Massimi e minimi, tangenti e numeri infinitamente piccoli. . .

S. Baldo

Università di Verona

Istituto alle Stimate, 17/3/2022

L'invenzione di nuovi numeri nella storia dell'umanità

Questa nostra chiaccherata ha lo scopo di raccontarvi alcuni fatti matematici che ritengo interessanti ed importanti... ma anche di convincervi, se ci riuscirò, che la storia della matematica ha molto in comune con il resto della storia della nostra civiltà.
Infatti essa ha preso e può prendere strade diverse e inaspettate non solo per le esigenze scientifiche che di volta in volta si presentano... ma anche per le passioni, il carattere, le simpatie e le antipatie degli esseri umani che ne sono protagonisti.
In particolare, parleremo dell'introduzione di nuovi numeri che hanno fatto avanzare enormemente la scienza, ma hanno causato anche polemiche roventi: numeri che sono infinitamente piccoli o infinitamente grandi.

Insiemi numerici sempre più grandi...

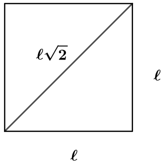
Nel corso della storia è sorta più volte l'esigenza di allargare l'insieme dei numeri comunemente accettati:

$\mathbb{N}$	$\subset$	$\mathbb{Z}$	$\subset$	$\mathbb{Q}$	$\subset$
?		~ 2000 a.C.		~ 2000 a.C.	
		Babilonia		*Antico Egitto...*	

$\subset$	$\mathbb{R}$	$\subset$	$\mathbb{C}$
	~ 500 a.C.		XVI sec.
	Ippaso di Metaponto?		Del Ferro, Tartaglia,
	Bolzano, Dedekind (XIX sec.)		Cardano, Bombelli

La scoperta dei numeri irrazionali: Ippaso(?)

La leggenda vuole che attorno al 500 a.C., Ippaso di Metaponto scoprisse una conseguenza *devastante* del teorema di Pitagora (e del teorema di fattorizzazione unica dei numeri naturali):
Se usiamo il lato come unità di misura, non esiste un numero razionale che misuri esattamente la diagonale del quadrato



Più precisamente, non esiste nessun numero razionale il cui quadrato sia 2... Conseguenza: sulla retta (euclidea o cartesiana) ci devono essere punti la cui ascissa non è razionale.

Il '500 e l'invenzione dei numeri complessi

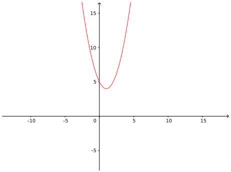
Mille anni dopo ci fu un'altra occasione per allargare l'insieme dei numeri!
Tutti sappiamo (lo sapevano i babilonesi!) che l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ha come soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Alcune equazioni non hanno radici reali: ad esempio applicando la formula a $x^2 - 2x + 5 = 0$ ci troviamo a dover calcolare $\sqrt{-16}$.
Poichè il quadrato di un qualunque numero reale è ≥ 0, non esiste nessun numero reale positivo il cui quadrato è -16: $\sqrt{-16}$ non esiste nei reali! Ma se *inventiamo* un "numero immaginario" i tale che $i^2 = -1$, la nostra equazione ha come soluzioni $1 \pm 2i \ldots$

Il '500 e l'invenzione dei numeri complessi

Ma perché dovrebbero interessarci queste *soluzioni silvestri o radici sofistiche?* Dopo tutto, la parabola $y = x^2 - 2x + 5$ non interseca affatto l'asse delle x



Non ci interessa poi molto che l'equazione sia soddisfatta dai due *numeri che "non esistono"* $1 \pm 2i \dots$
Ma, come spesso avviene in matematica, l'invenzione di $\sqrt{-1}$ nasce da una necessità pratica!

La risoluzione dell'equazione di terzo grado. . .


L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.
Nouamente posta in luce.
IN BOLOGNA
Nella stamperia di Giouanni Rossi
MDLXXII.
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

Attorno al 1505 Scipione del Ferro scoprì la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado ma non la pubblicò. Il risultato fu poi riscoperto indipendentemente da Tartaglia nel 1534 e pubblicato da Cardano nell' *"Ars Magna"* del 1545. Tartaglia non la prese bene perché aveva rivelato la formula a Cardano in cambio di una promessa di segretezza (ma Cardano, venuto in possesso delle carte di del Ferro, non si sentiva più vincolato da quella promessa). Lo stesso Tartaglia pubblicò la formula nel 1546 nella sua opera *"Quesiti et inventioni diverse de Nicolo Tartalea Brisciano"*, stampata a Venezia e dedicata a Enrico VIII d'Inghilterra.

