Frattali tra stranezze matematiche e applicazioni tecnologiche.

S. Baldo

Dipartimento di Informatica -Università di Verona

ITIS Marconi, 31 gennaio 2012

Come è organizzata questa presentazione

Questa presentazione è dedicata ai frattali, oggetti bellissimi ed affascinanti per la gioia di

Come è organizzata questa presentazione

Questa presentazione è dedicata ai frattali, oggetti bellissimi ed affascinanti per la gioia di matematici,

Come è organizzata questa presentazione

Questa presentazione è dedicata ai frattali, oggetti bellissimi ed affascinanti per la gioia di matematici, artisti,

Come è organizzata questa presentazione

Questa presentazione è dedicata ai frattali, oggetti bellissimi ed affascinanti per la gioia di matematici, artisti, botanici, programmatori, ingegneri, nanotecnologi...

Come è organizzata questa presentazione

Questa presentazione è dedicata ai frattali, oggetti bellissimi ed affascinanti per la gioia di matematici, artisti, botanici, programmatori, ingegneri, nanotecnologi...
Nella prima parte di questa chiaccherata, cercherò di raccontarvi perché i matematici hanno iniziato ad occuparsi di questi strani oggetti a partire dalle seconda metà del XIX sec.

Come è organizzata questa presentazione

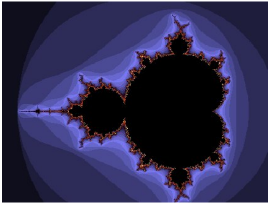
Questa presentazione è dedicata ai frattali, oggetti bellissimi ed affascinanti per la gioia di matematici, artisti, botanici, programmatori, ingegneri, nanotecnologi...
Nella prima parte di questa chiaccherata, cercherò di raccontarvi perché i matematici hanno iniziato ad occuparsi di questi strani oggetti a partire dalle seconda metà del XIX sec.
Nella seconda, vi proporrò una attività di laboratorio, nel quadro del Piano Nazionale Lauree Scientifiche, per approfondire alcuni aspetti dei cosiddetti Frattali IFS (Iterated Functions Systems). In particolare, potremo apprezzare come questo tipo di frattali trovino applicazione nella compressione delle immagini.

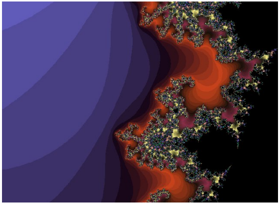
I frattali nelle scienze applicate:

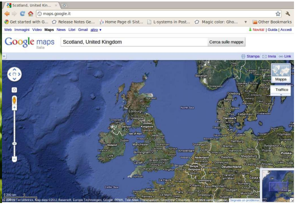
l'opera di Benoit Mandelbrot (1924-2010)

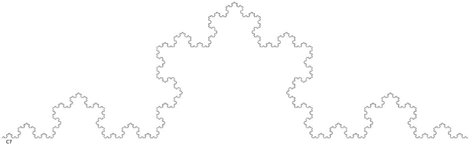
È inevitabile (e doveroso) iniziare una chiaccherata sui frattali ricordando Benoit Mandelbrot, recentemente scomparso. Mandelbrot è indubbiamente il padre di questo soggetto, avendo avuto l'indubbio merito di individuare per primo quali sono le caratteristiche comuni che definiscono la classe degli oggetti frattali, e di intuirne le innumerevoli possibilità di applicazione nelle scienze e nella tecnologia.

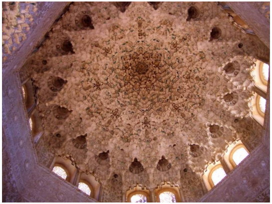
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



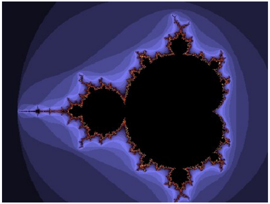


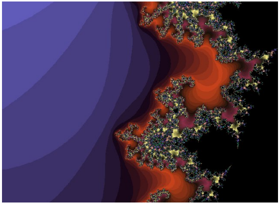


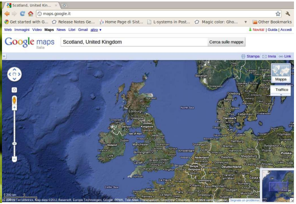


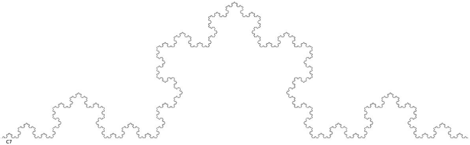


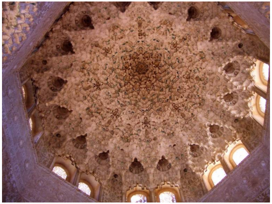
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



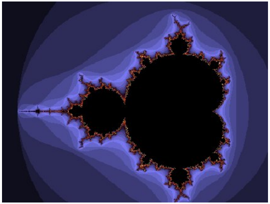


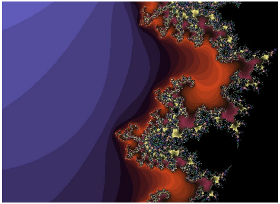


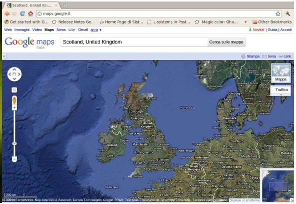


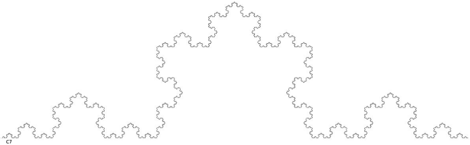


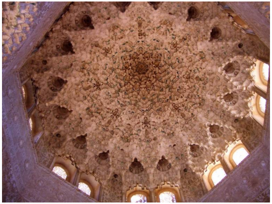
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



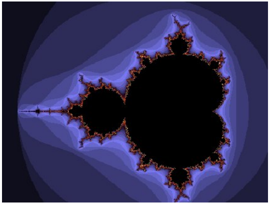


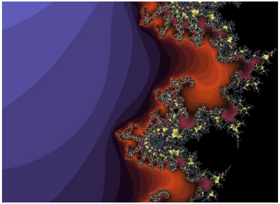


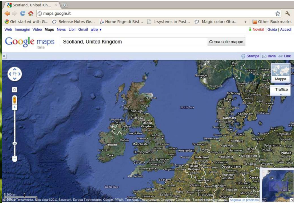


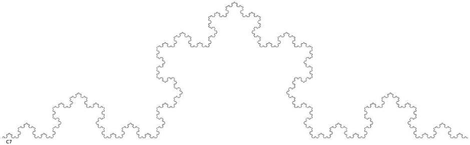


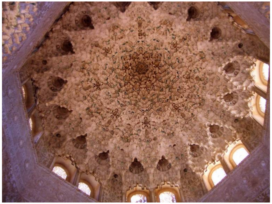
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



