Dinamica (discreta) di Popolazioni

Marco Caliari

Università di Verona, 29 Aprile 2016

Indice

1 Popolazione italiana

Consideriamo l'andamento della popolazione italiana nell'anno 2008. Dal sito dell'ISTAT [2] ricaviamo, tra le altre, le seguenti informazioni:

Popolazione al primo gennaio	59 619 290
Nati	576 659
Morti	585 126
Saldo migratorio e per altri motivi	434 245
Popolazione al 31 dicembre	60 045 068

Tabella 1: Bilancio demografico anno 2008. Dati ISTAT.

Il cosiddetto "saldo naturale" è di $-8\,467$ e l'aumento della popolazione è dovuto al saldo migratorio. Il numero di nuovi nati è pari circa al 9.67 per mille della popolazione iniziale e il numero di morti è pari circa al 9.81 per mille della popolazione iniziale. Guardiamo le percentuali di nuovi nati e morti negli anni precedenti:

Anno	% nati	% morti
2008	0.967	0.981
2007	0.954	0.965
2006	0.953	0.950
2005	0.948	0.970

Tabella 2: Percentuali di nuovi nati e morti negli anni 2005–2008. Dati ISTAT.

Si vede come queste percentuali si mantengano "più o meno" costanti. Per quanto riguarda il flusso migratorio, invece, non ha molto senso esprimerlo in termini percentuali. Il numero di immigrati non dipende direttamente dalla numerosità della popolazione locale.

2 Il modello di Malthus (1766–1834)

Vogliamo scrivere un modello matematico che, a partire dai dati della popolazione italiana nel 2008, possa predire l'andamento negli anni futuri. Abbiamo già capito che un insieme dei tempi conveniente è quello discreto $\{t_1, t_2, t_3, \ldots\} = \{2008, 2009, 2010, \ldots\}$. Indichiamo con x_1 il numero di abitanti in Italia il primo gennaio 2008. Chiameremo poi x_2, x_3, eccetera il numero di abitanti in Italia il primo gennaio 2009, 2010, eccetera. Come al solito, assumeremo tutte le ipotesi semplificative che ci servono.

2.1 Nuovi nati, morti e migrazioni

Infine, aggiungiamo la quota di migrazione che chiamiamo m ed è costante e indipendente dal numero di abitanti (in generale, può essere positivo, nullo o negativo). Pertanto, nell'anno $2008 + n$ si ha

$$x_{n+1} = x_n + \tau^{\mathrm{nati}} x_n - \tau^{\mathrm{morti}} x_n + m = (1 + \Delta\tau) x_n + m \tag{1}$$

Questo modello di crescita di popolazione si chiama *modello di Malthus*. Qual è l'andamento della popolazione? Nel caso italiano, si ha $1+\Delta\tau < 1$ e $m > 0$. A partire dall'anno 2009 si ha

$$\begin{aligned}
x_2 &= (1 + \Delta\tau)x_1 + m = 60\,045\,068 > x_1 = 59\,619\,290 \\
x_3 &= (1 + \Delta\tau)x_2 + m > (1 + \Delta\tau)x_1 + m = x_2 \\
x_4 &= (1 + \Delta\tau)x_3 + m > (1 + \Delta\tau)x_2 + m = x_3
\end{aligned}$$

eccetera. Applicando il principio di induzione

$$x_{n+1} > x_n, \quad n \geq 1 \tag{2}$$

Inoltre (ricordiamo che $\Delta\tau < 0$)

$$\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= \Delta\tau x_1 + m \\
x_3 - x_2 &= \Delta\tau x_2 + m < \Delta\tau x_1 + m = x_2 - x_1 \\
x_4 - x_3 &= \Delta\tau x_3 + m < \Delta\tau x_2 + m = x_3 - x_2
\end{aligned}$$

eccetera. Quindi, la popolazione cresce, ma sempre meno. Si tratta di capire allora se la popolazione cresce fino ad esplodere *(esplosione)* oppure tende a stabilizzarsi. Se esplodesse, significa che, fissato un numero di abitanti grande a piacere, diciamo M, ad un certo punto questo numero sarebbe superato. Sia allora