La risoluzione dell'equazione di terzo grado. . .

AL CLEMENTISSIMO, ET INVIT-
TISSIMO HENRICO, OTTAVO,
PER LA DIO GRATIA RE DE
ANGLIA, DE FRANCIA, ET
DE HIBERNIA, &c.

NICOLO TARTALEA BRISCIANO.

La risoluzione dell'equazione di terzo grado. . .

Quando chel cubo con le coſe apreſſo
Se agualia à qualche numero diſcreto
Trouan dui altri differenti in eſſo
Dapoi terrai queſto per conſueto
Ch'el lor produtto ſempre ſia eguale
Al terzo cubo delle coſe neto
El reſiduo poi ſuo generale
Delli lor lati cubi ben ſottratti
Varra la tua coſa principale.
In el ſecondo de coteſti atti
Quando chel cubo reſtaſſe lui ſolo
Tu oſſeruarai queſt'altri contratti

Del numer ſarai due tal part'à uolo
Che luna in l'altra ſi produca ſchietto
El terzo cubo delle coſe in ſtolo
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi inſieme gionti
Et cotal ſumma ſara il tuo concetto.
El terzo poi de queſti noſtri conti
Se ſolue col ſecondo ſe ben guardi
Che per natura ſon quaſi congionti
Queſti trouai, & non con paſſi tardi
Nel mille cinquecent'e quatro è trenta
Con fondamenti ben ſald'è gagliardi
Nella citta dal mar'intorno centa.

Data l'equazione $x^3 + ax = b$, trovare u e v tali che $u - v = b$ e $u \cdot v = \left(\frac{a}{3}\right)^3$. Allora $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$.

La risoluzione dell'equazione di terzo grado...

Data l'equazione di terzo grado $x^3 + px + q = 0$, si trovano le soluzioni con la formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

La risoluzione dell'equazione di terzo grado...

In alcuni casi la formula conduce a radici quadrate di numeri negativi: questo succede ad esempio con l'equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$, studiata da Cardano.
D'altra parte, è facile accorgersi che $x = 4$ è una radice.
Fattorizzando il polinomio si trova poi che ce ne sono altre due, $x = -2 \pm \sqrt{3}$.
Quindi ci sono 3 radici reali, ma la formula ci chiede di calcolare radici quadrate di numeri negativi.
In seguito Bombelli si accorse che se ci si "inventa" la radice quadrata di -1 e ... si applica la formula facendo finta di niente, si riesce ad ottenere il risultato corretto!
Ecco inventate l'unità immaginaria e i numeri complessi, formalizzati da Rafale Bombelli nell'*Algebra* del 1572.

La risoluzione dell'equazione di terzo grado...

Da allora, le radici quadrate di numeri reali negativi si chiamano numeri immaginari (termine coniato da Descartes) e le somme di un numero reale e di un numero immaginario sono note come numeri complessi.

I nomi inducono a pensare che i numeri reali e quelli immaginari siano intrinsecamente diversi: i primi sarebbero *veri*, i secondi *inventati*. Ma è proprio così? In che senso possiamo dire che i numeri reali sono più veri dei numeri immaginari? Non sono forse entrambi, in un certo senso, un'invenzione dell'intelletto umano? Quacuno di voi ha mai visto (in natura, dal vero!) una *retta euclidea* o un *numero irrazionale*?

Nella matematica attuale i numeri complessi vengono usati alla stessa stregua dei numeri reali (perché consentono di risolvere tantissimi problemi ben più interessanti delle equazioni di terzo grado)...e pochi stanno a chiedersi se esistono o meno!

Attenzione: ci sono pur sempre dei limiti alla creatività...

Quando si inventano nuovi numeri bisogna però aver cura di non introdurre oggetti contraddittori rispetto a verità matematiche che vogliamo conservare. Ad esempio, sappiamo che *non è lecito dividere per* 0 . Ma perché non possiamo inventarci un nuovo numero x che dia il valore di $1/0$?

