La matematica delle dinamiche socio-economiche

Progetto Lauree Scientifiche

Giacomo Albi

Dipartimento di Informatica
Università di Verona, Italia

www.giacomoalbi.com

giacomo.albi@univr.it

Outline

Complessità nella realtà

Sistemi Complessi

" Il tutto è maggiore della somma delle parti. " (Aristotele).

Sistemi Complessi

Un *sistema complesso* è l'insieme di connessioni dato dalle sue singole parti, che interagiscono in modo non lineare tra loro e che danno luogo a *dinamiche emergenti*.

- Gli ecosistemi (anche i più semplici)
- il corpo umano (che composto da sottosistemi quali: sistema endocrino, sistema linfatico, sistema respiratorio, sistema limbico, sistema immunitario, sistema nervoso, mente, etc...)
- i sistemi sociali,
- i sistemi economici.
- ... altri?

"La complessità è una parola problema e non una parola soluzione" (Edgar Morin)

La matematica come chiave di lettura

Il Saggiatore , Galileo Galilei, 1623

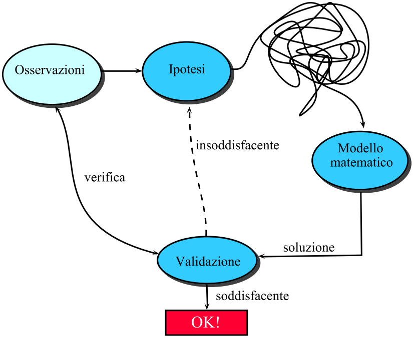
La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi
(io dico l'universo),
ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua,
e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.
Egli è scritto in lingua matematica,
e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche,
senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola;
senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il modello matematico

Il modello matematico

L'utilizzo di un approccio matematico per lo studio della realtá, pu essere riassunto nella seguente serie di domande:

- Possiamo capire *in che modo* si generano determinati fenomeni?
- Possiamo descrivere i fenomeni attraverso *leggi matematiche*?
- Tali fenomeni sono *riproducibili*?
- Possiamo fare *previsioni* su questi processi?

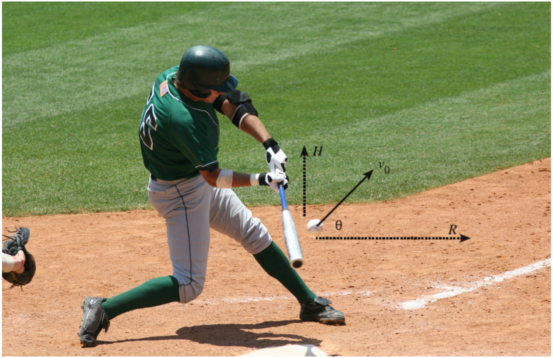


Partita di baseball:

Il lanciatore scaglia la pallina verso il battitore per tentare lo strike, il battitore riesce ad intercettare la palla che viene scagliata in aria con una determinata traiettoria, qual è la traiettoria che percorrerà la pallina dopo l'impatto?

Un buon Modello...

1. *Non troppo semplicistico*: si rischia di perdere i dettagli essenziali.
2. *Non troppo complicato*: si rende più difficile e costosa l'analisi, si rischia di inserire particolari inutili al fine della comprensione del fenomeno.



Cosa è la Teoria dei Giochi?

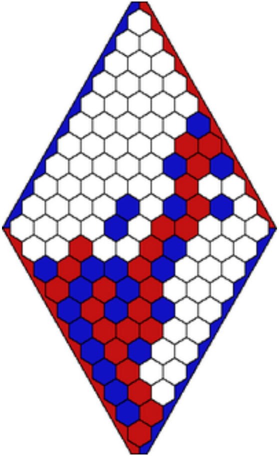


Figure: Gioco dell'Hex

È tutto un gioco!

Nel momento in cui due o più persone si trovano ad avere a che fare tra loro, ad interagire, stanno giocando un gioco!

Figure: Qui sopra una situazione di traffico stradale e a sinistra Giulietta e Romeo

Esempi

Compra-Vendita

Al mercato un negoziante può scegliere se **abbassare** o **aumentare** i prezzi dei sui prodotti, contemporaneamente **i clienti** possono decidere se **cambiare bancarella** o **comprare** il prodotto offerto dal negoziante. Che prezzo deve fare il negoziante?

Il calcio di rigore

Un calciatore si trova a battere un calcio di rigore dove deve tirare per massimizzare le chance di fare goal?
E **il portiere** dove deve buttarsi per avere maggiori possibilità di parare il tiro?