$$M = -\frac{m}{\Delta\tau} > 0$$

e sia N tale che

$$x_N > -\frac{m}{\Delta\tau}$$

Allora $\Delta\tau x_N + m < 0$ e quindi $x_{N+1} = x_N + \Delta\tau x_N + m < x_N$, in contrasto con quanto scritto in (2). Dunque la popolazione cresce ma non può superare la quantità $-m/\Delta\tau$, verso la quale si stabilizza (per inciso, nel caso italiano tale quantità vale circa 3 057 680 239).

Come è stato ricavato M? Se la popolazione si stabilizza ad un valore x_∞, allora, per n grande, si avrà

$$x_\infty = x_{n+1} = (1+\Delta\tau)x_n + m = (1+\Delta\tau)x_\infty + m$$

(cioè x_∞ è un punto fisso) da cui si ricava

$$x_\infty = -\frac{m}{\Delta\tau} = M.$$

Sarebbe utile poter scrivere una formula che lega la popolazione x_{n+1} alla popolazione iniziale x_1. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
x_2 &= (1+\Delta\tau)x_1 + m \\
x_3 &= (1+\Delta\tau)x_2 + m = (1+\Delta\tau)^2 x_1 + (1+\Delta\tau)m + m \\
x_4 &= (1+\Delta\tau)x_3 + m = (1+\Delta\tau)^3 x_1 + (1+\Delta\tau)^2 m + (1+\Delta\tau)m + m
\end{aligned}$$

e quindi, in generale,

$$x_{n+1} = (1+\Delta\tau)^n x_1 + \big(1 + (1+\Delta\tau) + (1+\Delta\tau)^2 + \ldots + (1+\Delta\tau)^{n-1}\big)\, m$$

Dalla somma della serie geometrica troncata si ha

$$x_{n+1} = (1+\Delta\tau)^n x_1 + \frac{(1+\Delta\tau)^n - 1}{(1+\Delta\tau) - 1} m = (1+\Delta\tau)^n x_1 + \frac{(1+\Delta\tau)^n - 1}{\Delta\tau} m$$

Tenuto conto che $(1+\Delta\tau) < 1$, passando al limite per $n \to \infty$ si ha

$$x_\infty = -\frac{m}{\Delta\tau} = M.$$

Dunque x_∞ è effettivamente un *punto di equilibrio.*

2.2 Possibili complicazioni

Il modello di Malthus è *lineare* (i termini x_n compaiono solo come monomi di grado uno) e a *coefficienti* (τ^{nati}, τ^{morti}, m) *costanti.* Si potrebbe complicare il modello assumendo coefficienti dipendenti dal tempo (cioè da n). In tal caso si avrebbe

$$x_{n+1} = x_n + (\tau_n^{\text{nati}} - \tau_n^{\text{morti}})x_n + m_n$$

Per i flussi migratori, la cosa appare plausibile, quando si fissino, per esempio per legge, pari a certe quantità negli anni a venire. Per i tassi di natalità e mortalità, è invece più probabile che possano dipendere dal numero di abitanti stesso (un governo potrebbe scoraggiare le nascite—togliendo i benefici che di solito (???) si concedono alle famiglie numerose—qualora la popolazione raggiungesse livelli non sostenibili). In tal caso allora, essi sarebbero funzioni del numero di abitanti x_n e pertanto il modello diventerebbe *non lineare.*

3 Il modello logistico, o di Verhulst (1804–1849)

Come osservato precedentemente, l'ipotesi secondo cui il tasso di natalità e di mortalità sono costanti nel tempo potrebbe non essere vera. In particolare, se la popolazione dispone di risorse limitate (per esempio una quantità di acqua o di grano ben definita e non illimitata), è possibile che al crescere della popolazione il tasso di natalità diminuisca e/o che il tasso di mortalità cresca. In prima approssimazione possiamo assumere che questo avvenga in maniera *lineare* rispetto alla popolazione stessa.