Attenzione: ci sono pur sempre dei limiti alla creatività. . .

Quando si inventano nuovi numeri bisogna però aver cura di non introdurre oggetti contraddittori rispetto a verità matematiche che vogliamo conservare. Ad esempio, sappiamo che *non è lecito dividere per* 0 . Ma perché non possiamo inventarci un nuovo numero x che dia il valore di $1/0$?
Perché, per definizione di divisione, dovremmo avere $x \cdot 0 = 1$, che contraddice il fatto che qualunque prodotto per 0 deve dare 0 (l'elemento neutro della somma è elemento assorbente per la moltiplicazione): non possiamo definire $1/0$ se non vogliamo rinunciare alle usuali proprietà algebriche delle operazioni!

Attenzione: ci sono pur sempre dei limiti alla creatività. . .

Quando si inventano nuovi numeri bisogna però aver cura di non introdurre oggetti contraddittori rispetto a verità matematiche che vogliamo conservare. Ad esempio, sappiamo che *non è lecito dividere per* 0 . Ma perché non possiamo inventarci un nuovo numero x che dia il valore di $1/0$?
Perché, per definizione di divisione, dovremmo avere $x \cdot 0 = 1$, che contraddice il fatto che qualunque prodotto per 0 deve dare 0 (l'elemento neutro della somma è elemento assorbente per la moltiplicazione): non possiamo definire $1/0$ se non vogliamo rinunciare alle usuali proprietà algebriche delle operazioni!
In realtà, anche l'introduzione della radice quadrata di -1 *non* è completamente indolore: *dobbiamo rinunciare ad una relazione d'ordine compatibile con le operazioni!*

Pierre de Fermat: massimi, minimi, tangenti

Veniamo ad un'altra questione di grande portata, che ha condotto a inventare "numeri di nuovo genere" e ha contribuito in modo fondamentale allo sviluppo della scienza moderna!

Tra il 1636 e il 1638, Pierre de Fermat comincia a perfezionare il cosiddetto *metodo delle tangenti* per risolvere problemi di massimo e minimo.

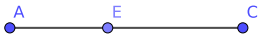
Pierre de Fermat: massimi, minimi, tangenti

Già in una memoria del 1636, inviata a Descartes tramite Mersenne, rivendica la generalità del suo metodo:
Nec unquam fallit methodus; imo ad plerasque quæstiones pulcherrimas potest extendi; ejus enim beneficio centra gravitatis in figuris lineis curvis et rectis comprehensis et in solidis invenimus, et multa alia, de quibus fortasse alias, si otium suppetat. De quadraturis spatiorum sub lineis curvis. . . , fuse jam cum Domino de Roberval egimus.

Questo metodo non fallisce mai, anzi può essere esteso a diversi bellissimi problemi. Grazie ad esso troviamo i centri di gravità di figure comprese tra linee curve e rette e dei solidi, e molte altre cose di cui forse parlerò altrove, se ne avrò il tempo. Della quadratura delle aree sotto le linee curve. . . ci siamo già occupati diffusamente col Signor de Roberval.

Pierre de Fermat: massimi, minimi, tangenti. . .

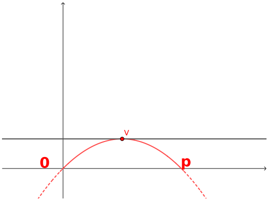
Fermat comincia con un problemino di massimo che *tutti* gli studenti di un liceo (scientifico?) prima o poi incontrano! *Exemplum subjicimus: Sit recta AC ita dividenda in E ut rectangulum AEC sit maximum.*



Tradotto in termini moderni, ci si chiede *quale sia, tra i rettangoli di perimetro assegnato, quello di area massima*. Chiamiamo p la lunghezza del segmento $\overline{AC}$ (il semiperimetro), x la lunghezza del segmento $\overline{AE}$. Allora il segmento $\overline{EC}$ ha lunghezza $p - x$ e l'area del rettangolo che dobbiamo massimizzare è $f(x) = px - x^2$, con $0 \leq x \leq p$.

Pierre de Fermat: massimi, minimi, tangenti

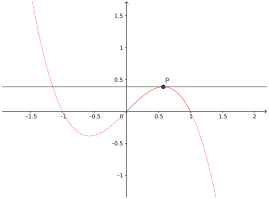
La curva $y = px - x^2$ è una parabola rivolta verso il basso: il punto più alto (che corrisponde al massimo) è il vertice, che ha ascissa $x = p/2$: il rettangolo di area massima è il quadrato. Questo era noto almeno dall'epoca ellenistica!