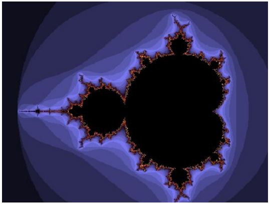


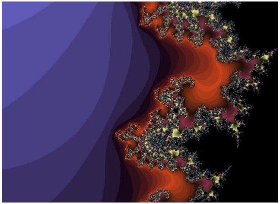


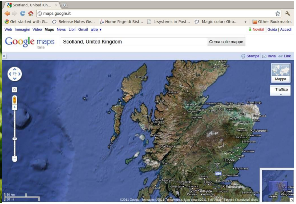


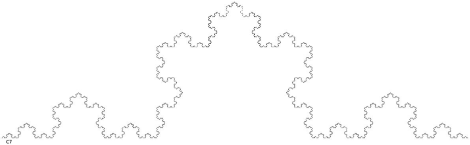


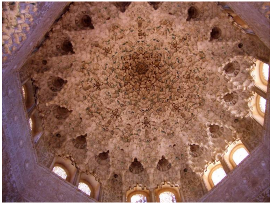
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



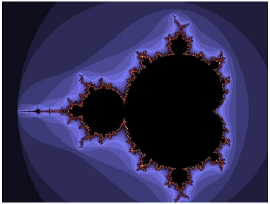


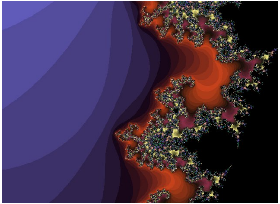


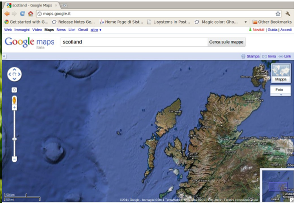


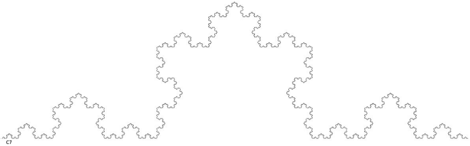


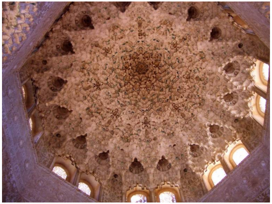
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



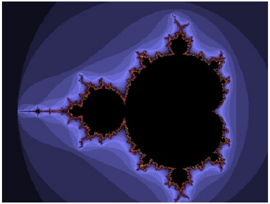


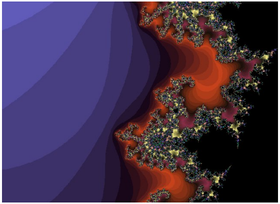


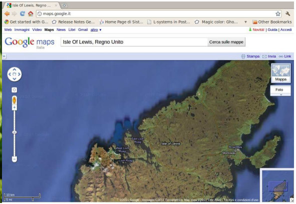


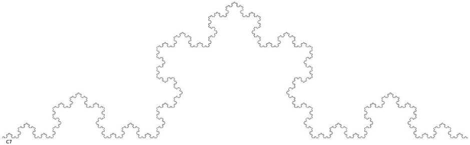


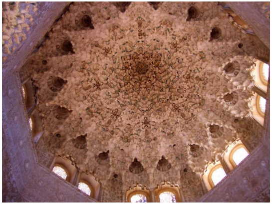
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



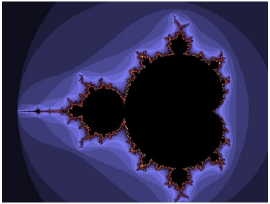


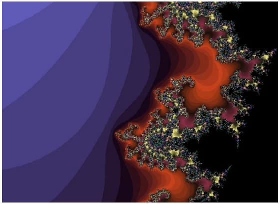


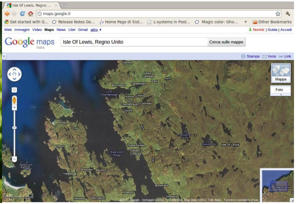


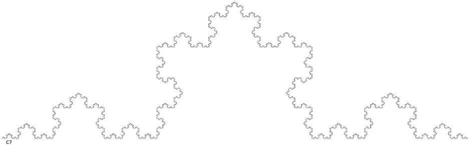


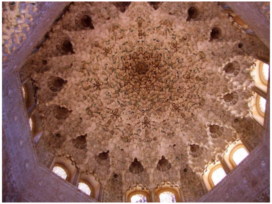
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



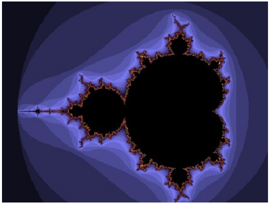


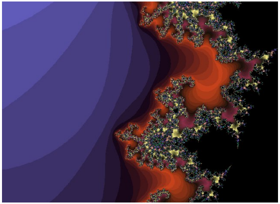


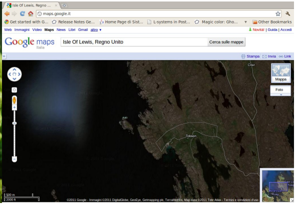


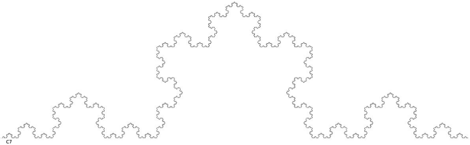


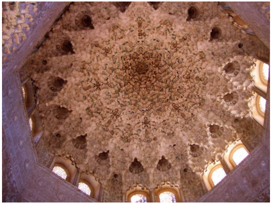
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



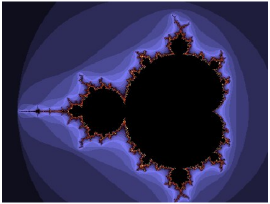


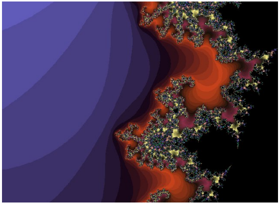


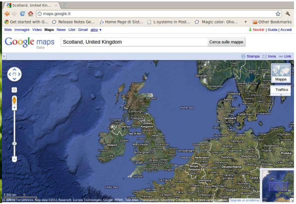


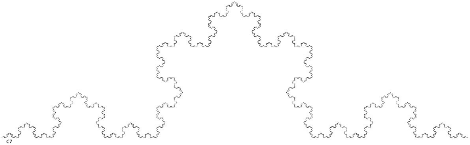


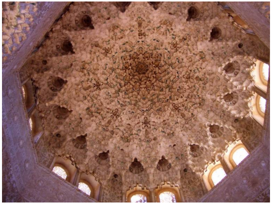
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



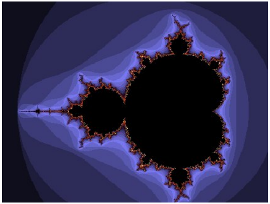


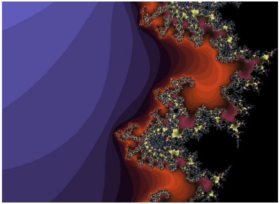


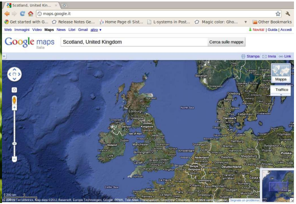


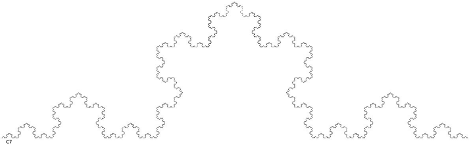


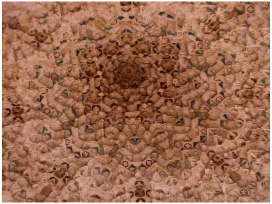
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