Se indichiamo con x_n il numero di individui al tempo t_n, allora i tassi di natalità e mortalità, dipendenti da n, possono essere espressi dalle relazioni

$$\tau_{x_n}^{\text{nati}} = \tau_0^{\text{nati}} - ax_n \qquad \text{e} \qquad \tau_{x_n}^{\text{morti}} = \tau_0^{\text{morti}} + bx_n,$$

dove $\tau_0^{\text{nati}}, \tau_0^{\text{morti}}, a$ e b sono tutte costanti positive. Si noti che τ_0^{nati} e τ_0^{morti} sono i tassi di natalità e mortalità nel caso limite di popolazione nulla, mentre a e b sono dei coefficienti che misurano il grado di *influenza* della popolazione sui tassi di natalità e mortalità, ovvero il grado di competizione all'interno della specie. In assenza di flusso migratorio, dalla relazione (1) si ha

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 + \tau_{x_n}^{\text{nati}} - \tau_{x_n}^{\text{morti}})x_n \\ &= (1 + \tau_0^{\text{nati}} - ax_n - \tau_0^{\text{morti}} - bx_n)x_n \\ &= [(1 + \tau_0^{\text{nati}} - \tau_0^{\text{morti}}) - (a+b)x_n]x_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Come determinare i coefficienti $\tau_0^{\text{nati}}, \tau_0^{\text{morti}}, a$ e b?

Anno	Nati	Morti	Popolazione
2004	562 599	546 658	57 888 245
2008	576 659	585 126	59 619 290

Tabella 3: Bilancio demografico anni 2004 e 2008. Dati ISTAT.

Per rispondere alla domanda, concentriamoci sulle due incognite τ_0^{nati} e a. Per determinarle abbiamo bisogno di due relazioni che leghino il tasso di natalità in un certo anno al numero di individui nel medesimo anno. Prendendo in considerazione gli anni 2004 e 2008, dai valori in tabella 3, si ricavano dapprima i tassi di natalità nel 2004 e nel 2008, che indichiamo con $\tau_{x_{2004}}^{\text{nati}}$ e $\tau_{x_{2008}}^{\text{nati}}$, e poi si ricavano a e τ_0^{nati} risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \tau_{x_{2004}}^{\text{nati}} = \tau_0^{\text{nati}} - ax_{2004} \\ \tau_{x_{2008}}^{\text{nati}} = \tau_0^{\text{nati}} - ax_{2008} \end{cases}$$

Procedendo in questo moto si ha

$$a = -\frac{\tau^{\text{nati}}_{x_{2008}} - \tau^{\text{nati}}_{x_{2004}}}{x_{2008} - x_{2004}} \quad \text{e} \quad \tau^{\text{nati}}_0 = \tau^{\text{nati}}_{x_{2008}} - \frac{\tau^{\text{nati}}_{x_{2008}} - \tau^{\text{nati}}_{x_{2004}}}{x_{2008} - x_{2004}} x_{2008}.$$

Analogamente, per il tasso di mortalità si ottengono i coefficienti

$$b = \frac{\tau^{\text{morti}}_{x_{2008}} - \tau^{\text{morti}}_{x_{2004}}}{x_{2008} - x_{2004}} \quad \text{e} \quad \tau^{\text{morti}}_0 = \tau^{\text{morti}}_{x_{2008}} - \frac{\tau^{\text{morti}}_{x_{2008}} - \tau^{\text{morti}}_{x_{2004}}}{x_{2008} - x_{2004}} x_{2008}.$$