Fermat osserva però che nel punto di massimo la *retta tangente alla parabola* è *orizzontale*: questo succede anche *per altri problemi di massimo ben più complicati*.

Pierre de Fermat: massimi, minimi, tangenti

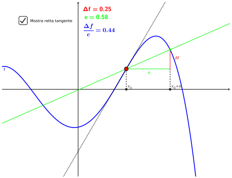
Ad esempio, Fermat usa lo stesso metodo per risolvere il problema di massimizzare $f(x) = a^2x - x^3$ per $0 \leq x \leq a$ (giustificato come un problema geometrico che coinvolge il calcolo di volumi).



Nella figura abbiamo scelto $a = 1$ e il massimo (punto con tangente orizzontale) si ottiene per $x = x_P = \sqrt{3}/3$.

Pierre de Fermat: massimi, minimi, tangenti

Ma come possiamo trovare le tangenti ad una funzione complicata? Fermat osserva che, data una funzione f, se tracciamo la retta che congiunge un punto $(x_0, f(x_0))$ sul grafico di f con un punto vicino $(x_0 + e, f(x_0 + e))$ (dove e è una quantità molto piccola), questa retta sarà un'approssimazione della retta tangente, tanto migliore quanto più e è piccolo.



La pendenza (coefficiente angolare) di questa retta sarà

$$\frac{f(x_0 + e) - f(x_0)}{e}$$

e immaginiamo che se e è molto piccolo ci dia una buona approssimazione della pendenza della tangente!

Pierre de Fermat: massimi, minimi, tangenti

Nel caso della cubica $f(x) = x - x^3$ si ha

$$\frac{f(x_0 + e) - f(x_0)}{e} = \frac{(x_0 + e) - (x_0 + e)^3 - (x_0 - x_0^3)}{e} = 1 - 3x_0^2 - 3x_0 e,$$

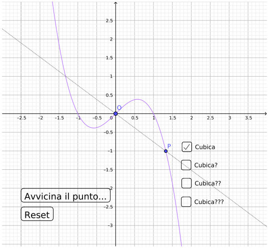
che per $e = 0$ dovrebbe fornirci la "pendenza corretta" della tangente alla cubica nel punto $(x_0, f(x_0))$, vale a dire $1 - 3x_0^2$. Questa effettivamente si annulla per $x_0 = \sqrt{3}/3$: abbiamo trovato il punto di massimo.

Notate però che porre $e = 0$ è un'operazione di dubbia legittimità perché per definire la pendenza abbiamo diviso per e e ora vorremmo porlo uguale a 0...

Fermat "risolve" questo problema parlando non di *aequationes* ma di *adaequationes* (uguaglianze approssimate), ma allora dobbiamo interrogarci su quanto debba essere piccola la quantità e perché le uguaglianze approssimate ci diano un risultato "affidabile".

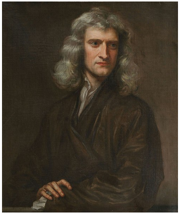
I rischi del calcolo approssimato della pendenza

Se scegliamo *male* la differenza e tra le ascisse dei due punti x_0 e $x_0 + e$ possono succedere cose terribili!



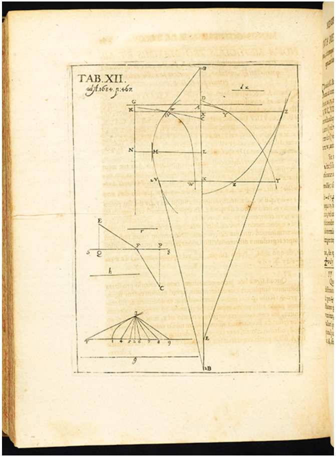
Leibniz: il Nova Methodus del 1684

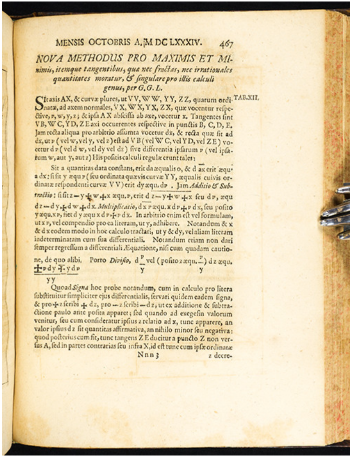
Più o meno negli ultimi vent'anni del XVII secolo Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton, indipendentemente tra loro, sviluppano il calcolo infinitesimale (=che usa quantità infinitamente piccole).

