici minime. Nelle foto, alcuni dei matematici che hanno dato contributi in questo campo: K. Weierstrass, A. Enneper, H. Scherk, H. Schwarz, B. Riemann, E. Catalan.





Tutte queste ricerche si basano su un risultato molto potente noto come *formula di rappresentazione di Enneper-Weierstrass*, che evidenzia un legame strettissimo e interessante tra la teoria delle superfici minime e l'analisi complessa. Indagini di questo tipo sono fiorenti ancora oggi: dopo un black-out di svariati decenni, durante il quale si credeva che la formula di rappresentazione ci avesse già detto... più o meno tutto quel che poteva dirci, nel 1982 il matematico brasiliano Celso Costa scoprì la bellissima superficie che porta il suo nome, dando nuovo impulso alle ricerche!

Potete accedere ad una galleria interattiva che illustra un certo numero di queste superfici minime sul mio sito web: <http://profs.sci.univr.it/~baldo/tjs>.



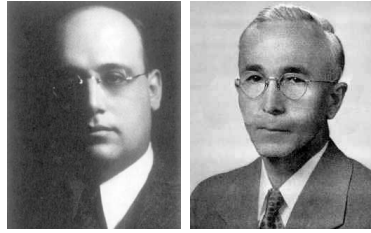
Maggiori particolari (temo troppo tecnici...) su come ottenere queste superfici si possono trovare per esempio in [DHS10], [Web05].

Altrettanto affascinante, a mio avviso, è la storia della ricerca di soluzioni del problema di Plateau... una storia ben lungi dall'essere terminata!

Per molte ragioni, si tratta infatti di un problema *estremamente difficile*, anche nel caso in cui il bordo della superficie sia una curva regolare chiusa.

Un primo, notevole progresso, venne dalle ricerche di Jesse Douglas (1896-1965) e Tibor Rado (1895-1965): rispettivamente nel 1931 e nel 1933 pubblicarono una soluzione del problema di Plateau per *superfici del tipo del disco*.

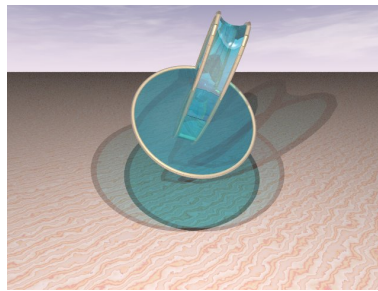




Per questo risultato Douglas ebbe, nel 1936, la Fields Medal... un vero e proprio “premio Nobel per la matematica”. La dimostrazione di Rado, anche se è successiva, merita ampiamente di essere ricordata per la sua originalità ed eleganza.

Douglas e Rado dimostrarono la cosa seguente: data una curva chiusa regolare nello spazio, tra tutte le *superfici parametrizzate*  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  definite su un *disco* e che *sul bordo del disco* parametrizzano la curva data, ce n'è (almeno) una di area minima.

Tutto risolto? Non proprio... come illustra il seguente filmato: <http://www.youtube.com/watch?v=BITtsqUprz8>.



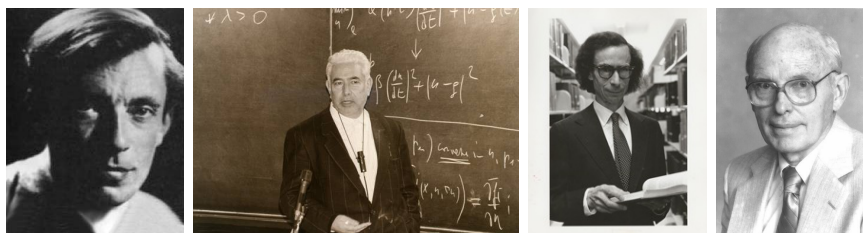
Il problema è dovuto al fatto che, nel caso considerato nel filmato, la “vera superficie di area minima” non è del tipo del disco... perché ha un buco!

Una delle ragioni per cui questo può succedere è legato alle leggi di Plateau: una superficie del tipo del disco può infatti autointersecarsi, come succede nel filmato. Lungo le autointersezioni, le leggi di Plateau sono violate: per questo motivo *la superficie può essere sostituita con una avente lo stesso bordo e area minore*. Il ragionamento assomiglia un po' a quello fatto per le reti minime: abbiamo visto infatti come una rete con angoli minori di  $120^\circ$  sia sempre migliorabile. Ovviamente, nel caso delle superfici la cosa è decisamente più complicata: una spiegazione elementare dell'idea si trova nella recente appendice, scritta da Ian Stewart, dell'intramontabile classico “Che cos'è la matematica?” di Richard Courant e Herbert Robbins<sup>7</sup>.

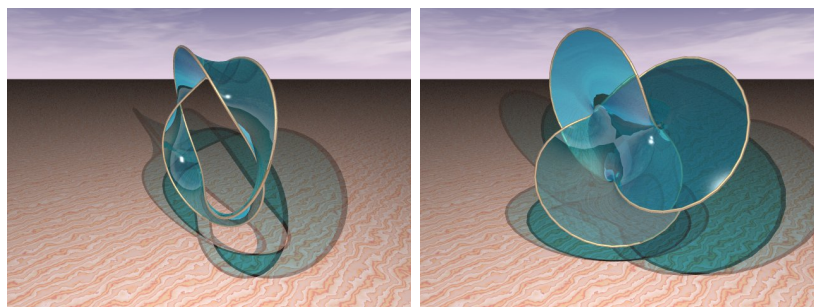
Questo, ovviamente, non ha scoraggiato i matematici: grazie a nuove nozioni generalizzate di superficie (per le quali citiamo Renato Caccioppoli

<sup>7</sup>[CR00]. Si vedano in particolare Cap. 7, §11 e Cap. 9, §11.