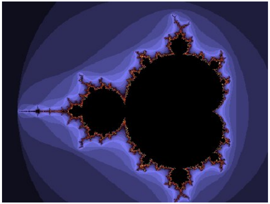


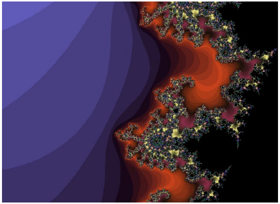


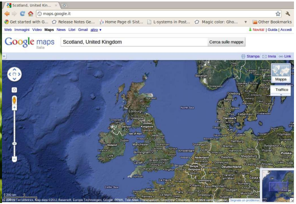


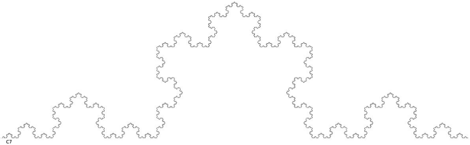


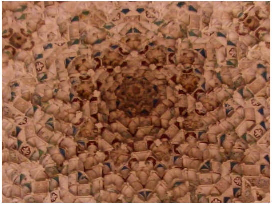
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .



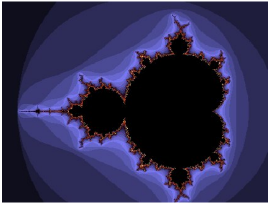


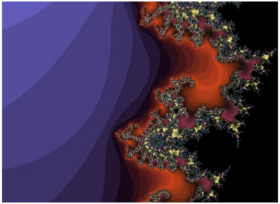


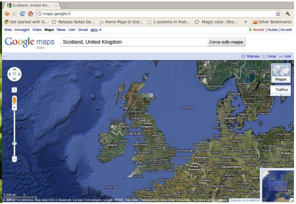


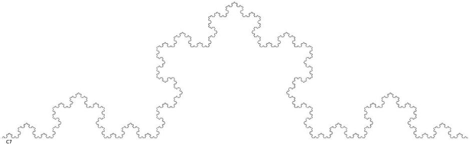


I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .

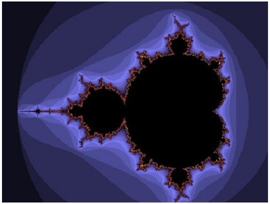


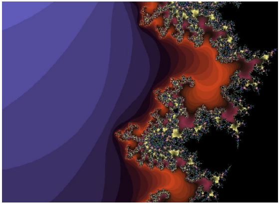


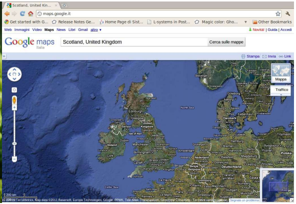


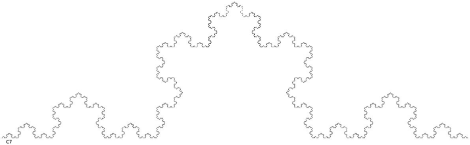


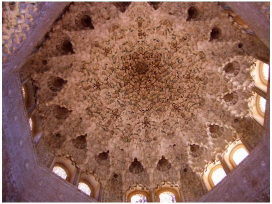
I frattali nelle scienze pure ed applicate. . .











Se Mandelbrot fu il primo ad intuire la potenza dei modelli frattali nelle scienze applicate…

I frattali prima di Mandelbrot:

da dove nascono questi oggetti?

Se Mandelbrot fu il primo ad intuire la potenza dei modelli frattali nelle scienze applicate. . . non fu però l'inventore dei frattali!

Se Mandelbrot fu il primo ad intuire la potenza dei modelli frattali nelle scienze applicate... non fu però l'inventore dei frattali!

In un certo senso, il primo frattale della storia della matematica fu "involontariamente" introdotto da B. Riemann e da K. Weiestrass tra il 1861 ed il 1872, per rispondere a questioni relativamente astratte (ma anche, come vedremo... perfettamente comprensibili ed abbastanza naturali!) di matematica:

I frattali prima di Mandelbrot:

da dove nascono questi oggetti?

Se Mandelbrot fu il primo ad intuire la potenza dei modelli frattali nelle scienze applicate... non fu però l'inventore dei frattali!

In un certo senso, il primo frattale della storia della matematica fu "involontariamente" introdotto da B. Riemann e da K. Weiestrass tra il 1861 ed il 1872, per rispondere a questioni relativamente astratte (ma anche, come vedremo... perfettamente comprensibili ed abbastanza naturali!) di matematica:

un bell'esempio di come, a volte, la ricerca pura possa avere delle inaspettate e spettacolari ricadute sulle scienze applicate a distanza di molti decenni!

I frattali prima di Mandelbrot:
introduciamo alcuni degli attori principali!

Tra i grandi studiosi che per primi contribuirono ad introdurre gli oggetti che ora chiamiamo frattali, vorrei citare

- Bernhard Riemann (1826-1866)
- Karl Weierstrass (1815-1897)
- Georg Cantor (1845-1918)
- Helge von Koch (1870-1924)
- Giuseppe Peano (1858-1932)
- Pierre Fatou (1878-1929)
- Gaston Julia (1893-1978)
- Felix Hausdorff (1868-1942)
- Wacław Sierpinski (1882-1969)
- Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970)
- Hassler Whitney (1907-1989)




Riemann, Weierstrass e la derivabilità delle funzioni continue.

Il grafico di una funzione continua è necessariamente liscio nella maggior parte dei punti?

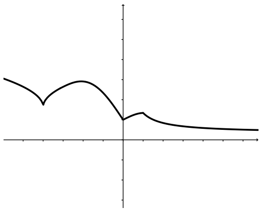
In maniera abbastanza informale (e non proprio precisa. . .) possiamo dire che una funzione si dice *continua* se il suo grafico *si può disegnare senza staccare la penna dal foglio*, o più correttamente se *il valore della funzione cambia di poco quanto si vuole se cambiamo la variabile indipendente abbastanza poco*.

Riemann, Weierstrass e la derivabilità delle funzioni continue.

Il grafico di una funzione continua è necessariamente liscio nella maggior parte dei punti?

In maniera abbastanza informale (e non proprio precisa. . .) possiamo dire che una funzione si dice *continua* se il suo grafico *si può disegnare senza staccare la penna dal foglio*, o più correttamente se *il valore della funzione cambia di poco quanto si vuole se cambiamo la variabile indipendente abbastanza poco*.

Il grafico di una funzione continua può certamente avere dei punti angolosi, delle cuspidi, o comunque dei punti in cui *non è liscio*. . .

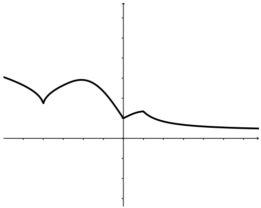


Riemann, Weierstrass e la derivabilità delle funzioni continue.