In particolare, nel 1684 Leibniz pubblica sugli *Acta Eruditorum* il *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus (Nuovo metodo per trovare i massimi, i minimi e anche le tangenti, che non viene fermato nemmeno da quantità fratte o irrazionali, e sullo straordinario tipo di calcolo per fare quelle cose).*

Leibniz: il Nova Methodus del 1684





MENSIS OCTOBRIS A. M DC LXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

TAB. XII.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dw, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis 0, & $d\,\overline{ax}$ erit æqu. $a\,dx$: si sit y æqu v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si sit $z - y + w + x$ æqu. v, erit $d\,\overline{z - y + w + x}$ seu dv, æqu $dz - dy + dw + dx$. *Multiplicatio*, $d\,\overline{xv}$ æqu. $x\,dv + v\,dx$, seu posito y æqu. xv, fiet dy æqu $x\,dv + v\,dx$. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, $d\,\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro $+z$ scribi $+dz$, pro $-z$ scribi $-dz$, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

Nnn 3 z decre-

Leibniz: il Nova Methodus del 1684

Leibniz riprende l'idea di Fermat: la pendenza della retta tangente nel punto di ascissa x è data dal rapporto tra l'incremento della "curva" (la funzione $y = f(x)$) e quello della variabile indipendente x. Considera cioè un rapporto del tipo

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx},$$

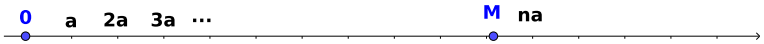
dove intende dx come una quantità *infinitamente piccola*, e dove l'uguaglianza deve essere intesa *a meno di quantità infinitamente piccole* (si noti infatti che l'incremento dx *non può essere* 0 perché compare a denominatore)!

In questo primo lavoro Leibniz non si pronuncia sulla natura di queste quantità infinitamente piccole, ma fornisce le regole per calcolare la pendenza della tangente (che oggi chiamiamo derivata di f nel punto x): già nella prima pagina del lavoro si riconoscono quelle che oggi chiamiamo "regole di derivazione".

Leibniz: la lettera a Varignon del 1702

C'è un grosso problema in questo ragionamento: tra i numeri reali non negativi, l'unico che ha diritto di dirsi "infinitamente piccolo" è lo 0. Infatti, se abbiamo una quantità $a > 0$, piccola a piacere, e un'altra quantità $M > 0$ (anche enormemente grande!), ci sarà sempre un *multiplo di a che supera M*: esiste un numero naturale n tale che $na > M$.

In altre parole, possiamo usare a come "unità di misura" per misurare M (proprietà di Archimede dei numeri reali).



Ma allora $a > \frac{M}{n}$, che è come dire che a non è infinitamente piccolo! Le quantità che usa Leibniz, che devono essere (in modulo) più piccole di qualsiasi numero reale positivo *non possono essere numeri reali* (o almeno, non numeri reali standard)!

Leibniz: la lettera a Varignon del 1702

Se gli incrementi infinitamente piccoli dy e dx *non sono numeri reali*, devono essere numeri di altro genere. Leibniz dapprima si accontenta di spiegare *operativamente* come fare i calcoli con essi (si tratta proprio di numeri: si possono sommare, moltiplicare, dividere)... ma è subissato dalle domande dei suoi corrispondenti sulla *vera natura* di queste quantità infinitamente piccole. In una bellissima lettera a Pierre Varignon, datata 2 febbraio 1702, Leibniz scrive:

...j'ay cru que pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde, il suffisoit d'expliquer icy l'infini par l'incomparable, c'est a dire de concevoir des quantités incomparablement plus grandes ou plus petites que les nostres;

...ho ritenuto che per rendere il ragionamento comprensibile a tutti, fosse abbastanza spiegare qui l'infinito con l'incomparabile, vale a dire concepire delle quantità incomparabilmente più grandi o più piccole delle nostre;

Leibniz: la lettera a Varignon del 1702

Alla fine del calcolo (per esempio della pendenza della tangente, ma anche di un'area), le quantità infinitamente piccole potremo trascurarle a favore di quelle "misurabili"

. . . puisque ce qui est incomparablement plus petit, entre inutilement en ligne de compte à l'egard de celuy qui est incomparablement plus grand que luy. . .