La popolazione si stabilizza? Per rispondere alla seconda domanda, si osservi che *se* la popolazione raggiunge, per tempi molto grandi, un punto di equilibrio x_∞, allora per n grande si ha $x_{n+1} = x_n = x_\infty$. Pertanto, per determinare il punto fisso x_∞, basta sostituirlo nell'equazione che descrive l'evoluzione del sistema dinamico ottenendo

$$x_\infty = [(1 + \tau^{\text{nati}}_0 - \tau^{\text{morti}}_0) - (a + b)x_\infty]x_\infty$$

da cui si ricavano $x_\infty = 0$ e

$$x_\infty = \frac{\tau^{\text{nati}}_0 - \tau^{\text{morti}}_0}{a + b}.$$

Il secondo ha senso solo se non negativo, ovviamente. Per il caso della popolazione italiana, tale numero vale circa 59 030 303. Un'altra possibilità è quella di eguagliare i tassi di natalità e di mortalità

$$\tau^{\text{nati}}_0 - a x_\infty = \tau^{\text{morti}}_0 + b x_\infty.$$

L'andamento della popolazione non è necessariamente monotono e si può calcolare il valore massimo raggiungibile. Infatti

$$x^{\max} = \frac{1 + \tau^{\text{nati}}_0 - \tau^{\text{morti}}_0}{a + b} > x_\infty$$

è il massimo valore ammissibile per x_n poiché se x_n fosse maggiore di $x^{\max}$, allora dalla relazione (3) si otterrebbe $x_{n+1} < 0$, che non ha senso. Il fatto che $x^{\max}$ sia maggiore di x_∞ significa che *l'eventuale* assestamento della popolazione può avvenire in maniera non monotona.

Vediamo ora come sia possibile scrivere un'equazione di evoluzione della popolazione che, anziché utilizzare il numero di individui "assoluto" x_n, utilizzi una popolazione "riscalata" p_n tale che $0 < p_n < 1$. Da

$$x_{n+1} = [(1 + \tau^{\text{nati}}_0 - \tau^{\text{morti}}_0) - (a + b)x_n]x_n,$$

dividendo entrambi i membri per $x^{\max}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x^{\max}} &= [(1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})-(a+b)x_n]\frac{x_n}{x^{\max}} \\
&= (1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})\left[1-\frac{a+b}{1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}}}x_n\right]\frac{x_n}{x^{\max}} \\
&= (1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}})\left[1-\frac{x_n}{x^{\max}}\right]\frac{x_n}{x^{\max}}
\end{aligned}$$

da cui, introducendo

$$A = 1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}} \qquad \text{e} \qquad p_n = \frac{x_n}{x^{\max}} = \frac{a+b}{1+\tau_0^{\text{nati}}-\tau_0^{\text{morti}}}x_n,$$

si ottiene semplicemente

$$p_{n+1} = Ap_n(1-p_n), \tag{4}$$

nota come *equazione logistica discreta*. Il valore $p_\infty = x_\infty/x^{\max}$ vale $1-1/A$. Per avere $0 < p_n < 1$ per ogni n deve essere $0 < A < 4$ poiché il vertice della parabola $y = Ax(1-x)$ è $V(1/2, A/4)$, da cui $0 < A/4 < 1$.

Al variare di A in questo range di valori si osservano varie *transizioni*:

- Se $0 < A \leq 1$, ovvero se $\tau_0^{\text{nati}} \leq \tau_0^{\text{morti}}$, allora $p_\infty = 0$ e la specie si estingue.
- Se $1 < A \leq 2$ la popolazione si stabilizza velocemente al valore $1-1/A$, indipendentemente dal valore iniziale della popolazione.
- Se $2 < A \leq 3$ la popolazione si stabilizza comunque al valore $1-1/A$ ma oscillando attorno ad esso per un po' di tempo. La convergenza risulta molto lenta per $A = 3$.
- Se $3 < A < 1+\sqrt{6} \approx 3.45$ la popolazione oscilla per sempre tra due valori, che dipendono da A (comportamento periodico).
- Se $\sim 3.45 < A <\sim 3.54$ la popolazione oscilla per sempre tra 4 valori (primo raddoppio del periodo).
- Se $A >\sim 3.54$ la popolazione oscilla tra 8 valori, poi 16 poi 32, etc. (cascata di raddoppio del periodo).
- Se $A \approx 3.57$ si osserva un comportamento *caotico*, ovvero minime variazioni del valore iniziale della popolazione provocano risultati decisamente diversi, che sembrano del tutto insensati (sensibilità alle condizioni iniziali).