La sparatoria

Il Buono, il Brutto e il Cattivo (Sergio Leone, 1967). Una delle scene finali è il duello tra i tre...foste uno di loro a chi sparereste per primo?

Il modello

la TdG vuole analizzare i comportamenti dei decisori, **giocatori**, e studiare le situazioni, **giochi**, in cui si trovano ad interagire, perseguendo obiettivi comuni, diversi o conflittuali, tramite la scelta di determinate azioni, **strategie** .

- La situazione $\Longrightarrow$ il gioco
- gli agenti $\Longrightarrow$ i giocatori
- le azioni $\Longrightarrow$ le strategie
- le conseguenze $\Longrightarrow$ i payoff

Obiettivo

Nello specifico la TdG può avere due ruoli:

1. (ruolo positivo) interpretare la realtà, ossia *spiegare* come mai, in certe situazioni di conflitto, i giocatori adottano certe strategie e certe tattiche.
2. (ruolo prescrittivo) *determinare* quali situazioni di equilibrio possono (o non possono) verificarsi come risultato dell'interazione dei due soggetti.

Ipotesi

La TdG pone due ipotesi fondamentali:

1. La *razionalità* dei giocatori, ovvero che sappiano dare un'ordine di preferenza ai vari scenari possibili e che ciascuno determini l'esito che più preferisce.
2. Che i giocatori siano *intelligenti*, cioè che abbiano capacità logiche e deduttive di fronte alla situzione in cui si trovano ad interagire, sui comportamenti propri e degli altri giocatori.

Domanda

L'ipotesi di *perfetta razionalità* e *perfetta intelligenza* non sono troppo restrittive?

Un po' di storia...

- 1944 *Theory of Games and Economic Behavior*, John von Neumann e Oskar Morgenstern. Una descrizione matematica di come suddividersi le risorse in caso di una vincita di due persone.
- 1950 *Non Cooperative Game*, John F.Nash. Analisi di una classe di giochi dove i giocatori erano in una situazione di competizione.


Figure: A sinistra von Neumann e a destra John F. Nash

Un po' di storia...

- 1944 *Theory of Games and Economic Behavior*, John von Neumann e Oskar Morgenstern. Una descrizione matematica di come suddividersi le risorse in caso di una vincita di due persone.
- 1950 *Non Cooperative Game*, John F.Nash. Analisi di una classe di giochi dove i giocatori erano in una situazione di competizione.

..più recente

- 1994 Premio Nobel per l'economia. J.F. Nash, J.C. Harsanyi, R. Selten. Giochi non cooperativi, *l'equilibrio di Nash*.
- 2001 *A beautiful mind*, film di Ron Howard con Russel Crowe sulla vita di J.F. Nash.
- 2005 Premio Nobel per l'economia. Robert Aumann e Thomas Schelling. Giochi cooperativi.

Figure: A sinistra Aumann e a destra Schelling

Dilemma del Prigioniero

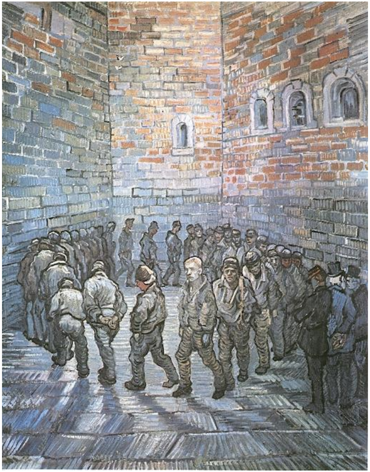


Figure: La ronda dei prigionieri, Vincent Van Gogh, 1890.

Dilemma del Prigioniero

Due criminali vengono accusati di aver commesso un reato.
Gli investigatori li arrestano entrambi e li chiudono in due celle diverse impedendo loro di comunicare. Ad ognuno di loro vengono date due scelte: **confessare** l'accaduto, oppure **non confessare**.

Dilemma del Prigioniero

Viene inoltre spiegato loro che:
Se solo uno dei due confessa, chi ha confessato evita la pena; l'altro viene però condannato a 10 anni di carcere.
Se entrambi confessano, vengono entrambi condannati a 7 anni.
Se nessuno dei due confessa, entrambi vengono condannati a 1 anno.Ciasun prigioniero ovviamente vuole minimizzare gli anni di prigione. Quale azione sceglieranno i due?

Questa famosa situazione è stata proposta la prima volta nel 1950 dal matematico Albert Tucker.

Un qualsiasi gioco si può schematizzare in una tabella detta **forma strategica** o **forma normale**.