Il grafico di una funzione continua è necessariamente liscio nella maggior parte dei punti?

In maniera abbastanza informale (e non proprio precisa. . .) possiamo dire che una funzione si dice *continua* se il suo grafico *si può disegnare senza staccare la penna dal foglio*, o più correttamente se *il valore della funzione cambia di poco quanto si vuole se cambiamo la variabile indipendente abbastanza poco*.

Il grafico di una funzione continua può certamente avere dei punti angolosi, delle cuspidi, o comunque dei punti in cui *non è liscio*. . .



. . . ma si potrebbe pensare che nella *maggior parte dei punti* il grafico sia *regolare*, dotato di *retta tangente*.

La funzione di Weierstrass(1872)

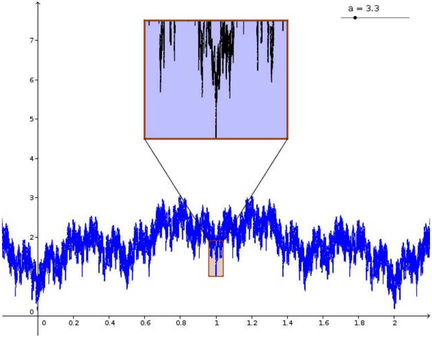
“Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzeren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen”

Nel 1872 K. Weierstrass mostrò che quest’intuizione non è corretta: esistono funzioni *continue* il cui grafico non è dotato di retta tangente in *nessun punto*! Weierstrass ebbe l’idea grazie ad un’affermazione di Riemann - non dimostrata - databile 1861.

La funzione di Weierstrass(1872)

"Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzeren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen"

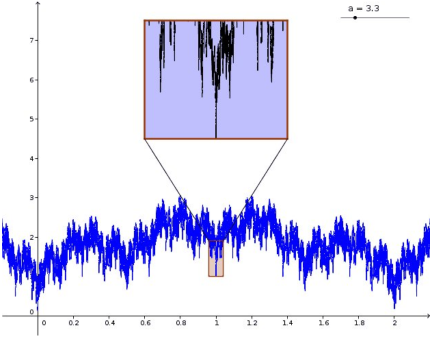
Nel 1872 K. Weierstrass mostrò che quest'intuizione non è corretta: esistono funzioni *continue* il cui grafico non è dotato di retta tangente in *nessun punto*! Weierstrass ebbe l'idea grazie ad un'affermazione di Riemann - non dimostrata - databile 1861.



La funzione di Weierstrass(1872)

“Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzeren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen”

Nel 1872 K. Weierstrass mostrò che quest’intuizione non è corretta: esistono funzioni *continue* il cui grafico non è dotato di retta tangente in *nessun punto*! Weierstrass ebbe l’idea grazie ad un’affermazione di Riemann - non dimostrata - databile 1861.



Il grafico della funzione di Weiestrass è forse il primo esempio noto di *frattale “matematico”*.

La curva di H. von Koch (1904)

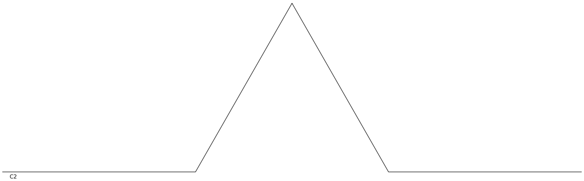
“Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire”

Il matematico svedese H. von Koch ottenne una curva continua con proprietà analoghe a quelle della funzione di Weierstrass, tramite una costruzione assai elegante ed elementare:

La curva di H. von Koch (1904)

“Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire”

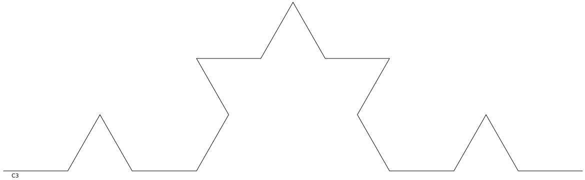
Il matematico svedese H. von Koch ottenne una curva continua con proprietà analoghe a quelle della funzione di Weierstrass, tramite una costruzione assai elegante ed elementare:



La curva di H. von Koch (1904)

"Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire"

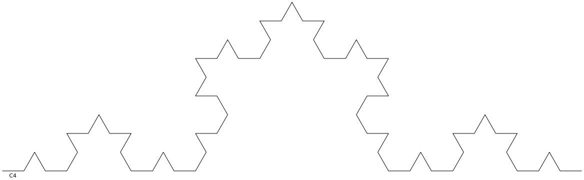
Il matematico svedese H. von Koch ottenne una curva continua con proprietà analoghe a quelle della funzione di Weierstrass, tramite una costruzione assai elegante ed elementare:



La curva di H. von Koch (1904)

“Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire”

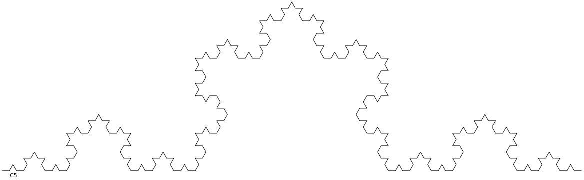
Il matematico svedese H. von Koch ottenne una curva continua con proprietà analoghe a quelle della funzione di Weierstrass, tramite una costruzione assai elegante ed elementare:



La curva di H. von Koch (1904)

"Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire"

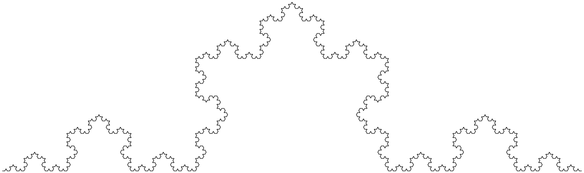
Il matematico svedese H. von Koch ottenne una curva continua con proprietà analoghe a quelle della funzione di Weierstrass, tramite una costruzione assai elegante ed elementare:



La curva di H. von Koch (1904)

"Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire"

Il matematico svedese H. von Koch ottenne una curva continua con proprietà analoghe a quelle della funzione di Weierstrass, tramite una costruzione assai elegante ed elementare:

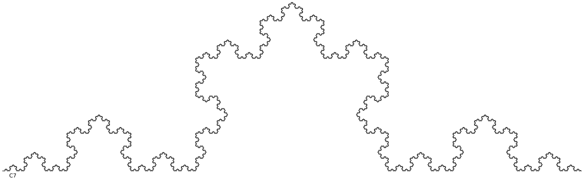


C6

La curva di H. von Koch (1904)

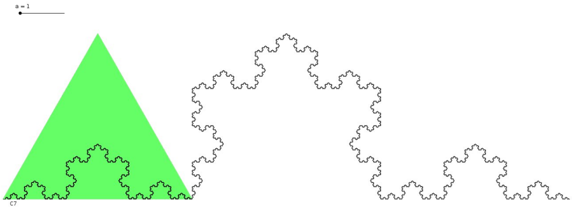
“Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire”

Il matematico svedese H. von Koch ottenne una curva continua con proprietà analoghe a quelle della funzione di Weierstrass, tramite una costruzione assai elegante ed elementare:



La curva di H. von Koch (1904)

Autosimilarità della curva di von Koch



Proprietà della curva di von Koch
e della funzione di Weierstrass

Queste curve godono di alcune curiose proprietà:

- Sono autosimilari: porzioni arbitrariamente piccole della curva sono (approssimativamente o esattamente) simili a tutta la curva!