. . . perché ciò che è incomparabilmente più piccolo entra inutilmente nel computo, rispetto a ciò che è incomparabilmente più grande di lui. . .

Leibniz: la lettera a Varignon del 1702

Leibniz non si pronuncia sull'esistenza effettiva delle quantità infinite o infinitamente piccole che usa:

. . . D'où il s'ensuit, que si quelcun n'admet point des lignes infinies et ininiment petites à la rigeur metaphysique et comme des choses reelles, il peut s'en servir seurement comme des notions ideales qui abregent le raisonnement, semblable à ce qu'on appelle racines immaginaires dans l'analyse commune (comme par example $\sqrt{-2}$), lesquelle toutes immaginaires qu'on les appelle, ne laissent pas d'estre utiles, et même necessaires à exprimer analytiquement des grandeurs reelles;. . .

. . . Da cui segue che se qualcuno non ammette segmenti infiniti o infinitamente piccoli con rigore metafisico e come cose reali, può servirsene di sicuro come di nozioni ideali che semplificano il ragionamento, un po' come quelle che chiamiamo radici immaginarie nell'analisi comune (come ad esempio $\sqrt{-2}$), le quali, per quanto le si chiami immaginarie, non cessano tuttavia di essere utili e anche necessarie a esprimere analiticamente delle quantità reali;. . .

Un predecessore illustre: Archimede

In realtà quantità infinitesime erano state utilizzate secoli prima da Archimede di Siracusa (sec. III a.C.) per calcolare l'area di certe figure curvilinee (come il segmento parabolico).
A questo scopo Archimede immagina (infiniti) poligoni infinitamente piccoli che compongono la sua figura e riesce a individuarne correttamente l'area. Però, non soddisfatto del rigore di questo ragionamento, si preoccupa di dimostrare che l'area trovata è quella corretta con un metodo che non usa più quantità infinitamente piccole, ma il ben più complicato ma perfettamente rigoroso metodo di esaustione.
Leibniz queste cose le conosceva molto bene: anche lui usa quantità infinitamente piccole per calcolare aree e già nel *"De quadratura arithmetica circuli ellypseos et hyperbolae"* (1676) dice che si possono convincere gli increduli della correttezza dei suoi risultati usando il metodo di esaustione.

De quadratura arithmetica (1676)

Ma rivendica anche con forza il vantaggio di usare quantità infinitamente piccole o infinitamente grandi

. . . ne semper inscriptis vel circumscriptis uti, et ad absurdum ducere, et errorem assignabili quovis minorem ostendere necesse sit

. . . affinché non ci sia sempre bisogno di usare figure inscritte e circoscritte, e di ridursi ad un assurdo, e di dimostrare che l'errore può essere reso minore di qualiasi quantità assegnabile

De quadratura arithmetica (1676)

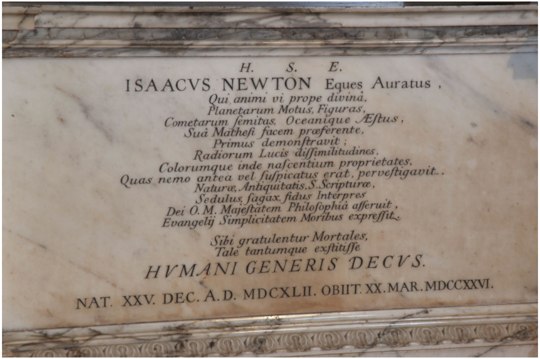
E guai se qualcuno osasse lamentarsi dell'uso di quantità infinitesime:

Si quis ergo inposterum queretur de usu harum quantitatum, is aut ignarum se ostendet aut ingratum. Ignarum quidem, si non intelligit, quanta hic lux accendatur in tota methodo indivisibilium, et materia quadraturarum; ingratum vero, si utilitatem quam percipit, dissimulat

Se qualcuno in futuro si lamentasse dell'uso di queste quantità (infinitesime o infinite), si mostrerà ignorante o ingrato. Ignorante se non capisse quanta luce si accenda in questo modo su tutto il metodo degli indivisibili e sulla questione delle quadrature. Ingrato invece se si rende conto dell'utilità e fa finta di nulla.