Forma Strategica per il Dilemma del Prigioniero

La seguente tabella è indicata anche come **matrice dei payoff** o **bimatrice**:

I \ II	C	NC
C	7,7	0,10
NC	10,0	1,1

Table: il Dilemma del Prigioniero

Analisi del Gioco

Con apparente paradossalità, l'unica soluzione possibile del Dilemma del Prigioniero è che entrambi *confessino*, sebbene *non confessare* potrebbe essere la migliore per entrambi.

I \ II	C	NC
C	7,7	0,10
NC	10,0	1,1

Table: il Dilemma del Prigioniero

Il Dilemma del Prigioniero è un esempio di gioco *non cooperativo*, a *informazione completa* e *simmetrico*.

Non Cooperazione

I giocatori si trovano in una situazione conflittuale tra loro, non possono accordarsi tra loro.

Informazione completa

I giocatori conoscono tutte le possibili strategie a disposizione degli altri. Però non quale di queste azioni verrà effettuata.

Simmetrico

I giocatori hanno lo stesso set di strategie e ottengono gli stessi risultati in condizioni analoghe.

Strategia Fortemente Dominante

Una strategia **A** si dice *fortemente dominante* su una strategia **B**, se per qualsiasi possibile configurazione i payoff di **A** sono sempre *preferibili* ($\succ$) a quelli dati scegliendo **B**.

	S_1	S_2	$\dots$	S_n
A	a_1	a_2	$\dots$	a_n
	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
B	b_1	b_2	$\dots$	b_n

Es: Nel Dilemma del Prigioniero Confessare domina strettamente Non Confessare.

Osservazione: Eliminando le strategie dominate escludiamo i comportamenti inefficienti e ci avviciniamo alla soluzione del gioco.

Dilemma del Prigioniero generale

In generale un gioco ha la struttura del Dilemma del Prigioniero se possiamo scriverlo in forma normale in questo modo:

I \ II	C	NC
C	a,a	b,c
NC	c,b	d,d

E vale il seguente ordine di preferenze

$$c \succ d \succ a \succ b$$

Guerra Fredda

Pensiamo agli **Stati Uniti** e all'**URSS** durante la Guerra Fredda, come ai due prigionieri, la confessione come l'**armamento** con l'atomica (per contro la non confessione equivarrebbe al **disarmo unilaterale**).
Il dilemma descrive come per le due nazioni fosse inevitabile al tempo la corsa agli armamenti, benché questo risultato finale fosse non ottimale per nessuna delle due superpotenze (e per l'intero mondo).

Il traffico

La scelta di spostarsi in mezzo pubblico o con l'auto funziona spesso come il dilemma del Prigioniero.
Se tutti prendessero l'autobus, ci sarebbe meno traffico, e gli autobus sarebbero molto efficienti, d'altra parte l'auto è più veloce dell'autobus (non deve fermarsi a tutte le fermate!).
Allora tutti utilizzano l'auto, con la conseguenza di strade intasate dal traffico e code.

Domanda

Nel caso del Dilemma del Prigioniero abbiamo visto che la soluzione si trova osservando che la strategia C *domina strettamente* la strategia NC.

- Ma possiamo risolvere un gioco sempre in questo modo, escludendo le strategie dominate?
- Esistono strategie che non sono dominate e dominanti?
- Come risolviamo il nostro Gioco in queste situazioni?

Strategia debolmente dominata

Una strategia **A** si dice *debolmente dominante* su una strategia **B**, se per qualsiasi possibile configurazione i payoff di **A** sono sempre *preferibili* o *equivalenti*, ($\succeq$) rispetto a quelli dati dalla strategia **B**, con almeno un' equivalenza soddisfatta esattamente. (Indichiamo la singola equivalenza con il simbolo $\sim$)

	S_1	S_2	$\dots$	S_n
A	a_1	a_2	$\dots$	a_n
	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
B	b_1	b_2	$\dots$	b_n

A differenza delle strategie fortemente dominate le strategie debolmente non possono essere eliminate per determinare la soluzione del gioco.

Caccia del Cervo

Due uomini in una battuta di caccia possono scegliere se tentare la cattura di un cervo o di una lepre.
La loro decisione dovrà avvenire senza sapere la decisione altrui e tenendo conto che per catturare un cervo occorre che entrambi decidano di scegliere quest'ultimo come obiettivo, mentre per la lepre è sufficiente l'impegno di un solo uomo.
Inoltre la lepre costituisce un premio meno soddisfacente rispetto al cervo, che costituisce un pasto migliore, anche se questo verrà diviso tra i due cacciatori che hanno cooperato.