Queste curve godono di alcune curiose proprietà:

- Sono autosimilari: porzioni arbitrariamente piccole della curva sono (approssimativamente o esattamente) simili a tutta la curva!
- Il tratto di curva compreso tra due punti distinti ha sempre lunghezza infinita.

Queste curve godono di alcune curiose proprietà:

- Sono autosimilari: porzioni arbitrariamente piccole della curva sono (approssimativamente o esattamente) simili a tutta la curva!
- Il tratto di curva compreso tra due punti distinti ha sempre lunghezza infinita.
- Hanno dimensione frazionaria: la curva a fiocco di neve, per esempio, ha dimensione $\frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1.26\ldots$

Proprietà della curva di von Koch
e della funzione di Weierstrass

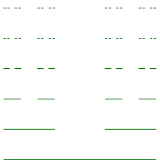
Queste curve godono di alcune curiose proprietà:

- Sono autosimilari: porzioni arbitrariamente piccole della curva sono (approssimativamente o esattamente) simili a tutta la curva!
- Il tratto di curva compreso tra due punti distinti ha sempre lunghezza infinita.
- Hanno dimensione frazionaria: la curva a fiocco di neve, per esempio, ha dimensione $\frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1.26\ldots$
- La curva di von Koch, come molti altri frattali, può servire a costruire delle... antenne miniaturizzate, a larga banda e ad alto guadagno!

L'insieme di Cantor (1883). . .

. . . descritto per la prima volta da H.J.S. Smith (1875).

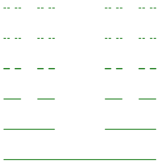
Un altro celebre frattale, dalle sorprendenti proprietà. . . nonché il primo frattale "volontario":



L'insieme di Cantor (1883). . .

. . . descritto per la prima volta da H.J.S. Smith (1875).

Un altro celebre frattale, dalle sorprendenti proprietà. . . nonché il primo frattale "volontario":

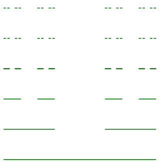


Si tratta di un insieme che non contiene alcun intervallo, di lunghezza totale zero...ma che contiene moltissimi punti (ha cardinalità pari a quella della retta reale).

L'insieme di Cantor (1883). . .

. . . descritto per la prima volta da H.J.S. Smith (1875).

Un altro celebre frattale, dalle sorprendenti proprietà. . . nonché il primo frattale "volontario":



Si tratta di un insieme che non contiene alcun intervallo, di lunghezza totale zero...ma che contiene moltissimi punti (ha cardinalità pari a quella della retta reale).
L'insieme di Cantor è evidentemente autosimilare, ed ha dimensione $\log 2 / \log 3 \simeq 0.63$.

H.J.S. Smith: "On the integration of discontinuous functions", 1875
G. Cantor: "Über unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten, Part 5", 1883

Una funzione continua con retta tangente quasi sempre orizzontale:

possiamo salire senza andare in salita?

Supponiamo di avere una funzione continua il cui grafico ha retta tangente orizzontale (è “piatto”!) in tutti i punti di un intervallo, salvo in un insieme di lunghezza zero.
È vero che questa funzione è costante sul nostro intervallo (cioè il suo grafico è un bel segmento orizzontale)?

Una funzione continua con retta tangente quasi sempre orizzontale:

possiamo salire senza andare in salita?

Supponiamo di avere una funzione continua il cui grafico ha retta tangente orizzontale (è “piatto”!) in tutti i punti di un intervallo, salvo in un insieme di lunghezza zero.
È vero che questa funzione è costante sul nostro intervallo (cioè il suo grafico è un bel segmento orizzontale)?

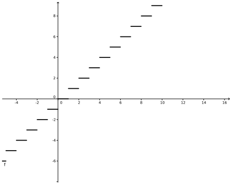
- Se la retta tangente è orizzontale in tutti i punti è vero!

Una funzione continua con retta tangente quasi sempre orizzontale:

possiamo salire senza andare in salita?

Supponiamo di avere una funzione continua il cui grafico ha retta tangente orizzontale (è “piatto”!) in tutti i punti di un intervallo, salvo in un insieme di lunghezza zero.
È vero che questa funzione è costante sul nostro intervallo (cioè il suo grafico è un bel segmento orizzontale)?

- Se la retta tangente è orizzontale in tutti i punti è vero!
- Se la funzione non è continua, in generale è falso:

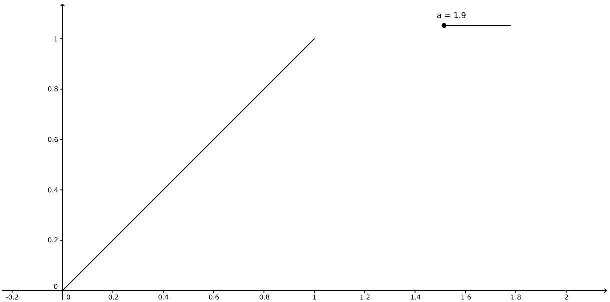


La funzione del disegno ha un insieme di punti, di lunghezza 0, in cui la funzione “salta”.

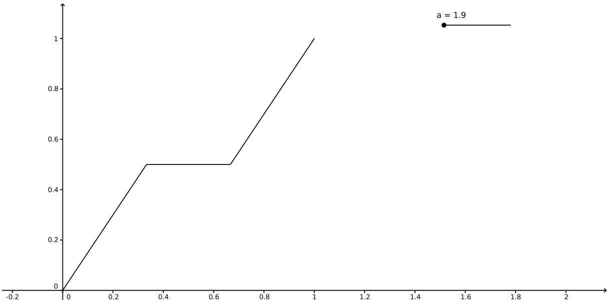
La funzione di Cantor (1884)

“De la puissance des ensembles parfaits de points”- La scala del diavolo…

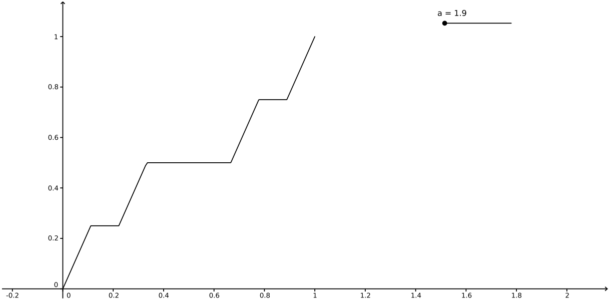
Anche se supponiamo che la funzione sia continua, la risposta alla nostra domanda è sorprendentemente negativa!



Anche se supponiamo che la funzione sia continua, la risposta alla nostra domanda è sorprendentemente negativa!