Spettacolare sviluppo della scienza e della matematica. . .

I metodi infinitesimali (cioè che coinvolgono quantità infinitamente piccole) introdotti da Leibniz e Newton portano, all'inizio del '700, ad uno sviluppo esplosivo della fisica e della matematica.



Nature and nature's laws lay hid in night;

God said "Let Newton be" and all was light.

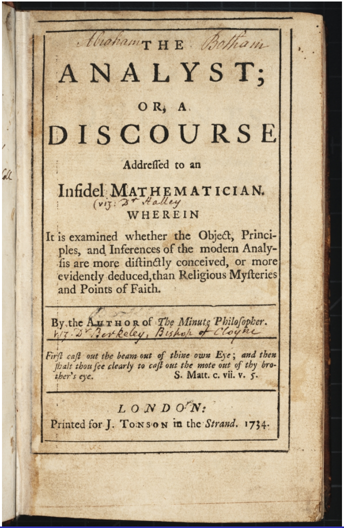
Alexander Pope

Berkeley: The Analyst (1734)

Ma questo non tacita i dubbi sui fondamenti di questi metodi, anche perché il punto di vista di Newton è ancor meno facile da formalizzare di quello di Leibniz. Una critica al vetriolo viene mossa nel 1734 dallo scienziato e filosofo irlandese George Berkeley. Berkeley, che è un vescovo anglicano, è spinto dalle differenze di vedute con Edmund Halley, famoso astronomo considerato all'epoca il più autorevole tra i successori di Newton, che però (contrariamente al religiosissimo Newton) non è credente e nei suoi scritti osa mettere in ridicolo i fondamenti logici della fede. Berkeley, che è un valente scienziato, decide di ribattere seminando dubbi sui fondamenti stessi del calcolo infinitesimale newtoniano che ha dato la fama ad Halley.

Berkeley: The Analyst (1734)

Nel 1734 Berkeley pubblica in modo anonimo *"The analyst, or a discourse addressed to an infidel mathematician"*


Abraham THE Botham
ANALYST;
OR, A
DISCOURSE
Addressed to an
Infidel MATHEMATICIAN.
(viz: Dr Halley
WHEREIN
It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith.

By the AUTHOR of *The Minute Philosopher*.
viz: Dr Berkeley, Bishop of Cloyne

First cast out the beam out of thine own Eye; and then shalt thou see clearly to cast out the mote out of thy brother's eye. S. Matt. c. vii. v. 5.

LONDON:
Printed for J. TONSON in the *Strand*. 1734.

Berkeley: The Analyst (1734)

A proposito delle Flussioni di Newton (l'equivalente del rapporto $\frac{f(x)}{dx}$ per Leibniz), Berkeley scrive:

And what are these Fluxions? The Velocities of evanescent Increments? And what are the same evanescent Increments? They are neither finite Quantities, nor Quantities infinitely small, non yet nothing. May we not call them the Ghosts of departed Quantities?

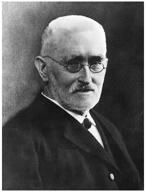
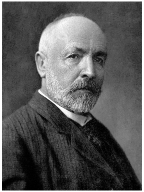
E cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti? E cosa sono questi stessi incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite né quantità infinitamente piccole, né nulla. Non possiamo forse chiamarli i fantasmi di quantità dipartite?

Come è possibile, si chiede Berkeley, che ci sia chi crede a queste cose?

Yet some there are, who, though they shrink at all other Mysteries, make no difficulty of their own, who strain at a Gnat and swallow a Camel.

Eppure c'è gente che, anche se si ritrae da ogni altro Mistero, su questo non fa nessuna difficoltà, che fa fatica con un moscerino ma ingoia un cammello.

Conseguenza: la morte (temporanea) degli infinitesimi!

Le critiche di Berkeley (e una sana ricerca di fondamenta solide per la materia) portarono, nell'800, alla rifondazione rigorosa dell'Analisi senza l'uso degli infinitesimi. Grazie al lavoro di Cauchy, Weierstrass, Dedekind e Cantor, essi vennero sostituiti progressivamente dal meno intuitivo concetto di limite (dovuto essenzialmente a Weierstrass ma basato in ultima analisi sulle stesse idee del metodo di esaustione di Archimede).