Il gioco nasce da un problema posto da J.J. Rosseau in *Discorso sull'origine e i fondamenti della disuguaglianza fra gli uomini*,(in Scritti politici, vol. I, Editori Laterza, Bari, 1971, p. 176).

Caccia al Cervo

La forma strategica del gioco è la seguente:

I\II	Cervo	Lepre
Cervo	4, 4	0, 1
Lepre	1, 0	1, 1

Table: Caccia al Cervo

4 e 1 sono i valori di soddisfazione che i nostri cacciatori associano nel catturare il cervo e la lepre.

Formulazione generale

La tabella (32) è un caso particolare della seguente bimatirce:

I╲II	Cervo	Lepre
Cervo	a, a	b, c
Lepre	c, b	d, d

dove vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$a \succ d \succeq c \succ b.$$

La differenza fondamentale rispetto al Dilemma del Prigioniero, che non ci permette di concludere l'analisi, sta proprio in quel segno di minore e uguale.

Osservazione

La TdG vuole determinare la soluzione di *equilibrio* in un gioco, nel caso del Dilemma del Prigioniero era facile individuare la *soluzione stabile*.
Nella Caccia al Cervo, la strategia non coopertiva, Lepre, non *domina strettamente* la strategia cooperativa, come era nel caso di confessare (C) su non confessare (NC).
Quale delle due è la soluzione del gioco?

Definizione 1: Equilibrio di Nash

Una coppia di strategie è un *equilibrio di Nash* di un gioco se e solo se ciascuna strategia è la *migliore risposta* a tutte le altre possibili strategie.

Definizione 2: Equilibrio di Nash

Una coppia di strategie è un *equilibrio di Nash* se ciascun giocatore non può migliorare la sua situazione cambiando unilateralmente la propria strategia.

Questa nuova definizione di equilibrio fu rivoluzionaria per l'economia classica, fondata sulle teorie di Adam Smith (Kirkcaldy, 5 giugno 1723 - Edimburgo, 17 luglio 1790).
Celebre la sua metafora della *Mano Invisibile*.

..Caccia al Cervo con un'arma in piú!

Vogliamo trovare la *migliore risposta* di ciascun giocatore, nei diversi scenari che possono realizzarsi:

- Per il giocatore I equivale a trovare la soluzione ottima nel caso in cui il giocatore B giochi Cervo e la soluzione ottima nel caso in cui giochi Lepre.
- Identicamente per il giocatore II.

L'equilibrio di Nash (in questo caso *gli* equilibri di Nash) risultano essere la coppia di strategie che forniscono una *migliore risposta* per entrambi i giocatori!

Vediamo un modo di procedere per determinare l'equilibrio di Nash

Partiamo dal giocatore I e per ogni possibile scenario identifichiamo la *migliore risposta* in rosso:

I \ II	Cervo	Lepre
Cervo	4, 4	0, 1
Lepre	1, 0	1, 1

Table: Caccia al Cervo

Partiamo dal giocatore I e per ogni possibile scenario identifichiamo la *migliore risposta* in rosso:

I \ II	Cervo	Lepre
Cervo	4, 4	0, 1
Lepre	1, 0	1, 1

Table: Caccia al Cervo

Partiamo dal giocatore I e per ogni possibile scenario identifichiamo la *migliore risposta* in rosso:

I \ II	Cervo	Lepre
Cervo	4, 4	0, 1
Lepre	1, 0	1, 1

Table: Caccia al Cervo

Partiamo dal giocatore I e per ogni possibile scenario identifichiamo la *migliore risposta* in rosso:

I \ II	Cervo	Lepre
Cervo	4, 4	0, 1
Lepre	1, 0	1, 1

Table: Caccia al Cervo

Partiamo dal giocatore I e per ogni possibile scenario identifichiamo la *migliore risposta* in rosso:

I\II	Cervo	Lepre
Cervo	4, 4	0, 1
Lepre	1, 0	1, 1

Table: Caccia al Cervo

Facciamo lo stesso per il giocatore II indicando la *miglior risposta* in blu:

I \ II	Cervo	Lepre
Cervo	4, 4	0, 1
Lepre	1, 0	1, 1

Table: Caccia al Cervo

Facciamo lo stesso per il giocatore II indicando la *miglior risposta* in blu:

I \ II	Cervo	Lepre
Cervo	4, 4	0, 1
Lepre	1, 0	1, 1

Table: Caccia al Cervo

Facciamo lo stesso per il giocatore II indicando la *miglior risposta* in blu:

I \ II	Cervo	Lepre
Cervo	4, 4	0, 1
Lepre	1, 0	1, 1

Table: Caccia al Cervo

Le coppie di strategie che hanno entrambi i payoff colorati sono i nostri *equilibri di Nash*!