(1904-1959), Ennio De Giorgi (1928-1996), Herbert Federer (1920-2010) e Wendell Fleming (1928-) si riuscì a provare che, data una curva regolare chiusa nello spazio, esiste una *superficie orientata* di area minima che ha quel bordo. Questa superficie di area minima è anche regolare.



Ma non è finita: purtroppo, come abbiamo già notato sperimentalmente, la superficie di area minima *non sempre* è orientabile!



Sebbene esistano molte nozioni di superfici generalizzate che includono oggetti non orientabili (citiamo ad esempio quella, dovuta a Fred Almgren, che consentì alla moglie Jean Taylor di dimostrare le leggi di Plateau!), a tutt'oggi non possiamo dire, con la sicurezza che vorremmo, di avere una soluzione pienamente soddisfacente del problema di Plateau in tutta la sua generalità ...anche se la ricerca progredisce a grandi passi e vi sono proposte molto promettenti per attaccare il problema!

## Appendice: l'equazione delle superfici minime per i grafici

Ripetiamo con qualche dettaglio in più il conticino svolto nella nota 6 a pag. 30 per ottenere l'equazione delle superfici minime per i grafici.

Supponiamo che  $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$  sia una funzione derivabile due volte con derivate continue, il cui grafico ha *area minima tra tutti i grafici con lo stesso bordo*.

Abbiamo  $Area(f) = \int_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$  (ove  $f_x, f_y$  sono le derivate parziali di  $f$ ).

Se  $\phi$  è una funzione regolare nulla al bordo di  $Q$  e  $t \in \mathbf{R}$ , la funzione  $f + t\phi$  assume lo stesso valore di  $f$  al bordo del quadrato. Sostituendo  $f + t\phi$  al posto di  $f$  troviamo l'espressione:

$$A(t) := Area(f + t\phi) = \int_Q \sqrt{1 + (f_x + t\phi_x)^2 + (f_y + t\phi_y)^2} dx dy.$$

La funzione  $A(t)$  ha minimo assoluto per  $t = 0$ , per cui dobbiamo imporre la condizione  $A'(0) = 0$ :

$$\begin{aligned} A'(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_Q \sqrt{1 + (f_x + t\phi_x)^2 + (f_y + t\phi_y)^2} dx dy = \\ &= \int_Q \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \sqrt{1 + (f_x + t\phi_x)^2 + (f_y + t\phi_y)^2} dx dy = \\ &= \int_Q \left[ \phi_x \left( \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \phi_y \left( \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) \right] dx dy = \\ &= - \int_Q \phi(x, y) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) \right] dx dy = \\ &= -2 \int_Q \phi(x, y) H(x, y) dx dy = 0 \end{aligned}$$

dove

- per passare dalla prima alla seconda riga, usiamo un teorema di derivazione sotto il segno di integrale per “portare la derivata rispetto al parametro  $t$  dentro l'integrale”;

- per passare dalla terza alla quarta riga usiamo la versione bidimensionale del teorema di integrazione per parti: non c'è termine di bordo perchè  $\phi$  si annulla sul bordo del quadrato.

Siccome questa espressione deve annullarsi *per ogni* funzione  $\phi$  (nulla su  $\partial Q$ ), la curvatura media  $H(x, y)$  del grafico di  $f$  *deve essere nulla in ogni punto*:

$$H(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in Q.$$

Supponiamo infatti per assurdo che sia  $H(x_0, y_0) \neq 0$  con  $(x_0, y_0) \in Q$ . La funzione curvatura media (che è continua) dovrebbe avere lo stesso segno in tutto un dischetto centrato in  $(x_0, y_0)$  (teorema della permanenza del segno). Basterebbe allora scegliere una funzione  $\phi$  che sia positiva in questo dischetto e nulla al di fuori, per avere  $A'(0) \neq 0$ , contro la nostra ipotesi di minimalità del grafico di  $f$ .

## Riferimenti bibliografici

- [CR00] Courant, Richard e Robbins, Herbert: *Che cos'è la matematica?* Seconda edizione riveduta da Ian Stewart. Boringhieri, Torino, 2000.
- [DHS10] Dierkes, Ulrich, Hildebrandt, Stefan e Sauvigny, Friedrich: *Minimal surfaces I,II,III*, volume 339 della serie *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, seconda edizione, 2010. With assistance and contributions by A. Küster and R. Jakob.
- [Kaz72] Kazarinoff, Nicholas D.: *Diseguaglianze geometriche*. Zanichelli, Bologna, 1972.
- [LT09] Luminati, Domenico e Tamanini, Italo: *Problemi di massimo e di minimo*. Mimesis, 2009.
- [Web05] Weber, Matthias: *Classical minimal surfaces in Euclidean space by examples: geometric and computational aspects of the Weierstrass representation*. Nel *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 della serie *Clay Math. Proc.*, pagine 19–63. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.