- La maggior parte dei valori di A oltre 3.57 esibiscono un comportamento caotico, ma ci sono comunque ancora dei valori isolati di A che non mostrano comportamenti caotici (isole di stabilità). Per esempio, iniziando da $A = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$ si osservano oscillazioni tra tre valori, poi 6 valori, poi 12 etc.

4 Dinamica di epidemie: il modello SIR

Consideriamo ora la dinamica di una malattia infettiva. Al tempo t_n possiamo suddividere una popolazione di N individui in

- il numero di individui *infettabili* s_n
- il numero di individui *infetti* i_n
- il numero di individui *immuni* r_n in seguito a guarigione e non più infettabili

La forza di infezione può essere espressa da

$$\lambda_n = \frac{c}{N}\chi i_n$$

ove c/N è la frazione di persone contattate da un singolo individuo per unità di tempo e χ la *contagiosità* a seguito di un contatto con un individuo infetto. Ad esempio, se $\chi = 1/2$, significa che se un individuo infetto entra in contatto con 100 persone, 50 di esse risulteranno infettate. Indichiamo infine con γ il *tasso di guarigione*, cioè la frazione del numero di individui che, nell'unità di tempo (il giorno), passa dallo stato di "infetto" allo stato di "immune". Possiamo scrivere allora il seguente sistema

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n - \lambda_n s_n \\ i_{n+1} = i_n + \lambda_n s_n - \gamma i_n \\ r_{n+1} = r_n + \gamma i_n \end{cases} \tag{5}$$

Sommando i termini di sinistra e destra, rispettivamente, si trova

$$s_{n+1} + i_{n+1} + r_{n+1} = s_n + i_n + r_n \tag{6}$$

e dunque il numero totale di individui rimane costante e pari ad N. Per quanto riguarda il numero di infettabili, poiché la forza di infezione è positiva, esso non può che decrescere. Esisterà dunque un valore s_∞ verso il quale si stabilizzerà. Usando la terza equazione in (5) e sostituendola in (6) si trova

$$s_{n+1} + i_{n+1} + \gamma i_n = s_n + i_n$$

Per tempi molto grandi (al tendere di n all'infinito) si avrà

$$s_\infty + (1+\gamma) i_\infty = s_\infty + i_\infty$$

da cui segue $i_\infty = 0$. Dunque l'epidemia si estinguerà. Ciò non significa che $s_\infty = 0$. Quali potrebbero essere le cause di non estinzione? Almeno due

- la malattia non produce individui immuni (per esempio, il raffreddore)
- si prendono in considerazione i nuovi nati che nascono automaticamente come infettabili.

Concentriamoci sul secondo caso e consideriamo un modello malthusiano *neutrale*, in cui cioè il tasso di natalità e mortalità *giornaliero* coincidano e siano pari a τ^{g}. Per inciso, se indichiamo con τ^{a} il tasso di natalità e mortalità annuale, vale la relazione

$$\tau^{\mathrm{a}} = (1 + \tau^{\mathrm{g}})^{365} - 1$$

che si ricava facendo evolvere una popolazione con tasso giornaliero τ^{g} per 365 giorni e calcolando l'incremento di popolazione finale. Per quanto detto, tutti i nuovi nati si trovano nello stato di infettabili, mentre la mortalità colpisce indifferentemente qualunque sottogruppo della popolazione (nel caso di epidemia non letale). Allora il modello diventa

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n - \lambda_n s_n + \tau^{\mathrm{g}} N - \tau^{\mathrm{g}} s_n \\ i_{n+1} = i_n + \lambda_n s_n - \gamma i_n - \tau^{\mathrm{g}} i_n \\ r_{n+1} = r_n + \gamma i_n - \tau^{\mathrm{g}} r_n \end{cases}$$