Operiamo lo stesso procedimento sul Dilemma del Prigioniero:

I \ II	C	NC
C	7,7	0,10
NC	10,0	1,1

Table: il Dilemma del Prigioniero

Operiamo lo stesso procedimento sul Dilemma del Prigioniero:

I \ II	C	NC
C	7,7	0,10
NC	10,0	1,1

Table: il Dilemma del Prigioniero

Eliminazione delle strategie dominate

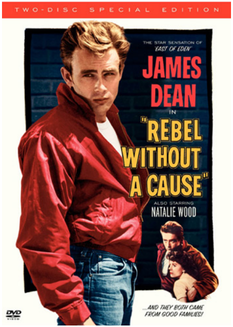
Se eliminando le strategie dominate otteniamo un'unica soluzione questa coincide con l'*Equilibrio di Nash*, trovato usando la *migliore risposta*.

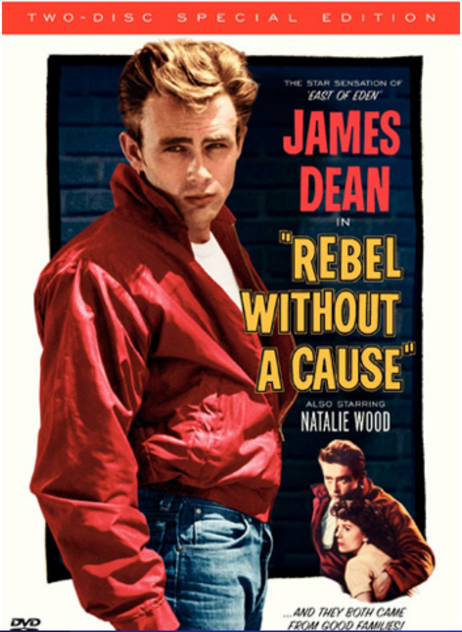
Ancora Giochi!

Figure: *Alice nel Paese delle Meraviglie*, (Lewis Carrol 1865)

Il Gioco del Pollo

La situzione descritta dal Gioco del Pollo (*Chicken* in inglese ha lo stesso significato di coniglio in italiano, vale a dire fifone, pauroso) viene presentata raccontando la sfida tra auto nel film *Gioventù bruciata*, film con James Dean.




TWO-DISC SPECIAL EDITION
THE STAR SENSATION OF
'EAST OF EDEN'
JAMES
DEAN
IN
"REBEL
WITHOUT
A CAUSE"
ALSO STARRING
NATALIE WOOD
...AND THEY BOTH CAME
FROM GOOD FAMILIES!
DVD

Gioco del Pollo

Due ragazzi si sfidano in una corsa automobilistica lanciando simultaneamente le auto verso un dirupo. Se entrambi sterzano prima di arrivarvi, faranno una magra figura con il gruppo di pari; se uno sterza e l'altro continua per un tratto di strada maggiore, il primo farà la figura del fifone, mentre il secondo guadagnerà il rispetto dei pari. Se entrambi continuano sulla strada, moriranno.

Osservazione:

Se l'ipotesi di razionalità ed intelligenza è valida, perché mai i due giocatori dovrebbero sfidarsi in un gioco talmente stupido? Non dovrebbero nemmeno prendere in considerazione di cominciare a giocare!

Gioco del Pollo

Il gioco è ad informazione completa e simmetrico, la matrice dei payoff è:

I\II	Sterza	Prosegue
Sterza	0, 0	-1, 1
Prosegue	1, -1	$-\infty, -\infty$

Table: The Chicken Game

Come nel Dilemma del Prigioniero la cooperazione di entrambi non è un equilibrio stabile e come nella Caccia al Cervo nessuno dei due giocatori ha una strategia dominante.

Quali sono gli equilibri di Nash?

Analisi del Gioco

Ci sono due equilibri di Nash: (Sterza, Prosegue) e (Prosegue, Sterza).
In questo caso il gioco viene detto di *non-coordinamento*, poiché ad entrambi conviene adottare la strategia opposta rispetto a quella dell'altro giocatore.
Naturalmente ognuno dei due giocatori ha una predilezione per un equilibrio in particolare.
Possiamo capire quale dei due è *la* soluzione del nostro gioco?