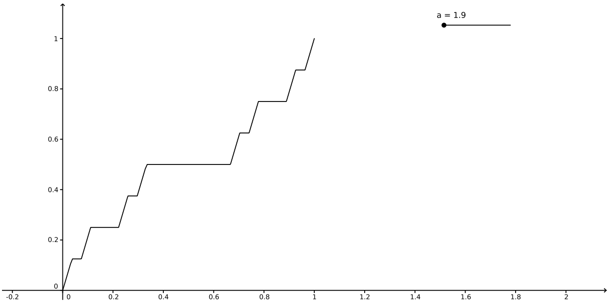
Anche se supponiamo che la funzione sia continua, la risposta alla nostra domanda è sorprendentemente negativa!



La funzione di Cantor (1884)

"De la puissance des ensembles parfaits de points"- La scala del diavolo...

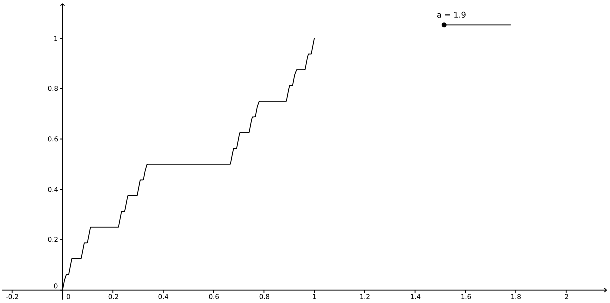
Anche se supponiamo che la funzione sia continua, la risposta alla nostra domanda è sorprendentemente negativa!



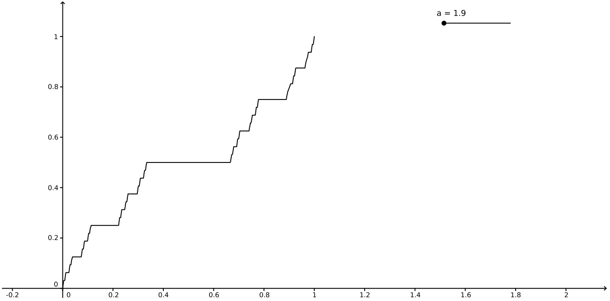
La funzione di Cantor (1884)

“De la puissance des ensembles parfaits de points”- La scala del diavolo...

Anche se supponiamo che la funzione sia continua, la risposta alla nostra domanda è sorprendentemente negativa!



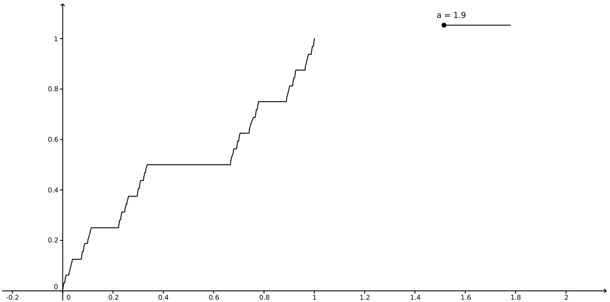
Anche se supponiamo che la funzione sia continua, la risposta alla nostra domanda è sorprendentemente negativa!



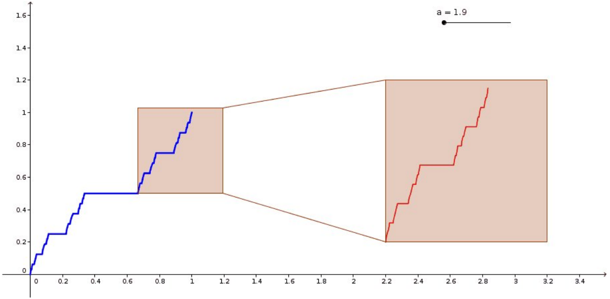
La funzione di Cantor (1884)

“De la puissance des ensembles parfaits de points”- La scala del diavolo. . .

Anche se supponiamo che la funzione sia continua, la risposta alla nostra domanda è sorprendentemente negativa!



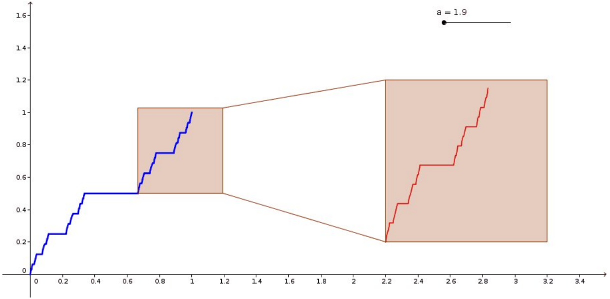
Anche se supponiamo che la funzione sia continua, la risposta alla nostra domanda è sorprendentemente negativa!



La funzione di Cantor (1884)

“De la puissance des ensembles parfaits de points”- La scala del diavolo. . .

Anche se supponiamo che la funzione sia continua, la risposta alla nostra domanda è sorprendentemente negativa!

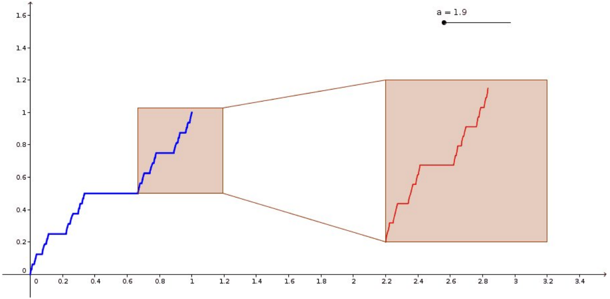


Abbiamo costruito una “scalinata” continua, che è ovunque piatta tranne che nei punti dell’insieme di Cantor (che ha lunghezza 0)

La funzione di Cantor (1884)

“De la puissance des ensembles parfaits de points”- La scala del diavolo...

Anche se supponiamo che la funzione sia continua, la risposta alla nostra domanda è sorprendentemente negativa!



Abbiamo costruito una “scalinata” continua, che è ovunque piatta tranne che nei punti dell’insieme di Cantor (che ha lunghezza 0)

Incidentalmente, questa è una curva frattale di dimensione 1...

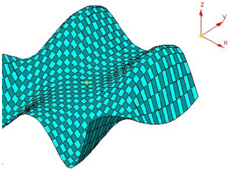
Problema analogo per funzioni di due variabili:
possiamo guadagnare quota senza mai andare in salita?

Passando a funzioni di due variabili, si può costruire un esempio ancora più sorprendente!

Problema analogo per funzioni di due variabili:

possiamo guadagnare quota senza mai andare in salita?

Passando a funzioni di due variabili, si può costruire un esempio ancora più sorprendente!
Diremo che una funzione di due variabili è regolare se il suo grafico è dotato di piano tangente in tutti i punti, e questi piani tangenti variano con continuità da un punto all'altro.



In un certo senso, il grafico di una funzione regolare può essere visto come il plastico di una regione collinare, senza salti verticali e strapiombi!

Problema analogo per funzioni di due variabili:

possiamo guadagnare quota senza mai andare in salita?

Supponiamo di camminare lungo un sentiero (una curva continua) che giace sul grafico di una funzione regolare di due variabili (la nostra collina).
Supponiamo anche che in ogni punto della curva il piano tangente alla montagna sia orizzontale: il nostro sentiero non è mai in salita.