Conseguenza: la morte (temporanea) degli infinitesimi!

Ancor oggi, probabilmente, *più del 90% dei matematici lavora in analisi senza mai usare numeri infinitamente piccoli o infinitamente grandi.*

Bertrand Russel scrisse nel 1903:

There is no such thing as an infinitesimal stretch; if there were, it would not be an element of the continuum; the calculus does not require it, and to suppose its existence leads to contradictions.

Non esiste un intervallo infinitesimo; se ci fosse non sarebbe un elemento del continuo (dei numeri reali); il calcolo non lo richiede e supporre che esista porta a contraddizioni.

Abraham Robinson: gli infinitesimi di Leibniz rinascono!

Russel però si sbagliava di grosso!

Negli anni '60 del secolo scorso il matematico americano Abraham Robinson riuscì a ridare cittadinanza agli infinitesimi alla Leibniz (il suo libro *"Non Standard Analysis"* è del 1966).

Abraham Robinson: gli infinitesimi di Leibniz rinascono!

Robinson riuscìa definire l'insieme R^* dei numeri iperreali. Si tratta di un insieme di numeri (dotati delle 4 operazioni e di una relazione d'ordine, che si comportano come al solito) che contiene tutti i numeri reali, ma anche numeri infinitesimi e infiniti.

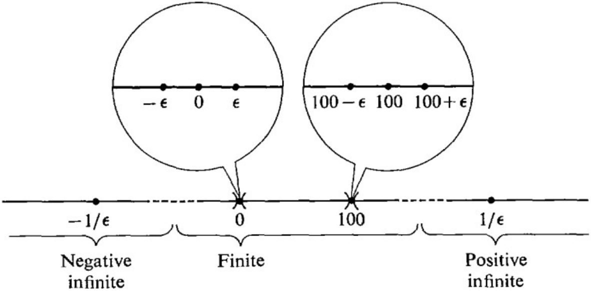
Un numero iperreale $\varepsilon \in \mathrm{R}^*$ si dice *infinitesimo* se $|\varepsilon| < \frac{1}{n}$ per ogni numero naturale $n \geq 1$. La proprietà di Archimede non è soddisfatta!

L'unico infinitesimo che è anche un numero reale è 0, ma esistono infinitesimi non nulli che non sono numeri reali. Il reciproco di un infinitesimo non nullo è infinito: se $\varepsilon > 0$ è infinitesimo, allora $\frac{1}{\varepsilon} > n$ per ogni numero naturale n.

Per ogni numero iperreale x finito, esiste un unico numero reale $\mathrm{st}(x)$ (chiamato la parte standard di x) tale che $x - \mathrm{st}(x)$ è infinitesimo. In altre parole, ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad un unico numero reale, la sua parte standard.

Abraham Robinson: gli infinitesimi di Leibniz rinascono!

La prossima figura, tratta dal libro "Elementary Calculus" di H.J. Keisler, illustra graficamente come è fatta la retta iperreale.



Si noti che un infinitesimo $\varepsilon \neq 0$ è un numero: anche 2ε, ε^2, $\sin\varepsilon$, $2^{4+\varepsilon}$, $\frac{3}{5\varepsilon+\varepsilon^3}$ sono numeri iperreali (i primi tre infinitesimi, il quarto con parte standard 16, l'ultimo infinito). In particolare, ci sono infiniti numeri infinitesimi e infiniti numeri infiniti!

Abraham Robinson: gli infinitesimi di Leibniz rinascono!

Con queste premesse possiamo recuperare la definizione della retta tangente data da Leibniz (e anche tutti gli altri risultati dell'Analisi classica!).
Data una funzione f la pendenza della sua tangente (la derivata) nel punto $x \in \mathrm{R}$ è data da

$$\frac{df(x)}{dx} = \mathrm{st}\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right),$$

purché la parte standard *esista* e *sia la stessa per ogni infinitesimo non nullo dx*.
L'unica differenza rispetto alla formulazione di Leibniz è che abbiamo resa esplicita l'operazione finale di "trascurare un infinitesimo per ottenere una derivata reale": lo abbiamo fatto introducendo la parte standard.