Battaglia dei Sessi

Alberto e Beatrice vogliono organizzare la serata. Alberto sarebbe molto felice se potesse vedere una partita di calcio, mentre Beatrice vorrebbe andare a teatro. Contemporaneamente entrambi preferiscono andare nello stesso posto, piuttosto che da soli in posti diversi. Per mettere alla prova la loro intesa decidono di scrivere su un biglietto quello che vogliono fare e poi senza possibilità di cambiare fare quello che hanno scritto.

Forma Normale del Gioco

Il gioco appena descritto è un gioco di coordinamento, ad informazione completa. Diamone una possibile rappresentazione strategica:

A \ B	Partita	Teatro
Partita	3,2	0,0
Teatro	0,0	2,3

Table: La Battaglia dei Sessi

Anche in questo caso non ci sono strategie strettamente dominanti, ma il gioco presenta comunque due equilibri di Nash. Quali?

Battaglia dei Sessi Variante

Verosimilmente per entrambi la strategia (Partita, Teatro) avrà un'utilità maggiore di (Teatro, Partita), Alberto preferirà andare alla partita e Beatrice a teatro anche soli, piuttosto che il viceversa.

A \ B	Partita	Teatro
Partita	3,2	1,1
Teatro	0,0	2,3

Table: La Battaglia dei Sessi modificata

L'analisi del gioco in questa seconda rappresentazione non cambia, gli equilibri sono gli stessi, scritto in questo modo però è molto simile al Gioco del Pollo.

Giochi a somma zero

Matching pennies

Due giocatori (I e II) fissano le seguenti regole:
Entrambi mettono in gioco una moneta da 1 euro, ciascuno decide, senza mostrare al proprio avversario, una faccia della moneta, diciamo Testa (T) o Croce (C). Dopo di che contemporaneamente scoprono la loro scelta.
Se sono entrambe Teste o entrambe Croci il giocatore I vince la moneta dell'avversario.
Altrimenti se una è Testa e l'altra Croce il giocatore II si impossessa della moneta dell'avversario.

Forma normale di Matching Pennies

Formalizziamo il gioco in questo modo:

I \ II	T	C
T	1,-1	-1,1
C	-1,1	1,-1

Table: Matching Pennies

Osservate che se sommiamo i payoff dei giocatori in ogni situazione il risultato è zero. Questo tipo di giochi è detto a *somma zero*, ovvero ciò che guadagna uno lo perde l'altro.

Giochi a somma zero

Si dice gioco a *somma zero* se, per ogni scenario realizzabile, le vincite di un giocatore corrispondono alle perdite dell'altro e viceversa.

Classici esempi di giochi a somma zero sono: scacchi, dama, briscola, Hex, pari e dispari... e nella vita quotidiana quali sono le nostre situazioni "a somma zero"?
Consiglio di lettura: Lester C. Thurow, *La società a somma zero*, ed. Il Mulino, Bologna 1981.

Morra Cinese

Anche il gioco di Morra Cinese è un gioco a *somma zero*, e fornisce la seguente matrice dei payoff:

I \ II	C	S	F
C	0,0	1,-1	-1,1
S	-1,1	0,0	1,-1
F	1,-1	-1,1	0,0

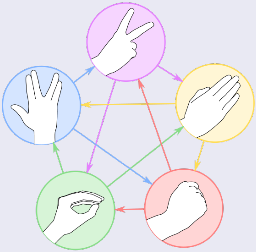
Table: Morra Cinese: Carta (C), Sasso (S), Forbice (F).

Anche in questo caso non sono presenti equilibri di Nash.

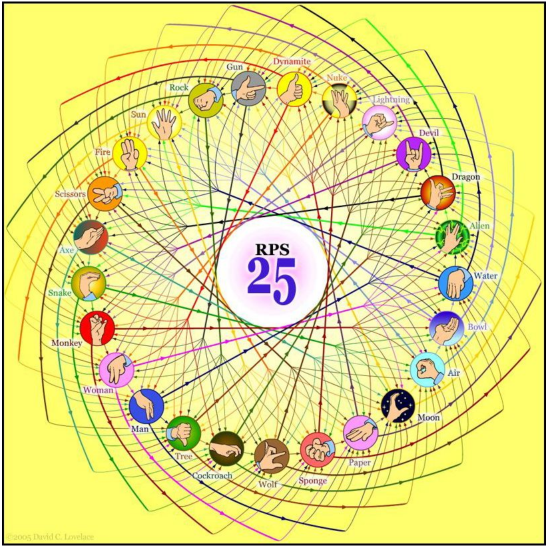

the BIG
BANG
THEORY

Rock Paper Scissor Lizard and Spock!