Problema analogo per funzioni di due variabili:

possiamo guadagnare quota senza mai andare in salita?

Supponiamo di camminare lungo un sentiero (una curva continua) che giace sul grafico di una funzione regolare di due variabili (la nostra collina).
Supponiamo anche che in ogni punto della curva il piano tangente alla montagna sia orizzontale: il nostro sentiero non è mai in salita.

DOMANDA: È possibile che la quota di arrivo del sentiero sia maggiore della quota di partenza?

Problema analogo per funzioni di due variabili:

possiamo guadagnare quota senza mai andare in salita?

Supponiamo di camminare lungo un sentiero (una curva continua) che giace sul grafico di una funzione regolare di due variabili (la nostra collina).
Supponiamo anche che in ogni punto della curva il piano tangente alla montagna sia orizzontale: il nostro sentiero non è mai in salita.

DOMANDA: È possibile che la quota di arrivo del sentiero sia maggiore della quota di partenza?

RISPOSTA (alquanto sorprendente!): È possibile... a patto che il "sentiero" sia una curva frattale!
L'esempio è stato dato da Hassler Whitney ("A function not constant on a connected set of critical points", 1935).

La funzione di Whitney:

come guadagnare quota andando poco in salita?

L'idea per costruire l'esempio di Whitney non è poi così difficile. Infatti, c'è un metodo ben noto per costruire una strada che superi un certo dislivello senza avere pendenze eccessive:

La funzione di Whitney:
come guadagnare quota andando poco in salita?

L'idea per costruire l'esempio di Whitney non è poi così difficile. Infatti, c'è un metodo ben noto per costruire una strada che superi un certo dislivello senza avere pendenze eccessive:

basta prevedere molti tornanti!

La funzione di Whitney:

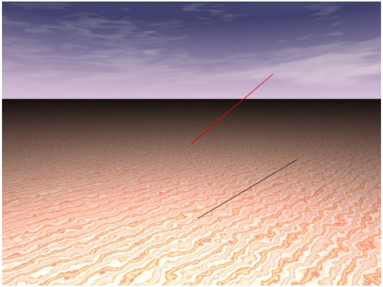
come guadagnare quota senza andare in salita?

Per non andare mai in salita basta fare infiniti tornanti!
Whitney, essendo un matematico, aveva un indubbio vantaggio sugli ingegneri civili: poteva permettersi di costruire la strada prima della montagna! Ecco come si può fare:

La funzione di Whitney:

come guadagnare quota senza andare in salita?

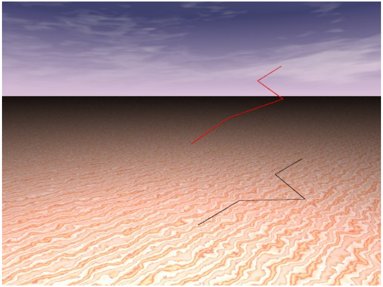
Per non andare mai in salita basta fare infiniti tornanti!
Whitney, essendo un matematico, aveva un indubbio vantaggio sugli ingegneri civili: poteva permettersi di costruire la strada prima della montagna! Ecco come si può fare:



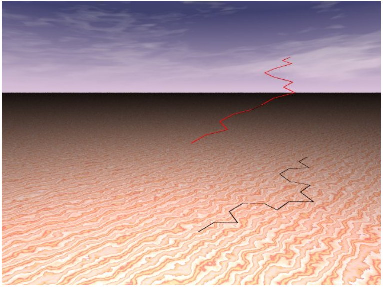
La funzione di Whitney:

come guadagnare quota senza andare in salita?

Per non andare mai in salita basta fare infiniti tornanti! Whitney, essendo un matematico, aveva un indubbio vantaggio sugli ingegneri civili: poteva permettersi di costruire la strada prima della montagna! Ecco come si può fare:



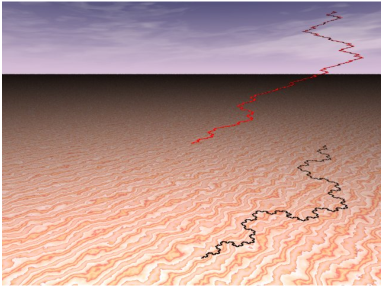
Per non andare mai in salita basta fare infiniti tornanti! Whitney, essendo un matematico, aveva un indubbio vantaggio sugli ingegneri civili: poteva permettersi di costruire la strada prima della montagna! Ecco come si può fare:



La funzione di Whitney:

come guadagnare quota senza andare in salita?

Per non andare mai in salita basta fare infiniti tornanti! Whitney, essendo un matematico, aveva un indubbio vantaggio sugli ingegneri civili: poteva permettersi di costruire la strada prima della montagna! Ecco come si può fare:



In ogni tratto della strada a fiocco di neve ci sono infiniti tornanti: la “pendenza” è ovunue nulla.

Welcome to Snowflake Road on Mount Whitney.

Beware: it takes FOREVER to reach the top!

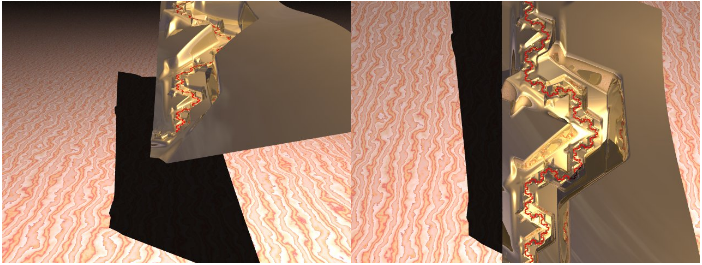
Che poi questa strada possa essere “incastonata” nel fianco di una montagna, in modo che il piano tangente sia orizzontale in tutti i punti della strada stessa. . .

Che poi questa strada possa essere “incastonata” nel fianco di una montagna, in modo che il piano tangente sia orizzontale in tutti i punti della strada stessa. . . è conseguenza del teorema di estensione di Whitney (1934). Ecco qual è uno dei possibili aspetti della “montagna”:

Welcome to Snowflake Road on Mount Whitney.

Beware: it takes FOREVER to reach the top!

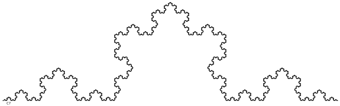
Che poi questa strada possa essere "incastonata" nel fianco di una montagna, in modo che il piano tangente sia orizzontale in tutti i punti della strada stessa. . . è conseguenza del teorema di estensione di Whitney (1934). Ecco qual è uno dei possibili aspetti della "montagna":



Quest'opera di ingegneria stradale ha un unico, piccolo inconveniente: è vero che la strada non è mai in salita. . . ma purtroppo è anche infinitamente lunga!

Veniamo alla mia proposta di laboratorio PLS!
La ricerca sui frattali ha avuto un nuovo e notevole impulso con l'uscita, nel 1981, di un lavoro di J.E. Hutchinson

In questo lavoro Hutchinson propose un modo nuovo, semplice ed efficace, per vedere, rappresentare e studiare molti dei vecchi frattali autosimilari come l'insieme di Cantor, la curva di Von Koch e tanti altri. Questo metodo coinvolge i sistemi di funzioni iterate (IFS).
In seguito, grazie al celebre libro "Fractals Everywhere" di M. Barnsley, i frattali di tipo IFS hanno iniziato a godere di un'enorme popolarità ed hanno trovato innumerevoli applicazioni, anche tecnologiche!