Notiamo che, essendo $s_n + i_n + r_n = N$, la popolazione non varia nel tempo in conseguenza alla natalità e mortalità. Introduciamo la *capacità riproduttiva di base*

$$\mathcal{R}_0 = \frac{c\chi}{\gamma + \tau^{\mathrm{g}}}$$

Tentiamo di dare un significato a questo numero. Se ipotizziamo che il numero di individui infetti da un giorno, da due giorni, da tre giorni e così via fino a μ giorni sia lo stesso, e non ve ne siano infetti da $\mu + 1$ giorni, allora possiamo dedurre

1. che la durata dell'infezione sia di μ giorni
2. che ogni giorno la frazione $1/\mu$ di infetti il giorno dopo non sarà più infetta

Siccome il tasso di infetti che viene a mancare è dato dalla somma dei tassi di guarigione e di morte, si ha $1/\mu = \gamma + \tau^{\mathrm{g}}$. Dunque, $\mathcal{R}_0$ ha il significato di numero di persone infettate da un singolo individuo infetto per tutta la durata dell'infezione. Più questo numero è grande, più la malattia si diffonde.

In particolare, se $\mathcal{R}_0 > 1$, è possibile la seguente situazione per tempi molto grandi

$$s_\infty = \frac{N}{\mathcal{R}_0}, \quad i_\infty = \frac{\tau^{\mathrm{g}} N}{\gamma + \tau^{\mathrm{g}}} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right), \quad r_\infty = \frac{\gamma N}{\gamma + \tau^{\mathrm{g}}} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)$$

Ciò significa che se si sostituisce s_n e s_{n+1} con s_∞, i_n e i_{n+1} con i_∞ e r_n e r_{n+1} con r_∞ nel sistema sopra si ottiene un'identità. Si osserva che il numero di infetti i_∞ è costante e diverso da zero (malattia *endemica*). Notiamo che $\mathcal{R}_0 < 1$ darebbe un numero di infetti negativo, pertanto l'infezione si estinguerebbe in tempo finito. Come far fronte? O riducendo il valore di $\mathcal{R}_0$ a uno (e l'unica possibilità di intervento è quella di aumentare il tasso di mortalità), oppure con un *vaccino*. Consideriamo il tasso di vaccinazione giornaliero v che sposta un certo numero di persone dal gruppo degli infettabili al gruppo degli immuni. Il modello diventa allora

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n - \lambda_n s_n + \tau^{\mathrm{g}} N - \tau^{\mathrm{g}} s_n - v s_n \\ i_{n+1} = i_n + \lambda_n s_n - \gamma i_n - \tau^{\mathrm{g}} i_n \\ r_{n+1} = r_n + \gamma i_n - \tau^{\mathrm{g}} r_n + v s_n \end{cases}$$

che ammette la seguente soluzione con malattia endemica:

$$s_\infty = \frac{N}{\mathcal{R}_0}, \quad i_\infty = \frac{\tau^{\mathrm{g}} N}{\gamma + \tau^{\mathrm{g}}} \left(1 - \frac{\tau^{\mathrm{g}} + v}{\tau^{\mathrm{g}} \mathcal{R}_0}\right), \quad r_\infty = \frac{\gamma N}{\gamma + \tau^{\mathrm{g}}} \left(1 - \frac{\tau^{\mathrm{g}} + v}{\tau^{\mathrm{g}} \mathcal{R}_0}\right) + \frac{vN}{\tau^{\mathrm{g}} \mathcal{R}_0}$$

Tale soluzione non è ammissibile per $\tau^{\mathrm{g}} \mathcal{R}_0 < \tau^{\mathrm{g}} + v$, cioè $v > \tau^{\mathrm{g}}(\mathcal{R}_0 - 1)$ e, in tal caso, l'unica possibilità è

$$s_\infty = \frac{N}{\mathcal{R}_0}, \quad i_\infty = 0, \quad r_\infty = \frac{vN}{\tau^{\mathrm{g}} \mathcal{R}_0}$$

ossia uno stato di *immunità di massa* (o di gregge).

Riferimenti bibliografici

[1] L'informatore agrario. `http://www.informatoreagrario.it/`.

[2] Geo demo ISTAT. `http://demo.istat.it/`.

[3] Wikipedia, the free encyclopedia. `http://www.wikipedia.org`.