Un'estensione di Morra Cinese è stata resa famosa dal telefilm *The Big Bang Theory*.Il gioco introduce due elementi in più che sono la Lucertola e Spock (noto personaggio di Star Trek). Le regole seguono lo schema:



Come si scrive la matrice dei payoff? E gli equilibri di Nash?
....si può fare anche meglio di 5 sole mosse



Buon diverimento!

http://www.newgrounds.com/portal/view/319609

Strategie Miste

Figure: Carta sasso forbice

Equilibri?

Abbiamo visto che il gioco $Matching\ \ Pennies$ *non ha equilibri* di Nash!
Ogni coppia di strategie non è punto stabile del problema.
Se il giocatore A gioca Testa il giocatore B giocherà Croce, ma se B gioca Croce allora anche A giocherà Croce, il chè farà muovere B su Testa...e così via, in un ciclo continuo da una coppia di strategie all'altra.
Possiamo determinare un equilibrio in questa situazione di completa *instabilità*?

Soluzione

L'*idea* è di correggere questa questa instabilità aggiungendo casualità alle nostre scelte!

Definizione formale: Strategie miste

Una *strategia mista* per un giocatore è una distibuzione di probabilità sul suo insieme di possibili strategie.

Definizione informale: Strategie miste

Un giocatore ha a disposizione un set di strategie differenti, e attribuisce a ciascuna strategia un numero da 0 a 1, facendo in modo che la somma totale di questi numeri, rispetto al numero di strategie, sia proprio 1. La *strategia mista* è il vettore di questi numeri.

Un esempio:

Un giocatore può scegliere tre strategie possibili, A, B, C e decide che con probabilità $1/2$ gioca A, con probabilità $1/6$ gioca B e con probabilità $1/3$ gioca C.
Sommando risulta: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$.
Quindi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ è una strategia mista sul set di strategie (A, B, C).

$Strategia$	A	B	C
$Probab.$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Interpretazione di Strategia Mista

1. **Gioco iterato**: La strategia mista è *la frequenza* con cui abbiamo giocato ogni singola strategia.
2. **Gioco collettivo**. In una popolazione la strategia mista è data dalla *percentuale di persone* che giocano ciascuna strategia possibile.
3. **Gioco soggettivo**. La strategia mista del giocatore I rappresenta *l'insieme di "credenze"* del giocatore II, ovvero, quanta percentuale associa il giocatore II al fatto che il giocatore I giochi una strategia.

Strategie Pure

Una *strategia pura* è una *strategia mista* in cui tutti gli elementi del vettore sono zero tranne uno.
In altre parole, una *strategia pura* è una *strategia mista* dove con probabilità uno si gioca una determinata strategia.

Domande

- Come usiamo queste strategie miste?
- La nostra definizione di equilibrio di Nash è ancora valida?
- Se si come la applichiamo?

Matching Pennies e Strategie Miste

Sia $(p, 1-p)$ la strategia mista del Giocatore I rispetto a giocare Testa o Croce, con $p \in [0, 1]$.
Sia $(q, 1-q)$ la strategia mista del Giocatore II rispetto a giocare Testa o Croce, con $q \in [0, 1]$.
Allora qual è *la vincita attesa* da I e quale quella da II rispetto alla scelta di p o di q?

Vincita attesa

La *vincita attesa* di un giocatore rispetto alla coppia di strategie miste, sue e dell'altro giocatore, è la *media dei payoff* del giocatore, pesati rispetto alla probabilità che i diversi scenari si realizzino.

Strategie miste in matching pennies

Rappresentiamo in forma strategica il gioco e mettiamo in evidenza le strategie miste dei singoli giocatori:

I \ II	T	C
T	1,-1	-1,1
C	-1,1	1,-1

Table: Matching Pennies

Strategie miste in matching pennies

Rappresentiamo in forma strategica il gioco e mettiamo in evidenza le strategie miste dei singoli giocatori:

		q	1-q
	I \ II	T	C
p	T	1,-1	-1,1
1-p	C	-1,1	1,-1

Table: Matching Pennies

Quale è la probabilità di realizzazione di ogni possibile combinazione di strategie?

Strategie miste in matching pennies

Sotto l'ipotesi di *indipendenza* delle due strategie miste, le probabilità sono le seguenti:

		q	1-q
	I \ II	T	C
p	T	pq	p(1-q)
1-p	C	(1-p)q	(1-p)(1-q)

Table: Matching Pennies

L'ipotesi di *indipendenza* (= le probabilità vengono moltiplicate) tra strategie miste, è una conseguenza immediata dell'ipotesi di *non cooperazione* dei giocatori.