Abbiamo già osservato che la curva di Von Koch C è composta da 4 copie più piccole ($1/3$ dell'originale) di se stessa: possiamo descrivere formalmente la cosa nel modo seguente.

- sia $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'omotetia di rapporto $1/3$
- sia $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'omotetia di rapporto $1/3$, seguita da una rotazione di 60^o e da una traslazione di $1/3$ lungo l'asse x
- sia $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'omotetia di rapporto $1/3$, seguita da una rotazione di -60^o e da una traslazione di $1/2$ lungo l'asse delle x, di $\sqrt{3}/6$ lungo l'asse delle y
- sia $T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'omotetia di rapporto $1/3$, seguita da una traslazione di $2/3$ lungo l'asse delle x

Allora $C = T_1(C) \cup T_2(C) \cup T_3(C) \cup T_4(C)$.

Questo lo sapeva già Von Koch nel 1904! Hutchinson però fece un'osservazione semplice ma geniale:

Cosa sono gli IFS

Frattali descritti attraverso trasformazioni geometriche del piano

Questo lo sapeva già Von Koch nel 1904! Hutchinson però fece un'osservazione semplice ma geniale:la curva di Von Koch è l'unico sottinsieme del piano con questa proprietà.
Non solo! Scegliamo un qualsiasi sottinsieme (compatto) del piano A_0 e definiamo $A_1 = T_1(A_0) \cup T_2(A_0) \cup T_3(A_0) \cup T_4(A_0)\ldots$

Questo lo sapeva già Von Koch nel 1904! Hutchinson però fece un'osservazione semplice ma geniale:la curva di Von Koch è l'unico sottinsieme del piano con questa proprietà.
Non solo! Scegliamo un qualsiasi sottinsieme (compatto) del piano A_0 e definiamo $A_1 = T_1(A_0) \cup T_2(A_0) \cup T_3(A_0) \cup T_4(A_0)\ldots$
poi definiamo $A_2 = T_1(A_1) \cup T_2(A_1) \cup T_3(A_1) \cup T_4(A_1)\ldots$

Questo lo sapeva già Von Koch nel 1904! Hutchinson però fece un'osservazione semplice ma geniale:la curva di Von Koch è l'unico sottinsieme del piano con questa proprietà.

Non solo! Scegliamo un qualsiasi sottinsieme (compatto) del piano A_0 e definiamo $A_1 = T_1(A_0) \cup T_2(A_0) \cup T_3(A_0) \cup T_4(A_0) \ldots$

poi definiamo $A_2 = T_1(A_1) \cup T_2(A_1) \cup T_3(A_1) \cup T_4(A_1) \ldots$

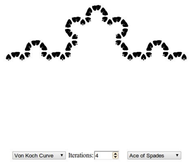
e così via: in generale, dato A_n poniamo

$A_{n+1} = T_1(A_n) \cup T_2(A_n) \cup T_3(A_n) \cup T_4(A_n)$.

Cosa sono gli IFS

Frattali descritti attraverso trasformazioni geometriche del piano

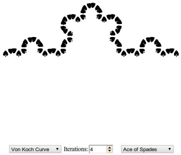
Questo lo sapeva già Von Koch nel 1904! Hutchinson però fece un'osservazione semplice ma geniale:la curva di Von Koch è l'unico sottinsieme del piano con questa proprietà.
Non solo! Scegliamo un qualsiasi sottinsieme (compatto) del piano A_0 e definiamo $A_1 = T_1(A_0) \cup T_2(A_0) \cup T_3(A_0) \cup T_4(A_0) \ldots$
poi definiamo $A_2 = T_1(A_1) \cup T_2(A_1) \cup T_3(A_1) \cup T_4(A_1) \ldots$
e così via: in generale, dato A_n poniamo
$A_{n+1} = T_1(A_n) \cup T_2(A_n) \cup T_3(A_n) \cup T_4(A_n)$.
Ebbene, questa successione di insiemi tende (in un senso appropriato) proprio alla curva di Von Koch, qualunque sia l'insieme di partenza.(Cliccare sulla figura per aprire un programmino che illustra questo fatto...)



Cosa sono gli IFS

in generale...

La curva di Von Koch è solo un esempio di sistema di funzioni iterate: in generale,
un IFS è una famiglia finita $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ di trasformazioni del piano che siano contrattive, cioè che riducano le distanze.
Ogni IFS ha un unico attrattore, cioè un insieme (compatto) C tale che $C = \bigcup_{n=1}^{N} T_n(C)$.
Questo insieme può essere approssimato applicando il procedimento iterativo descritto prima, indipendentemente dall'insieme di partenza: questo spiega perchè l'attrattore si chiama in questo modo!



Nella compressione frattale delle immagini, si vuole ottenere la figura da comprimere come attrattore di un opportuno IFS.
Lo strumento principale per trovare questo IFS è il Teorema del Collage, che dice più o meno la cosa seguente:

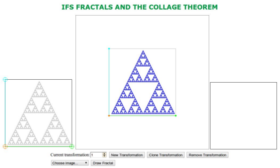
Divertiamoci con i Collage:

gli IFS per la compressione delle immagini

Nella compressione frattale delle immagini, si vuole ottenere la figura da comprimere come attrattore di un opportuno IFS.
Lo strumento principale per trovare questo IFS è il Teorema del Collage, che dice più o meno la cosa seguente:
Dato un sottinsieme del piano A (l'immagine da comprimere), supponiamo che esista un sistema di funzioni iterate $\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ tale che A sia visivamente vicino all'insieme $\bigcup_{n=1}^{N} T_n(A)$, che possiamo interpretare come un collage di copie ridotte di A. Allora A è visivamente vicino all'attrattore dell'IFS.

Divertiamoci con i Collage:
gli IFS per la compressione delle immagini

Nella compressione frattale delle immagini, si vuole ottenere la figura da comprimere come attrattore di un opportuno IFS.
Lo strumento principale per trovare questo IFS è il Teorema del Collage, che dice più o meno la cosa seguente:
Dato un sottinsieme del piano A (l'immagine da comprimere), supponiamo che esista un sistema di funzioni iterate $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ tale che A sia visivamente vicino all'insieme $\bigcup_{n=1}^{N} T_n(A)$, che possiamo interpretare come un collage di copie ridotte di A. Allora A è visivamente vicino all'attrattore dell'IFS.
Nel teorema sopra, l'espressione "visivamente vicino" può essere resa precisa con un'opportuna definizione matematica. . . e possiamo anche calcolare quanto sono vicini A e l'attrattore dell'IFS!
Cliccare sulla figura per aprire un programmino che illustra il Collage Theorem:



Ecco alcuni esempi di cos'altro si può ottenere utilizzando il programmino linkato nella pagina precedente.
Cliccando sulla figura del "Frattale Marconi" si apre un programmino che permette di vederne la struttura autosimilare (zoomare trascinando il mouse...).