Vincita Attesa per matching pennies

La vincita attesa del Giocatore I è:

$$V_I(p,q) = (1)\cdot pq + (-1)\cdot p(1-q) +$$
$$+(-1)\cdot(1-p)q + (1)\cdot(1-p)(1-q).$$

Si può formalizzare il tutto come prodotto di vettori e matrici: Sviluppando i diversi prodotti e semplificando si ottiene:

$$V_I(p,q) = (2q-1)(2p-1)$$

Domanda: Quale è la miglior strategia mista da utilizzare per massimizzare la nostra vincita attesa?
Ovvero per quali valori di p, $V_I(p,q)$ assume valore massimo?

Equilibrio di Nash in strategie miste

Equilbrio di Nash in strategie miste

La definizione di *equilibrio di Nash* si estende in modo analogo nel caso di strategie miste:
Una coppia di *strategie miste* è un'equilibrio di Nash se ogni giocatore non ha convenienza a modificare unilateralmente la sua strategia mista.

Miglior risposta

Quindi per ciascun giocatore trovare l'equilibrio di Nash equivale a determinare quale sia la *miglior risposta* per ogni possibile strategia mista dell'altro giocatore, e viceversa.

Vediamo come nel gioco matching pennies (e in generale) sia possibile fare una cosa del genere.

Miglior risposta

Il giocatore I vuole *massimizzare* la sua vincita attesa:

$$V_I(p,q) = (2q-1)(2p-1).$$

Determiniamo *la migliore risposta* per ogni possibile strategia mista del giocatore II, ovvero per ogni valore fissato di q e la indichiamo con p^*.
Quindi in base al valore di q il giocatore I farà la sua scelta di p^*.

$$\begin{cases} p^* = 0 & se \quad 0 \leq q < \frac{1}{2} \\ p^* \in [0,1] & se \quad q = \frac{1}{2} \\ p^* = 1 & se \quad \frac{1}{2} < q \leq 1 \end{cases}$$

Osserviamo che nel caso in cui il giocatore II giochi una strategia mista $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ il giocatore I può giocare qualsiasi tipo di strategia!

...e per il giocatore II

Dato che il gioco è a *somma zero*, la vincita attesa del giocatore II sarà l'opposto di quella del giocatore I:

$$V_{II}(p,q) = -V_I(p,q)$$

Allora

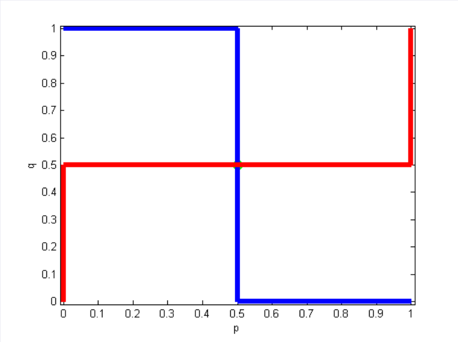
$$V_{II}(p,q) = -(2q-1)(2p-1)$$

Questo ci dice che la *miglior risposta* del giocatore II sarà data da:

$$\begin{cases} q^* = 1 & se \quad 0 \leq p < \frac{1}{2} \\ q^* \in [0,1] & se \quad p = \frac{1}{2} \\ q^* = 0 & se \quad \frac{1}{2} < p \leq 1 \end{cases}$$

Curva di Reazione

Possiamo rappresentare secondo il seguente grafico, detto *curva di reazione* le migliori risposte di entrambi i giocatori:



In rosso la miglior risposta del giocatore I e in blu del giocatore II.
Le intersezioni tra le due *migliori risposte* corrispondono all'equilibrio di Nash in strategie miste, in questo caso: $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

Calci di Rigore

I calcio di rigore si possono modellare matematicamente come il gioco Matching Penny.
I calciatori lo sanno e così utilizzano le strategie miste per decidere da che parte tirare, e i portieri da che parte buttarsi! La matrice dei payoff è:

C╲P	a sx	a dx
a sx	0,1	1,0
a dx	1,0	0,1

che ha un unico equilibrio di Nash in strategie miste: $(1/2, 1/2)$ (Esercizio: verificare!)
Attenzione, non è a somma zero!

Calci di rigore: modello più verosimile.

Supponiamo ora che il calciatore giochi sia destro, e abbia una probabilità di indirizzare correttamente il tiro di destro del 90% e del 70% tirando a sinistra.
Il portiere invece, se si getta dalla parte giusta ha una probabilità di parata del 50%.
La matrice dei payoff si scrive:

C╲P	a sx	a dx
a sx	35, 65	70,30
a dx	90,10	45, 55

anche in questo caso non ci sono equilibri di Nash in strategie pure.